

日本大学大学院理工学研究科

---

---

## 量子理工学専攻 統計力学 I

— 臨界現象と繰り込み群 —

---

---

2020 年度前期

(最終更新日: 2020 年 7 月 26 日)

大谷 聡

日本大学量子科学研究所

ohya@phys.cst.nihon-u.ac.jp

<http://aries.phys.cst.nihon-u.ac.jp/~ohya/>



# 目次

はじめに	v
参考文献	vii
単位系と記号	ix
<b>第 1 章 臨界現象と繰り込み群</b>	<b>1</b>
1.1 相転移の代表例	1
1.2 相図とその部分空間	1
1.3 応答関数と臨界指数	2
1.4 普遍性と普遍類	3
1.5 Wilson の繰り込み群	4
1.6 摂動論と $\epsilon$ 展開	9
参考文献	10
<b>第 2 章 平均場近似</b>	<b>11</b>
2.1 流体の臨界現象	11
2.1.1 正準分布と大正準分布	13
2.1.2 理想気体	16
2.1.3 平均場近似	18
2.2 強磁性体の臨界現象	23
2.2.1 Ising 模型	25
2.2.2 平均場近似	26
2.3 スケーリング則と普遍性	30
参考文献	33
<b>第 3 章 Ginzburg-Landau 理論</b>	<b>35</b>
3.1 連成振動子から場の理論へ	35
3.1.1 Gauss 積分	36
3.1.2 1次元連成振動子	38
3.1.3 汎関数積分と汎関数微分	41
3.2 Ginzburg-Landau 理論	44
3.2.1 $O(n)$ 線型 $\sigma$ 模型	48
3.3 Ginzburg の判定基準	50
3.3.1 臨界指数 $\nu$ と $\eta$	51
3.3.2 応答関数と連結 2 点相関関数	52
3.3.3 平均場近似の適用限界と Ginzburg の判定基準	53
参考文献	55
<b>第 4 章 Wilson の繰り込み群</b>	<b>57</b>
4.1 繰り込み群変換	57
4.1.1 繰り込み群変換の抽象的構造	58
4.1.2 繰り込み群変換の具体的構成	60

4.1.3	繰り込み群方程式 . . . . .	62
4.2	繰り込み群変換の固定点と繰り込み群のフロー . . . . .	63
4.2.1	フロー方程式の線型化 . . . . .	64
4.2.2	臨界面と renormalized trajectory . . . . .	66
4.2.3	色々な繰り込み群のフロー . . . . .	67
4.3	スケーリング則と臨界指数 . . . . .	70
4.3.1	単位体積当たりの自由エネルギーと相関長のスケーリング則 . . . . .	71
4.3.2	相関関数のスケーリング則 . . . . .	72
	参考文献 . . . . .	74
第 5 章	$\epsilon$ 展開 . . . . .	77
5.1	繰り込み群変換とキュムラント展開 . . . . .	77
5.1.1	キュムラント展開 . . . . .	78
5.1.2	繰り込み群変換とキュムラント展開 . . . . .	79
5.1.3	具体例: $\phi^4$ 模型の繰り込み群変換 . . . . .	80
5.2	Wilson-Fisher 固定点 . . . . .	86
5.2.1	2 次のキュムラント . . . . .	87
5.2.2	$\epsilon$ 展開 . . . . .	92
	参考文献 . . . . .	95

# はじめに

この講義では 2 次相転移の臨界現象を繰り込み群の観点から解説します。主に次の 3 つの事柄について学びます:

- 臨界現象の普遍性とスケーリング則
- 繰り込み群による普遍性とスケーリング則の導出
- 摂動論による臨界指数の定量的計算

これらを 15 回の講義で解説します。講義の中盤以降、場の理論の手法を用いますが、場の理論の知識は仮定しません。但し、学部で学んだ熱力学・統計力学の基礎は修得済みと仮定します。

授業はこの講義ノートに沿って進めます。この講義ノートは 5 つの章から成っていて、各章の概要は次の通りです:

## 第 1 章 臨界現象と繰り込み群

臨界現象と Wilson の繰り込み群について概観する。繰り込み群変換、繰り込み群のフロー方程式、繰り込み群変換の固定点、固定点周りで線型化したフロー方程式、臨界面、renormalized trajectory などの概念を一通り説明。

## 第 2 章 平均場理論

臨界現象の雛形である流体と強磁性体の 2 次相転移を調べる。van der Waals 状態方程式と Ising 模型の平均場近似を用いて解析すると両者の臨界指数は一致する。スケーリング仮説を認めれば、この普遍性は導かれる事を見る。

## 第 3 章 Ginzburg-Landau 理論

Landau および Ginzburg-Landau によって創始された秩序変数と対称性に基づく現象論を学ぶ。平均場近似では扱えない秩序変数の揺らぎについても学ぶ。この章から場の理論の手法を用いる。

## 第 4 章 Wilson の繰り込み群

汎関数積分に基づいた Wilson の繰り込み群を導入する。繰り込み群変換の固定点が存在することを仮定すれば、スケーリング則および臨界現象の普遍性は全て導出できることを学ぶ。

## 第 5 章 $\epsilon$ 展開

Wilson の繰り込み群は摂動計算と組み合わせることで予言能力を持つ。この章では摂動計算の代表例である  $\epsilon$  展開について学ぶ。 $\phi^4$  模型を例に、臨界指数を具体的に計算する。

授業では時間の都合で計算過程を省略する場合がありますが、講義ノートには詳しく書いたつもりです。また、第 3 章以降場の理論を用いますが、具体的な計算は全て Gauss 固定点 (無質量自由場の理論) の周りでの摂動計算なので、Wick の定理さえ習得すれば後は組合せ論的な考察で済みます。ですので、場の理論を学んだことが無くても特に心配する必要はありません。また、講義全体を通して数学的厳密さは追求しません。まずは全体の雰囲気を理解して、簡単な問題は自分で解けるようになる、という事を目標にします。



## 参考文献

昔と違って今では臨界現象と繰り込み群について解説した教科書は沢山あります。その中から私が良いと思うものを幾つか挙げておきますので、学習の参考にしてください。

まず、初学者には Mehran Kardar の 2 冊本をお薦めします:

[1] M. Kardar, *Statistical Physics of Particles* (Cambridge University Press, 2007)

[2] M. Kardar, *Statistical Physics of Fields* (Cambridge University Press, 2007)

[1] は熱力学・統計力学の教科書で、第 5 章に気液相転移の臨界現象に関する詳しい議論があります。[2] は統計場の理論の教科書で、第 5 章までで繰り込み群および  $\epsilon$  展開の説明が終わります。但し、演算子積展開や共形場理論などの高級な話題には全く触れていません。主に [2] の第 5 章までの内容がこの講義に対応します。

次に、John Cardy の次の本もお薦めです:

[3] J. Cardy, *Scaling and Renormalization in Statistical Physics* (Cambridge University Press, 1996)

短い紙数の中で色々な話題に触れており、読むと勉強になります。但し、内容は Kardar よりも高級で、第 5 章の摂動計算は全て演算子積展開を用いています。また、詳しい計算は載っていないので、自分で計算して行間を埋める必要があります。最後の第 11 章では 2 次元共形場理論にも簡単に触れています。

他に、Ramamurti Shankar の次の教科書もお薦めです:

[4] R. Shankar, *Quantum Field Theory and Condensed Matter* (Cambridge University Press, 2017)

この本は臨界現象の教科書というわけではありませんが、第 11 章から第 14 章にかけて臨界現象と繰り込み群についてとても良い解説が載っています。

さて、相転移と臨界現象の研究は非常に長い歴史を持っていますが、歴史的展開にも興味がある人は Cyril Domb のモノグラフを読むと良いでしょう:

[5] C. Domb, *The Critical Point* (Taylor & Francis, 1996)

流体と磁性体の臨界現象の古典論から始まり、2 次元 Ising 模型の厳密解、スケールリング仮説、最後に Wilson の繰り込み群について歴史に沿って解説しています。非常に詳しい大著です。

また、Kenneth G. Wilson が繰り込み群を開発するに至った経緯を知りたい人は、Wilson の Nobel 賞受賞講演および Wilson の同僚で共同研究者の Michael E. Fisher の講義録を読むと良いでしょう:

[6] K. G. Wilson, “The renormalization group and critical phenomena,” *Rev. Mod. Phys.* **55** (1983) 583–600

[7] M. E. Fisher, “Renormalization group theory: Its basis and formulation in statistical physics,” *Rev. Mod. Phys.* **70** (1998) 653–681

どちらも当時のエピソードを交えて繰り込み群を解説しており、とても興味深い内容です。

以上、洋書ばかり挙げましたが、和書でも臨界現象や繰り込み群の教科書は幾つかあります。私が読んだ事があるのは次の 4 冊です:

[8] 江沢洋, 渡辺敬二, 鈴木増雄, 田崎晴明, 『くりこみ群の方法』(岩波書店, 2000 年)

[9] 西森秀稔, 『相転移・臨界現象の統計物理学』(培風館, 2005 年)

[10] 園田英徳, 『今度こそわかるくりこみ理論』(講談社, 2014 年)

[11] 高橋和孝, 西森秀稔, 『相転移・臨界現象とくりこみ群』(丸善出版, 2017 年)

[9][11] は統計物理の教科書で、この講義では扱わない話題も沢山載っています。一方、[8][10] は繰り込み群の教科書です。[10] および [8] の第 4 章には、繰り込み群を用いて相互作用のある連続場の理論を非摂動的に定義するという Wilson のアイデアも述べられて

います。結合定数を非ゼロの有限値に保つ様なカットオフ無限大の極限  $\Lambda \rightarrow \infty$  (連続極限) が本当に存在するか、という事が問題になるのですが、摂動論の場の理論しか勉強したことがない人は衝撃を受けるかもしれません。但し、この場の理論の連続極限の問題はかなり高級な話題なので、この講義では殆ど触れません。

上で挙げた文献以外にも良い文献は沢山あります。それらについては各章末で参考文献として挙げています。

### 更に進んで勉強したい人の為の文献

この講義で扱う話題は全て 1970 年代前半には明らかにされていたことばかりです。その後の発展については全く触れる余裕がないので、ここで幾つか参考文献を挙げておきましょう。

臨界現象の理論研究における 1980 年代以降の発展と言えば、なんといっても共形場理論でしょう。特に 2 次元の場合の共形場理論が 1980 年代半ば以降大きく発展しました。2 次元共形場理論の教科書は沢山ありますが、臨界現象と関連付けて解説した教科書としては例えば

[12] M. Henkel, *Conformal Invariance and Critical Phenomena* (Springer-Verlag, 1999)

があります。2 次元なんて理論家のおもちゃだと思ってしまうかもしれませんが、2 次元の臨界現象は実験的にも実現されています。有名なのはグラファイトシート上に吸着された  $\text{CH}_4$  (メタン) の気液相転移の臨界現象です:

[13] H. K. Kim and M. H. W. Chan, “Experimental Determination of a Two-Dimensional Liquid-Vapor Critical-Point Exponent,” *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984) 170–173

この系の臨界指数は 2 次元 Ising 普遍類の臨界指数と精度良く一致しているそうです。他には  $^4\text{He}$  の超流動薄膜が示す Berezinskii-Kosterlitz-Thouless 相転移も有名です。この系の臨界指数は 2 次元 XY 普遍類で記述されます。

さて、3 次元以上の共形場理論に関しては、1970 年代に一部の研究者たちによって精力的に調べられていましたが、その後大きな発展はありませんでした。しかし最近になって共形ブートストラップと数値計算を組み合わせた手法によって大きな進展がありました。この講義では全く触れませんが、この辺の最近の発展に興味がある人は次の解説記事を読んでみましょう:

[14] D. Poland and D. Simmons-Duffin, “The conformal bootstrap,” *Nature Phys.* **12** (2016) 535–539

もっと詳しく勉強したい人は次の講義録および教科書を参考にすると良いでしょう:

[15] S. Rychkov, “EPFL Lectures on Conformal Field Theory in  $D \geq 3$  Dimensions,” [arXiv:1601.05000](https://arxiv.org/abs/1601.05000) [hep-th]

[16] D. Simmons-Duffin, “TASI Lectures on the Conformal Bootstrap,” [arXiv:1602.07982](https://arxiv.org/abs/1602.07982) [hep-th]

[17] 中山優, 『高次元共形場理論への招待』(サイエンス社, 2019 年)

この共形ブートストラップを用いて数値計算で求めた臨界指数が、現在最も精度が良い値だと言われています。

最後に、この講義で一通り勉強したら、Kenneth G. Wilson の講義録に挑戦してみましょう:

[18] K. G. Wilson and J. Kogut, “The renormalization group and the  $\epsilon$  expansion,” *Phys. Rep.* **12** (1974) 75–200

決して分かり易くはありませんが、これはちゃんと読む価値があります。諦めずに何度も読んでいけば、そのうち理解できるようになります。



# 単位系と記号

この講義ノートで使う単位系や記号，各種関数をまとめておきます．

- Boltzmann 定数

この講義ノートでは Boltzmann 定数は 1 におきます：

$$k_B = 1$$

従って，温度はエネルギーの単位で測ることになります．

- Fourier 変換

$$f(\mathbf{x}) = \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \tilde{f}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$$

$$\tilde{f}(\mathbf{p}) = \int d^d \mathbf{x} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

- デルタ関数

$$\delta^d(\mathbf{x}) = \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} = \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$$

$$\delta^d(\mathbf{p}) = \int \frac{d^d \mathbf{x}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} = \int \frac{d^d \mathbf{x}}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$$

- 階段関数

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

- 符号関数

$$\text{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} +1 & \text{for } x > 0 \\ -1 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$



## 第 1 章

# 臨界現象と繰り込み群

この講義の目的は臨界現象の普遍性を繰り込み群の観点から解説することです。詳細に入る前に、これから何を学ぶのか、その全体像を俯瞰しておきましょう。以下、証明・導出無しに簡潔に述べていきますが、この段階で全く分からなくても気にしてはいけません。最初は単なる読み物として読んで下さい。

### 1.1 相転移の代表例

相転移とはその名の通り物質の相の転移の事です。相転移を論じるにはまず相とは何かを明らかにする必要がありますが、これは後回しにして先に例だけ挙げておきましょう。相転移の最も身近な例としては、 $\text{H}_2\text{O}$  の固相から液相への相転移 (氷が水に溶ける現象) や液相から気相への相転移 (水が水蒸気に蒸発する現象) があります。他にも色々あって、例えば次の様なものが相転移の代表例です：

- 強磁性相転移 — 温度を上げると磁石が強磁性相から常磁性相へ転移 (高温では磁石が磁石ではなくなる現象)
- 超伝導相転移 — 温度を下げると金属が常伝導相から超伝導相へ転移 (低温では電気抵抗がゼロになる現象)
- 超流動相転移 — 温度を下げると物質が常流動相から超流動相へ転移 (低温では粘性がゼロになる現象)

他には高温の初期宇宙で起こったとされる電弱相転移やクォーク・ハドロン相転移などもあります。相転移は物性物理から素粒子・原子核・宇宙物理までありとあらゆる分野で登場しますが、この講義では主に流体の気液相転移と強磁性体の強磁性相転移を扱っていきます。

### 1.2 相図とその部分空間

熱力学で学んだように、熱平衡系では熱力学ポテンシャルが分かればそれを偏微分することで種々の物理量が得られます。一方、相転移が起こると種々の物理量が不連続に変化したり、無限大に発散したりすることが実験的に分かっています。これは熱力学ポテンシャルの偏微分が不連続に変化したり、無限大に発散したりすることを意味します。これを踏まえて、物質の相は熱力学ポテンシャルの解析的性質から判定します。単位体積当たりの熱力学ポテンシャルを抽象的に  $f(x_1, x_2, \dots)$  としましょう。この時、

- $f$  の変数  $(x_1, x_2, \dots)$  が張る空間を相図 (phase diagram)
- この変数に関して  $f$  が解析的<sup>\*1</sup>である領域を相 (phase)
- $f$  が非解析的<sup>\*2</sup>になる余次元 1 の部分空間<sup>\*3</sup>を相境界 (phase boundary)
- 相境界の端点からなる余次元 2 の部分空間を臨界点 (critical point)
- 変数を動かして相境界を横切ることを相転移 (phase transition)

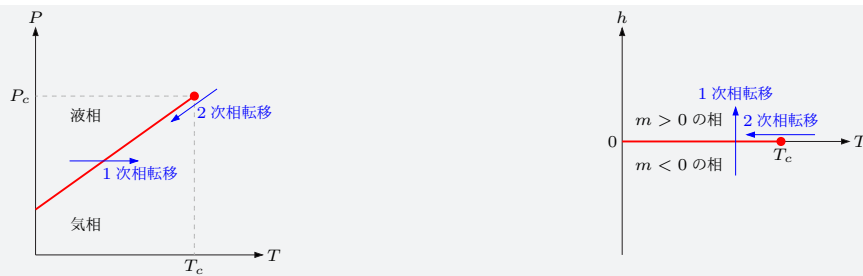
と呼びます<sup>\*4</sup>。そして、相境界で  $f$  の 1 階偏導関数が不連続になる場合を 1 次相転移、それ以外を 2 次相転移 (または連続相転移) と呼びます。この講義で扱うのは臨界点近傍のみで、相図の中のこの特殊な部分空間近傍で起こる現象を臨界現象 (critical phenomena) と呼びます。この臨界現象が系の微視的詳細に依らず、少数のパラメータだけで記述できる普遍的な振る舞いを示すのです。流体と強磁性体の相図の典型例を図 1.1 に示しました。

<sup>\*1</sup> ここで言う解析的とは取束級数で書けるという意味で、 $f$  が全ての変数に対して取束する Taylor 級数で書ける領域を相と呼びます。

<sup>\*2</sup> 熱力学ポテンシャルの非解析性は熱力学極限 (粒子数密度  $N/V$  を一定に保った体積  $V \rightarrow \infty$ , 粒子数  $N \rightarrow \infty$  の極限) を取らないと現れません。これは重要ですが、この講義では全く触れません。

<sup>\*3</sup> 一般に  $N$  次元空間の中の「余次元  $n$  の部分空間」とは、次元が  $n$  だけ低い  $N - n$  次元部分空間を指します。余次元は codimension の和訳です。

<sup>\*4</sup> 他には複数の相境界の交点からなる部分空間もあります。有名なのは固相、液相、気相の相境界が交わる 3 重点です。



(a) 流体の  $(P, T)$  相図.  $P$  は圧力を表します. 臨界点を超えた図の右上の領域では液体と気体の区別がなくなります.

(b) 強磁性体の  $(h, T)$  相図.  $h$  は外部磁場で,  $m$  は単位格子当たりの磁化を表します.  $h = 0, T < T_c$  の時がいわゆる磁石です.

図1.1: 流体と強磁性体の相図の2次元断面図. 赤色の1次元の線が相境界(2次元空間の中の余次元1の部分空間)で, 赤色の0次元の点が臨界点(2次元空間の中の余次元2の部分空間)を表します. 相境界の横切り方によって1次相転移を示したり2次相転移を示したりします.

### 1.3 応答関数と臨界指数

臨界点近傍では種々の物理量が特異性を示します. その様な物理量の典型例は応答関数 (response function) です. 応答関数の典型例は定積比熱  $c_V$  と等温圧縮率  $\kappa_T$  で, これらは連結2点相関関数の空間積分で与えられます. 例を挙げましょう:

#### • 流体の場合

$c_V$  と  $\kappa_T$  はそれぞれエネルギーと粒子数の揺らぎ(期待値からのずれ)の2乗平均で与えられます. エネルギー密度  $\mathcal{H}(\mathbf{x})$  と粒子数密度  $\rho(\mathbf{x})$  を使うと, これらは連結2点相関関数の空間積分で表されます:

$$c_V \propto \frac{1}{V} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log Z(T, V, N) = \frac{1}{V} \langle (H - \langle H \rangle)^2 \rangle \sim \int d^d \mathbf{x} \langle \mathcal{H}(\mathbf{x}) \mathcal{H}(\mathbf{0}) \rangle_c \quad (1.3.1a)$$

$$\kappa_T \propto \frac{1}{V} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \log \Xi(T, V, \mu) = \frac{1}{V} \langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle \sim \int d^d \mathbf{x} \langle \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{0}) \rangle_c \quad (1.3.1b)$$

但し,  $Z(T, V, N)$  は正準分布の分配関数,  $\Xi(T, V, \mu)$  は大正準分布の分配関数で  $\mu$  は化学ポテンシャルです.  $\langle \cdot \rangle_c$  は連結相関関数で, 2点相関関数の場合は一般に次式で与えられます:

$$\langle \mathcal{O}(\mathbf{x}) \mathcal{O}(\mathbf{0}) \rangle_c = \langle \mathcal{O}(\mathbf{x}) \mathcal{O}(\mathbf{0}) \rangle - \langle \mathcal{O}(\mathbf{x}) \rangle \langle \mathcal{O}(\mathbf{0}) \rangle \quad (1.3.2)$$

#### • 強磁性体の場合

強磁性体の場合, 定積比熱に対応するのは定磁場比熱  $c_h$  で, 等温圧縮率に対応するのは等温帯磁率  $\chi_T$  です.  $c_h$  と  $\chi_T$  はそれぞれエネルギーと磁化の揺らぎの2乗平均で与えられます.  $i$  番目のサイトに於けるエネルギー密度  $\mathcal{H}(\mathbf{x}_i)$  と磁気モーメント  $S(\mathbf{x}_i)$  を使うと, これらも連結2点相関関数で書き表されます:

$$c_h \propto \frac{1}{N} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log Z(T, h) = \frac{1}{N} \langle (H - \langle H \rangle)^2 \rangle \sim \sum_{i=1}^N \langle \mathcal{H}(\mathbf{x}_i) \mathcal{H}(\mathbf{x}_0) \rangle_c \quad (1.3.3a)$$

$$\chi_T \propto \frac{1}{N} \frac{\partial^2}{\partial h^2} \log Z(T, h) = \frac{1}{N} \langle (M - \langle M \rangle)^2 \rangle \sim \sum_{i=1}^N \langle S(\mathbf{x}_i) S(\mathbf{x}_0) \rangle_c \quad (1.3.3b)$$

格子のサイト数  $N \rightarrow \infty$ , 格子間隔  $a \rightarrow 0$  の極限を取れば, 右辺の和は積分に変わります.

さて, 上の応答関数は揺らぎの2乗平均で与えられる訳ですが, 臨界点近傍ではこの揺らぎが非常に大きくなり, 次の冪則に従って発散することが実験的にも分かっています:

$$c_V \sim |T - T_c|^{-\alpha} \quad \text{and} \quad \kappa_T \sim |T - T_c|^{-\gamma} \quad \text{as} \quad T \downarrow T_c \quad (1.3.4a)$$

$$c_h \sim |T - T_c|^{-\alpha} \quad \text{and} \quad \chi_T \sim |T - T_c|^{-\gamma} \quad \text{as} \quad T \downarrow T_c \quad (1.3.4b)$$

この冪の指数  $\alpha, \gamma$  を臨界指数 (critical exponent) と呼び, これらを定量的に計算・予言することが理論物理の重要な課題です. 臨界指数には色々あって, 教科書でよく登場するのは  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \nu\}$  の6つです. 他にもあって, 昔の研究者が沢山導入したのですが, 実は独立なものは2つしかありません. 講義の後半で計算していくのは  $\eta$  と  $\nu$  で,  $\eta$  は(秩序変数と呼ばれる量の)連結2点相関関数

$G_c^{(2)} = \langle \cdot \cdot \rangle_c$  の臨界点  $T = T_c$  での振る舞いから決定されます:

$$G_c^{(2)}(\mathbf{x}) \sim \frac{1}{|\mathbf{x}|^{d-2+\eta}} \quad (1.3.5)$$

一方,  $\nu$  は相関長 (correlation length)  $\xi$  の臨界点  $T = T_c$  近傍での振る舞いから決定されます:

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu} \quad (1.3.6)$$

相関長は空間各点での揺らぎが影響を及ぼし合う距離で, 臨界点  $T = T_c$  直上では無限大に発散します. Wilson の繰り込み群を用いると, この臨界指数  $\eta$  と  $\nu$  は繰り込み群変換の固定点の情報から決定される事が分かります.

## 1.4 普遍性と普遍類

流体や強磁性体のような一見全く異なる系でも, 臨界指数  $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$  の値が全て一致する場合があります. このような現象を臨界現象の普遍性 (universality) と言います. そして, 2つの系の臨界指数が全て一致する時, その2つの系は同じ普遍類 (universality class) に属すると言います. 普遍類は空間次元  $d$  や系の対称性, 相互作用の種類などで決まって, 例えば次の様なものがあります:

- $d$  次元 Ising 普遍類 —  $d$  次元 Ising 模型 ( $\mathbb{Z}_2$  不変な短距離相互作用の模型) と臨界指数が一致する理論の集合
- $d$  次元 XY 普遍類 —  $d$  次元 XY 模型 ( $O(2)$  不変な短距離相互作用の模型) と臨界指数が一致する理論の集合
- $d$  次元 Heisenberg 普遍類 —  $d$  次元 Heisenberg 模型 ( $O(3)$  不変な短距離相互作用の模型) と臨界指数が一致する理論の集合

ここで Ising 模型, XY 模型, Heisenberg 模型というのは最近接相互作用のみの格子模型で, それぞれ次の  $O(n)$  ベクトル模型の  $n = 1, 2, 3$  の場合に他なりません:

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{x}_j) - \sum_{i=1}^N \mathbf{h} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{x}_i) \quad \text{with} \quad \mathbf{S}(\mathbf{x}_i) = (S_1(\mathbf{x}_i), \dots, S_n(\mathbf{x}_i)) \quad (1.4.1)$$

但し,  $\mathbf{S}(\mathbf{x}_i)$  は  $n$  成分単位ベクトルで, 任意の  $\mathbf{x}_i$  に対して  $(S_1(\mathbf{x}_i))^2 + \dots + (S_n(\mathbf{x}_i))^2 = 1$  を満たします. 上の格子模型は重要ですが, この講義ではこれらの格子模型を調べることは殆どしません. 代わりにもっと扱いやすい, しかしこれらと同じ普遍類に属するカットオフ付きの場の理論 (統計場の理論) を用います. 例えば  $n = 1$  の場合, Ising 模型を調べるのではなく, 作用汎関数 (action functional) が次式で与えられる  $\phi^4$  模型と呼ばれる統計場の理論を調べていきます:

$$S = \beta H = \int d^d \mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} \nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} m^2 \phi^2(\mathbf{x}) + \frac{\lambda}{4!} \phi^4(\mathbf{x}) \right] \quad \text{with} \quad \phi(\mathbf{x}) = \int_{|\mathbf{p}| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \quad (1.4.2)$$

ここで  $\Lambda$  がカットオフ (cutoff) と呼ばれるもので, 運動量の上限を与える量です. この逆数  $1/\Lambda$  が格子間隔  $a$  に対応します. さて, 統計物理で重要なのは分配関数  $Z$  ですが, Ising 模型の場合これは Boltzmann 因子  $e^{-\beta H}$  をありとあらゆる  $\mathbf{S}(\mathbf{x}_i)$  の配位について足し上げたもの

$$Z = \sum_{S(\mathbf{x}_1)=\pm 1} \dots \sum_{S(\mathbf{x}_N)=\pm 1} e^{-\beta H} \quad (1.4.3)$$

で与えられます. 対応して統計場の理論の分配関数は  $e^{-S}$  をありとあらゆる  $\phi(\mathbf{x})$  の配位について汎関数積分したものの

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S} \quad (1.4.4)$$

で与えられます. 実用上, 特に繰り込み群で解析する時は運動量表示を用いる方が便利です.  $\phi(\mathbf{x})$  の Fourier 積分表示を代入して計算すると作用汎関数(1.4.2)は次の様になります:

$$S = \frac{1}{2!} \int_{|\mathbf{p}| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} S^{(2)}(\mathbf{p}^2) \tilde{\phi}(\mathbf{p}) \tilde{\phi}(-\mathbf{p}) + \frac{1}{4!} \int_{|\mathbf{p}_1| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}_1}{(2\pi)^d} \dots \int_{|\mathbf{p}_4| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}_4}{(2\pi)^d} S^{(4)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4) \tilde{\phi}(\mathbf{p}_1) \dots \tilde{\phi}(\mathbf{p}_4) (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_4) \quad (1.4.5)$$

但し,

$$S^{(2)}(\mathbf{p}^2) = \mathbf{p}^2 + m^2 \quad \text{and} \quad S^{(4)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) = \lambda \quad (1.4.6)$$

この時分配関数は  $\tilde{\phi}(\mathbf{p})$  に対する汎関数積分  $Z = \int \mathcal{D}\tilde{\phi} e^{-S}$  で与えられます. 後述する Wilson の繰り込み群変換はこの分配関数を不変に保つ変換で, その様な変換を駆使して臨界指数を計算していきます. 表1.1に3次元 Ising 普遍類の臨界指数の代表的な理論値と実験値を示しました.

臨界 指数	理論値				実験値
	平均場 近似	Ising 模型 Monte Carlo 法 <sup>a</sup>	共形場理論 共形ブートストラップ <sup>b</sup>	$\phi^4$ 理論 $\epsilon$ 展開の $O(\epsilon^2)$ <sup>c</sup>	
$\eta$	0	0.03627	0.03630	0.01724	0.016
$\nu$	$\frac{1}{2}$	0.63002	0.63000	0.66975	0.625

<sup>a</sup> arXiv:1004.4486 [cond-mat.stat-mech] から引用.

<sup>b</sup> arXiv:1603.04436 [hep-th] から引用.  $\eta = 2\Delta_\sigma - 1$  と  $\nu = 1/(3 - \Delta_\epsilon)$  を用いました.

<sup>c</sup> 式(1.6.2a)と(1.6.2b)に  $n = 1$  および  $\epsilon = 1$  を代入した値. 他の理論値とずれていますが, これは近似の精度の問題で, 精度の向上は可能です.

<sup>d</sup> Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 1481–1484 から引用.

表1.1: 3次元 Ising 普遍類の臨界指数. 誤差は適当に省略しました. 理論値は近似値で, 厳密な値は分かっていません.

## 1.5 Wilson の繰り込み群

冒頭で述べた様に, この講義の目的は臨界現象の普遍性を繰り込み群の観点から理解する事です. 理解したい事は次の2つです:

- なぜ普遍性が成り立つのか? (なぜ流体や磁性体の様な全く異なる系でも, 臨界指数が一致する場合があるのか?)
- 臨界指数を定量的に求めるにはどうすれば良いか?

1番目に関しては, 1960年代にはスケーリング則 (scaling law) が成り立っていれば導けるという事は分かっていましたが, なぜスケーリング則が成り立つのかは (Kadanoff のブロックスピン変換による理解はありましたが) 基本的には全く分かっていませんでした. また2番目に関しては, Onsager による2次元 Ising 模型の厳密解や Domb らによる高温展開・低温展開の計算結果がある以外は, 基本的に平均場近似による計算法しかありませんでした. この講義を通して見ていく様に, 臨界現象の普遍性および臨界指数の計算法は全て Wilson の繰り込み群によって理解できます. Wilson が繰り込み群を開発したのは1971年ですが, 未だに繰り込み群は難しい, 難解だと言われています. そこでまず Wilson の繰り込み群の大まかな構造をここで述べておきましょう. Wilson の繰り込み群とは, 1個の連続パラメータ  $t$  で記述される1径数族 (one-parameter family) の変換群の事で, この変換群は作用汎関数  $S$  を別の作用汎関数  $S_t$  に変える変換 (繰り込み群変換)

$$R_t : S \mapsto R_t(S) = S_t \quad (1.5.1)$$

の集合で, 特に分配関数を不変に保つもの, 即ち,

$$Z[S] = Z[S_t] \quad (1.5.2)$$

を満たすものから成っています. 繰り込み群変換  $R_t$  は後で具体的に構成していきませんが, その作り方は, 2つの繰り込み群変換  $R_{t_1}$  と  $R_{t_2}$  の積  $R_{t_1}R_{t_2}$  を合成変換  $(R_{t_1}R_{t_2})(S) := R_{t_1}(R_{t_2}(S))$  で定めた時, 次の群の掛け算則が成り立つ様に構成していきま

$$R_{t_1}R_{t_2} = R_{t_1+t_2} \quad (1.5.3)$$

この様な変換を使って, 興味のある臨界点近傍の理論  $S$  を, 臨界点から充分離れた (しかし分配関数は等しい) 理論  $S_t$  を使って解析しようというのが Wilson の繰り込み群の基本的なアイデアです.  $t = 0$  の初期値  $S$  が与えられた時,  $S_t$  を求めたい訳ですが<sup>3</sup>, この  $S_t$  を調べる為に実用上は繰り込み群変換の微分形を用います. まず繰り込み群変換は連続変換なので  $S_t = R_t(S)$  の両辺は  $t$  で微分出来ます. 1回だけ微分すると次の1階微分方程式を得ます:

$$\frac{dS_t}{dt} = G(S_t) \quad \text{with} \quad S_{t=0} = S \quad (1.5.4)$$

但し,  $G$  は繰り込み群変換の生成子で次式で定義されます:

$$G(S_t) := \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{R_{\delta t}(S_t) - S_t}{\delta t} \quad (1.5.5)$$

1階微分方程式(1.5.5)を繰り込み群方程式または繰り込み群のフロー方程式と呼びます. この講義ノートでは単にフロー方程式と呼ぶことにします. 量子力学で例えると, 繰り込み群変換  $S_t = R_t(S)$  が状態ベクトルの時間並進  $|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\Psi\rangle$  に対応し, フロー方程式  $\frac{d}{dt}S_t = G(S_t)$  が Schrödinger 方程式  $i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = H|\Psi(t)\rangle$  に対応します. ただ注意しなければならないのは, Schrödinger 方程式の  $H$  は線型演算子ですが, フロー方程式の  $G$  は線型変換では無く, 一般には極めて非線型な変換になります. しかしながら, 繰

り込み群変換の固定点が存在するとその固定点周りでは  $G$  は線型近似が出来て、フロー方程式はまさに量子力学で慣れ親しんだ線型の固有値方程式の問題に帰着されます。この線型化された繰り込み群変換の固有値と固有ベクトルを摂動論で求めるのが講義後半の主題になります。

さて、次に繰り込み群変換を具体的にどのように構成していくかを見ておきましょう。まず Wilson の繰り込み群では特定の理論  $S$  を個別に調べるのではなく、一つの理論  $S$  を「点」だと思って、この「点」全体からなる空間を考えて、この空間において繰り込み群変換がどういう「軌道」を描いていくかを調べて行きます。ですので、最も一般的な作用汎関数を考察するのが適当です。例えば  $\mathbb{Z}_2$  対称性  $\phi \rightarrow -\phi$  がある理論は次の作用汎関数が最も一般的です：

$$S[\tilde{\phi}] = \frac{1}{2!} \int_{|\mathbf{p}| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}_1}{(2\pi)^d} S^{(2)}(\mathbf{p}^2) \tilde{\phi}(\mathbf{p}) \tilde{\phi}(-\mathbf{p}) \\ + \sum_{n=4,6,\dots} \frac{1}{n!} \int_{|\mathbf{p}_1| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}_1}{(2\pi)^d} \cdots \int_{|\mathbf{p}_n| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}_n}{(2\pi)^d} S^{(n)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \tilde{\phi}(\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}(\mathbf{p}_n) (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p}_1 + \cdots + \mathbf{p}_n) \quad (1.5.6)$$

ここで  $S^{(2)}(\mathbf{p}^2)$ ,  $S^{(n)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$  は回転不変性などの制限はありますがその関数形は特に指定しません。但し、1つだけ条件があって、2次の項  $S^{(2)}$  は次の様な規格化条件を満たしているとします：

$$\left. \frac{dS^{(2)}(x)}{dx} \right|_{x=0} = 1 \quad (1.5.7)$$

この様に、カットオフが  $\Lambda$  の場  $\tilde{\phi}$  の汎関数で、2次の項が規格化された作用汎関数の集合を理論空間 (**theory space**) と呼びます。繰り込み群変換はこの理論空間に作用する変換で、次の3つの操作から成ります：

- 高運動量モードの積分

まず運動量表示でのスカラー場  $\tilde{\phi}(\mathbf{p})$  を次の様に2つに分けます：

$$\tilde{\phi}(\mathbf{p}) = \begin{cases} \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}) & \text{for } |\mathbf{p}| \in (0, e^{-t}\Lambda) \\ \tilde{\phi}_h(\mathbf{p}) & \text{for } |\mathbf{p}| \in (e^{-t}\Lambda, \Lambda) \end{cases} \quad (1.5.8)$$

ここで  $t > 0$  は正の実数で、これが繰り込み群変換のパラメータになります。次に高運動量モード  $\tilde{\phi}_h(\mathbf{p})$  についてだけ積分を行って新たな汎関数  $S'_t[\tilde{\phi}_l]$  を構成します：

$$Z[S] = \int \mathcal{D}\tilde{\phi} e^{-S[\tilde{\phi}]} = \int \mathcal{D}\tilde{\phi}_l \mathcal{D}\tilde{\phi}_h e^{-S[\tilde{\phi}_l, \tilde{\phi}_h]} = \int \mathcal{D}\tilde{\phi}_l e^{-S'_t[\tilde{\phi}_l]} = Z[S'_t] \quad (1.5.9)$$

但し、

$$e^{-S'_t[\tilde{\phi}_l]} = \int \mathcal{D}\tilde{\phi}_h e^{-S[\tilde{\phi}_l, \tilde{\phi}_h]} \quad (1.5.10)$$

構成から明らかなように、このようにして作った  $S'_t$  の分配関数  $Z[S'_t]$  は元の分配関数  $Z[S]$  と等しく、更に運動量  $|\mathbf{p}| < e^{-t}\Lambda$  のモードしか含まない場  $\tilde{\phi}(\mathbf{p}) = \tilde{\phi}_l(\mathbf{p})$  に対しては相関関数も変えませんが：

$$\langle \tilde{\phi}(\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}(\mathbf{p}_n) \rangle_S = \frac{1}{Z[S]} \int \mathcal{D}\tilde{\phi} \tilde{\phi}(\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}(\mathbf{p}_n) e^{-S[\tilde{\phi}]} \\ = \frac{1}{Z[S]} \int \mathcal{D}\tilde{\phi}_l \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_n) \int \mathcal{D}\tilde{\phi}_h e^{-S[\tilde{\phi}_l, \tilde{\phi}_h]} \\ = \frac{1}{Z[S'_t]} \int \mathcal{D}\tilde{\phi}_l \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_n) e^{-S'_t[\tilde{\phi}_l]} \\ = \langle \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_n) \rangle_{S'_t}, \quad \forall |\mathbf{p}_i| \in (0, e^{-t}\Lambda) \quad (1.5.11)$$

- スケール変換

上の操作で得られた理論  $S'_t$  はカットオフが  $e^{-t}\Lambda$  の場  $\tilde{\phi}_l(\mathbf{p})$  の理論になってしまったので、カットオフを  $\Lambda$  にするために運動量を次の様にスケール変換します：

$$\mathbf{p} \rightarrow e^{-t}\mathbf{p} \quad (1.5.12)$$

- 再規格化

1番目と2番目の操作を行うと一般に2次の項の規格化がずれてしまいます。そこでスカラー場を定数倍だけ変えて元の規格化と同じになるようにします。新たにスカラー場  $\tilde{\phi}(\mathbf{p})$  を次の様に定義します：

$$\tilde{\phi}(\mathbf{p}) := e^{-dt} \sqrt{Z(S_t)} \tilde{\phi}_l(e^{-t}\mathbf{p}), \quad |\mathbf{p}| \in (0, \Lambda) \quad (1.5.13)$$

ここで定数  $\sqrt{Z(S_t)}$  は規格化条件を満たすようにうまく選びます。(この  $Z$  は分配関数ではありません。) 因子  $e^{-dt}$  は後々便利なので入れました。こうすると,  $S_t[\tilde{\phi}] = S'_t[e^{-dt}\sqrt{Z(S_t)}\tilde{\phi}_t]$  は2次の項が規格化された, カットオフ  $\Lambda$  の場  $\tilde{\phi}$  の作用汎関数になります。  $S$  からこの  $S_t$  を構成する操作が Wilson の繰り込み群変換です。そして相関関数に対する等式(1.5.11)は次の様に書き換えられます:

$$\langle \tilde{\phi}(e^{-t}\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}(e^{-t}\mathbf{p}_n) \rangle_S = e^{ndt} Z^{-n/2}(S_t) \langle \tilde{\phi}(\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}(\mathbf{p}_n) \rangle_{S_t}, \quad \forall |\mathbf{p}_i| \in (0, \Lambda) \quad (1.5.14)$$

この等式が運動量表示相関関数に対する Wilson の繰り込み群方程式 (**renormalization group equation**) です。実用上は,  $Z(S_{t=0}) = 1$  を使って規格化定数  $e^{ndt} Z^{-n/2}(S_t) = e^{n(dt - \frac{1}{2} \log Z(S_t))}$  を次の積分の形で書く方が便利です:

$$e^{n[dt - \frac{1}{2}(\log Z(S_t) - \log Z(S_{t=0}))]} = \exp \left[ n \int_0^t d\tau \left( d - \frac{1}{2} \frac{d \log Z(S_\tau)}{d\tau} \right) \right] = \exp \left[ n \int_0^t d\tau (d - \Delta(S_\tau)) \right] \quad (1.5.15)$$

但し,  $\Delta(S_t)$  は次で定義されます:

$$\Delta(S_t) := \frac{1}{2} \frac{d \log Z(S_t)}{dt} \quad (1.5.16)$$

繰り込み群方程式(1.5.13)は, 運動量  $\mathbf{p}_i$  を  $e^{-t}$  倍だけ減少させた理論  $S$  の低エネルギーの相関関数は, 運動量  $\mathbf{p}_i$  はそのままにした理論  $S_t$  の相関関数と定数倍  $e^{n \int_0^t d\tau (d - \Delta(S_\tau))}$  を除いて等しい, ということを意味します。この意味で, 繰り込み群変換をして得られる理論  $S_t$  は, エネルギースケール  $e^{-t}\Lambda$  以下では定数倍を除いて同じ相関関数を再現する  $S$  の低エネルギー有効理論 (**low energy effective theory**) になっています。

以上3つの操作で構成した  $S_t$  は, パラメータ  $t$  を変化させていくと  $S_{t=0} = S$  を初期値として理論空間の中である軌道を描いていきます。この軌道を繰り込み群のフロー (**renormalization group flow**) と呼び, 通常, **RG flow** と略します。

さて, Wilson の繰り込み群の大まかな構造は以上の通りなのですが, 臨界現象へ応用するにはもう一つ大事な要素があります。それが繰り込み群変換の固定点 (**fixed point**) です。繰り込み群変換の固定点とは, 繰り込み群変換を行っても不変に留まる理論  $S_*$  として定義されます:

$$R_t(S_*) = S_* \quad \Leftrightarrow \quad G(S_*) = 0 \quad (1.5.17)$$

臨界現象の普遍性はこの固定点の情報だけで完全に決定されます。これを見るために固定点から少しだけずれた理論  $S = S_* + \delta S$  を考えましょう。この固定点から少しだけずれた理論  $S$  が繰り込み群変換の下でどの様に変換されていくかを調べます。  $S$  を繰り込み群変換したものを  $R_t(S) = S_t$  を次の様に書きましょう:

$$S_t = S_* + \delta S_t \quad (1.5.18)$$

これをフロー方程式(1.5.4)に代入すると次式を得ます:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S_t &= \frac{d}{dt} (S_* + \delta S_t) = \frac{d}{dt} \delta S_t \\ &= G(S_* + \delta S_t) = L_*(\delta S_t) + O(\delta S_t)^2 \end{aligned} \quad (1.5.19)$$

ここで  $L_*$  は固定点  $S_*$  に依存したある線型変換です。最後の等式は, 関数  $g(x)$  を  $g(x_*) = 0$  を満たす  $x = x_*$  周りで Taylor 展開すると  $g(x_* + \delta x) = g(x_*) + g'(x_*)\delta x + O(\delta x)^2 = g'(x_*)\delta x + O(\delta x)^2$  となる事と本質的に同じです。  $g'(x_*)$  が  $L_*$  に対応します。従って  $\delta S_t$  の1次の近似では,  $\delta S_t$  は次の微分方程式の解として与えられます:

$$\frac{d}{dt} \delta S_t = L_*(\delta S_t) \quad (1.5.20)$$

Schrödinger 方程式  $i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle$  を解く時にまず  $H$  の固有値と固有ベクトルを求めるのと同じように, 上の線型化されたフロー方程式を解くにはまず  $L_*$  の固有値と固有ベクトルを求めます。これらを  $\lambda_n, \mathcal{O}_n$  としましょう:

$$L_*(\mathcal{O}_n) = \lambda_n \mathcal{O}_n \quad (1.5.21)$$

この固有値と固有ベクトルが全て求まったとします。この時  $\delta S_t$  は固有ベクトルで展開できます:

$$\delta S_t = \sum_n g_n(t) \mathcal{O}_n \quad (1.5.22)$$



$g_n(t)$  は展開係数で、この係数の  $t$  依存性が知りたい訳ですが、それは線形化されたフロー方程式(1.5.20)から分かります。式(1.5.22)を式(1.5.20)に代入すると  $g_n(t)$  は次の微分方程式を満たす事が分かります:

$$\frac{d}{dt}g_n(t) = \lambda_n g_n(t) \quad (1.5.23)$$

これは簡単に解けて答えは次の様になります:

$$g_n(t) = g_n(0)e^{\lambda_n t} \quad (1.5.24)$$

従って、固定点近傍では  $S_t$  は次の様に振る舞う事が分かりました:

$$S_t = S_* + \sum_n g_n(0)e^{\lambda_n t} \mathcal{O}_n \quad (1.5.25)$$

固定点近傍で理論  $S_t$  がどのように変化していくかはパラメータ  $g_n(t) = g_n(0)e^{\lambda_n t}$  がどのように変化していくかで決定されます。これは次の3通りあります:

- $\lambda_n > 0$  の場合

この時、パラメータ  $g_n(t) = g_n(0)e^{\lambda_n t}$  は  $t$  が増加するに従って急激に増加します。固有値  $\lambda_n > 0$  に属する固有ベクトル  $\mathcal{O}_n$  を固定点  $S_*$  周りにおける **relevant 演算子**と呼び、パラメータ  $g_n(t)$  を固定点  $S_*$  周りにおける **relevant パラメータ**と呼びます。

- $\lambda_n < 0$  の場合

この時、パラメータ  $g_n(t) = g_n(0)e^{\lambda_n t}$  は  $t$  が増加するに従って急激に減少してすぐにゼロになります。固有値  $\lambda_n < 0$  に属する固有ベクトル  $\mathcal{O}_n$  を固定点  $S_*$  周りにおける **irrelevant 演算子**と呼び、パラメータ  $g_n(t)$  を固定点  $S_*$  周りにおける **irrelevant パラメータ**と呼びます。

- $\lambda_n = 0$  の場合

この時、パラメータ  $g_n(t) = g_n(0)e^{\lambda_n t}$  は(線型近似の範囲で)  $t$  に依らず初期値  $g_n(0)$  のまま変化しません。固有値  $\lambda_n = 0$  に属する固有ベクトル  $\mathcal{O}_n$  を固定点  $S_*$  周りにおける **marginal 演算子**と呼び、パラメータ  $g_n(t)$  を固定点  $S_*$  周りにおける **marginal パラメータ**と呼びます。

さて、固定点  $S_*$  近傍の理論はパラメータ  $(g_1, g_2, \dots)$  で記述されますが、これは固定点  $S_*$  近傍の理論空間は  $(g_1, g_2, \dots)$  を局所座標系として記述できる事を意味します。この局所座標系を用いると、上の分類から理論空間には2つの特別な部分空間があることが浮かび上がります。1つは relevant パラメータが全てゼロの部分空間で、この部分空間を**臨界面 (critical surface)**と呼びます。臨界面上の理論は繰り込み群変換の下で全て固定点  $S_*$  に収束していきます。もう1つは irrelevant パラメータが全てゼロの部分空間で、この部分空間を **renormalized trajectory** (略して RT)と呼びます。臨界面からずれた理論は繰り込み群変換の下で全て RT に漸近していきます。RT 上の理論は臨界面近傍にあるカットオフ  $\Lambda$  の理論  $S$  の、エネルギースケール  $e^{-t}\Lambda$  以下で同じ相関関数を再現する低エネルギー有効理論を与えます。固定点  $S_*$  近傍の RG flow の模式図を図1.2に示しました。

次に相関長のスケールリング則について述べましょう。まず繰り込み群変換はスケール変換を含んでいたの、理論  $S$  の相関長  $\xi[S]$  と理論  $S_t$  の相関長  $\xi[S_t]$  は一般に次の関係式を満たします:

$$\xi[S] = e^t \xi[S_t] \quad (1.5.26)$$

$t = 0$  での理論を一つ固定した時、 $\xi[S_t] = e^{-t} \xi[S]$  なので一般に  $t$  が増加していくと理論の相関長は単調減少していくことが分かります。次に  $S = S_*$  とすると任意の  $t > 0$  に対して  $S_t = S_*$  なので次の等式が成り立ちます:

$$\xi[S_*] = e^t \xi[S_*], \quad \forall t > 0 \quad (1.5.27)$$

この方程式の解は  $\xi[S_*] = 0$  または  $\xi[S_*] = \infty$  です。相関長がゼロの解は物理的につまらない解なので、今考えている固定点では  $\xi[S_*] = \infty$  だとしましょう。臨界面上の理論は全て繰り込み群変換の下で  $S_*$  に収束していきませんが、一方、相関長は繰り込み群変換の下で一般に単調減少するので、 $\xi[S_*] = \infty$  なら臨界面上の理論は全て相関長無限大の理論を与えることが分かります。即ち、臨界面上の理論は全て臨界面  $T = T_c$  にあります。

次に固定点近傍の理論  $S = S_* + \sum_n g_n \mathcal{O}_n$  を考えましょう。これを繰り込み群変換した理論は  $S_t = S_* + \sum_n g_n e^{\lambda_n t} \mathcal{O}_n$  です。この2つの理論に対して、等式(1.5.27)は次の関数等式を意味します:

$$\xi(g_1, g_2, g_3, \dots) = e^t \xi(g_1 e^{\lambda_1 t}, g_2 e^{\lambda_2 t}, g_3 e^{\lambda_3 t}, \dots) \quad (1.5.28)$$

次に  $\lambda_1$  だけが正で、残りの  $\{\lambda_2, \lambda_3, \dots\}$  は全て負だとしましょう。この時、 $t > 0$  が十分大きいと  $\{g_2 e^{\lambda_2 t}, g_3 e^{\lambda_3 t}, \dots\}$  はほぼゼロになって右辺は  $\{g_2, g_3, \dots\}$  に依らなくなります:

$$\xi(g_1, g_2, g_3, \dots) \sim e^t \xi(g_1 e^{\lambda_1 t}, 0, 0, \dots) \quad \text{for } t \gg 1 \quad (1.5.29)$$

ここで  $t$  は充分大きな任意の実数だったので、この任意性を利用して次の様に選びましょう:

$$t = -\frac{1}{\lambda_1} \log |g_1| \quad (1.5.30)$$

すると、

$$\xi(g_1, g_2, g_3, \dots) \sim |g_1|^{-1/\lambda_1} \xi(\text{sgn}(g_1), 0, 0, \dots) \quad (1.5.31)$$

右辺の  $\xi(\text{sgn}(g_1), 0, 0, \dots)$  は臨界面から外れた RT 上の理論の相関長なので、これはある有限な値です。また上の議論だけでは分かりませんが、 $|g_1|$  というのが実は大体臨界温度からのずれ  $|T - T_c|$  で、従って次を意味します:

$$\xi(T) \sim |T - T_c|^{-1/\lambda_1} \quad (1.5.32)$$

これを式(1.3.6)と比較して  $\nu = 1/\lambda_1$  を得ます。臨界指数  $\nu$  は固定点  $S_*$  周りで線型化された繰り込み群変換  $L_*$  の固有値で決まること分かりました。

最後に相関関数と臨界指数  $\eta$  について述べて終わりにしましょう。臨界指数  $\nu$  は固有値で決まりましたが、 $\eta$  は固定点  $S_*$  での  $\Delta(S_*)$  で決定されます。まず相関関数に対する繰り込み群方程式より、理論  $S$  と  $S_t$  の相関関数の間には一般に次の等式が成り立ちます:

$$\langle \tilde{\phi}(e^{-t} \mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}(e^{-t} \mathbf{p}_n) \rangle_S = \exp \left[ n \int_0^t d\tau (d - \Delta(S_\tau)) \right] \langle \tilde{\phi}(\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}(\mathbf{p}_n) \rangle_{S_t} \quad (1.5.33)$$

特に  $t = 0$  の初期値として  $S = S_*$  を持って来ると、任意の  $t > 0$  に対して  $S_t = S_*$  なので次式が成り立ちます:

$$\langle \tilde{\phi}(e^{-t} \mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}(e^{-t} \mathbf{p}_n) \rangle_{S_*} = e^{n(d - \Delta(S_*))t} \langle \tilde{\phi}(\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}(\mathbf{p}_n) \rangle_{S_*} \quad (1.5.34)$$

2点相関関数の場合はこの方程式が解けます。まず並進対称性より運動量保存が成り立つので2点相関関数は必ず  $\langle \tilde{\phi}(\mathbf{p}_1) \tilde{\phi}(\mathbf{p}_2) \rangle = \tilde{G}^{(2)}(\mathbf{p}_1) (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$  の形を取ります。また回転対称性より  $\tilde{G}^{(2)}$  は運動量の大きさにしか依らず  $\tilde{G}^{(2)} = \tilde{G}^{(2)}(|\mathbf{p}_1|)$  でなければなりません。以上の事とデルタ関数の性質  $\delta^d(e^{-t} \mathbf{p}_1 + e^{-t} \mathbf{p}_2) = e^{dt} \delta^d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$  を踏まえると、繰り込み群方程式は関数  $\tilde{G}^{(2)}$  に対してスケール則  $\tilde{G}^{(2)}(|\mathbf{p}_1|) = e^{(2\Delta(S_*) - d)t} \tilde{G}^{(2)}(e^{-t} |\mathbf{p}_1|)$  を意味します。この解は  $\tilde{G}^{(2)}(|\mathbf{p}_1|) \propto |\mathbf{p}_1|^{2\Delta(S_*) - d}$  なので、結局2点相関関数は次の形を取ります:

$$\langle \tilde{\phi}(\mathbf{p}_1) \tilde{\phi}(\mathbf{p}_2) \rangle_{S_*} \propto |\mathbf{p}_1|^{2\Delta(S_*) - d} (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \quad (1.5.35)$$

これを Fourier 変換すると座標表示の2点相関関数が得られます:

$$\begin{aligned} \langle \phi(\mathbf{x}_1) \phi(\mathbf{x}_2) \rangle_{S_*} &= \int_{|\mathbf{p}_1| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}_1}{(2\pi)^d} \int_{|\mathbf{p}_2| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}_2}{(2\pi)^d} \langle \tilde{\phi}(\mathbf{p}_1) \tilde{\phi}(\mathbf{p}_2) \rangle_{S_*} e^{i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}_2} \\ &\propto \int_{|\mathbf{p}| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} |\mathbf{p}|^{2\Delta(S_*) - d} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \\ &\propto \frac{1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^{2\Delta(S_*)}} \quad \text{for } |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \gg \frac{1}{\Lambda} \end{aligned} \quad (1.5.36)$$

これを式(1.3.5)と比較して  $2\Delta(S_*) = d - 2 + \eta$  となります。  $\Delta(S_*)$  が分かれば臨界指数  $\eta = 2\Delta(S_*) - d + 2$  が求まること分かりました。 ( $\mathbb{Z}_2$  対称性  $\phi \rightarrow -\phi$  がある理論では一般に  $\langle \phi(\mathbf{x}) \rangle = 0$  なので  $\langle \phi(\mathbf{x}_1) \phi(\mathbf{x}_2) \rangle$  は連結2点相関関数と同じです。)

以上、臨界指数  $\eta$  と  $\nu$  が何から決定されるのかを概観しましたが、これは後々具体例で計算していくので今は分からなくても構いません。但し、繰り込み群が如何にして臨界現象の普遍性を説明するのかを認識しておくのは重要です。重要なのは次の4つです:

- 繰り込み群変換と低エネルギー有効理論

繰り込み群変換した理論  $R_t(S) = S_t$  は  $S$  の低エネルギー有効理論です。何を以て低エネルギー有効理論と呼んでいるのかというと、エネルギースケール  $e^{-t} \Lambda$  以下では  $S$  の相関関数は  $S_t$  の相関関数と(定数倍を除いて)一致する、という意味で低エネルギー有効理論です。これは繰り込み群方程式(1.5.14)から従います。

- 臨界面と RT

$S_*$  を  $\xi[S_*] = \infty$  を満たす繰り込み群変換の固定点としましょう。この時、臨界面上の理論は全て相関長無限大の臨界点  $T = T_c$  直上の理論となります。臨界面上の理論は全て繰り込み群変換の下で固定点  $S_*$  に収束し、一方、臨界面から少しだけ離れた理論は全て固定点  $S_*$  から湧き出す RT に漸近します (図1.2参照)。

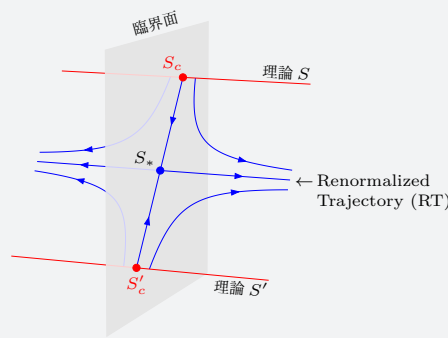


図1.2: 同じ普遍類に属する理論  $S$  と  $S'$  の RG flow の模式図。青色の曲線は RG flow で、赤色の線は理論のパラメータを手で動かしていった時に描く軌跡を表します。臨界面  $T = T_c$  直上にある理論  $S_c$  と  $S'_c$  は繰り込み群変換によって同一の固定点  $S_*$  に収束します。一方、臨界面から少し離れた理論は同一の RT に漸近します。

- $S_*$  は臨界面  $T = T_c$  直上の理論の低エネルギー有効理論

臨界面上の理論  $S$  を考えましょう。この理論のカットオフは  $\Lambda$  です。この時  $t > 0$  が十分大きいならば、エネルギースケール  $e^{-t}\Lambda$  以下の  $S$  の低エネルギー有効理論  $S_t$  は、初期値  $S$  が何であろうがほぼ固定点  $S_*$  の理論で記述できます。「初期値に鈍感」という事が非常に重要です。

- RT は臨界面  $T = T_c$  近傍の理論の低エネルギー有効理論

臨界面から少しだけ離れた理論  $S$  を考えましょう。この理論のカットオフは  $\Lambda$  です。この時  $t > 0$  が十分大きいならば、エネルギースケール  $e^{-t}\Lambda$  以下の  $S$  の低エネルギー有効理論  $S_t$  は、初期値  $S$  が何であろうがほぼ RT 上の理論で記述できます。ここでも「初期値に鈍感」という事が重要です。

要するに、繰り込み群変換の初期値として全く異なる流体の理論  $S$  や強磁性体の理論  $S'$  を持って来ても、それらの臨界面が同じ臨界面上にある限り、低エネルギーでは固定点  $S_*$  (若しくは RT 上の理論) で同じ様に記述できる、という事です。これが臨界現象の普遍性の仕組みです。普遍性とは固定点  $S_*$  を共有することに他ならず、異なる固定点が異なる普遍類を定めているわけです。

## 1.6 摂動論と $\epsilon$ 展開

Wilson の繰り込み群は臨界現象の普遍性に対する強力なシナリオを与えてくれますが、繰り込み群だけでは臨界指数の値は言えません。固有値  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$  や  $\Delta(S_*)$  がどんな値を取るかまでは分からないからです。臨界指数を定量的に求めるには、繰り込み群と摂動論 (perturbation theory) を組み合わせます。この摂動論的繰り込み群が威力を発揮するのは

- 繰り込み群変換の固定点が 2 つ (または 2 つ以上) ある理論で
- 理論に  $\epsilon$  という連続パラメータがあり
- $\epsilon \rightarrow 0$  で 2 つの固定点が 1 つに合体する

という場合です。  $|\epsilon| \ll 1$  なら 2 つの固定点は十分近くにあると見なせます。この  $|\epsilon| \ll 1$  の時、一方の良く分かっている固定点周りの  $\epsilon$  に関する摂動論から、もう一方の良く分かっていない固定点の情報が引き出せて、臨界指数  $\eta$  と  $\nu$  が計算できるわけです。そしてこの連続パラメータ  $\epsilon$  というのが臨界次元 (critical dimension) と呼ばれる空間次元からのずれで、この講義で扱う  $\phi^4$  模型やそれを  $n$  成分ベクトルに拡張した  $O(n)$  線型  $\sigma$  模型では臨界次元は 4、そして  $\epsilon$  は

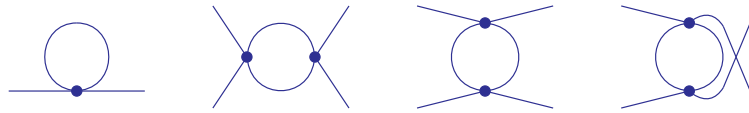
$$\epsilon = 4 - d \quad (1.6.1)$$

で与えられます。この臨界次元からのずれに関する摂動論が  $\epsilon$  展開 ( $\epsilon$ -expansion) です。この講義では Feynman 図を用いた  $\epsilon$  展開をやります。例えば  $O(n)$  線型  $\sigma$  模型で Feynman 図を用いて  $\epsilon^2$  のオーダーまで計算すると、臨界指数  $\eta$  と  $\nu$  は次式で与えられます:

$$\eta = \frac{(n+2)}{2(n+8)^2} \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (1.6.2a)$$

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{(n+2)}{4(n+8)} \epsilon + \frac{(n+2)(n^2 + 23n + 60)}{8(n+8)^3} \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (1.6.2b)$$

これを求めるのがこの講義のゴールです。但し、 $\epsilon^2$  のオーダーまで計算するのは大変なので、この講義では  $\epsilon$  のオーダーまで計算する予定です。これは次の 1 ループ Feynman 図を計算すれば求まります:



このような摂動計算を修得するのもこの講義の目的の1つです。但し、Feynman 図を用いた摂動計算を使いこなすにはかなりの訓練が必要で、経験上初学者には厳しいので、この講義では機械的に行えるキュムラント展開で計算して行きます。

## 参考文献

相図とその部分空間の分類の箇所は少し抽象的に感じたかもしれません。この部分は Nigel Goldenfeld の教科書の第2章3節および James Glimm と Arthur Jaffe の教科書の第2章1節の末尾を参考にしました:

- [1] N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group* (Westview Press, 1992)
- [2] J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics: A Functional Integral Point of View*, 2nd ed. (Springer-Verlag, 1987)

本文では余次元1の部分空間がどうたらこうたらと書きましたが、実用上これらの事を意識することは殆ど無いので、良く分からなかったら取り敢えず無視して構いません。この講義ノートでもこれ以降相図の部分空間の分類について言及することはしません。因みに [1] は有名な臨界現象の教科書で、読んでみて気に入ったらこれで勉強するのも良いと思います。[2] は有名な構成論的場の理論の教科書で、臨界現象の教科書ではありません。(私は参考にしましたが)[2] は数学的すぎるので、数学好きでなければ見ない方が良いでしょう。

## 第 2 章

### 平均場近似

この章では流体と強磁性体の臨界現象を題材に、普遍性とスケーリング則について学びます。

#### 2.1 流体の臨界現象

##### この節のまとめ

- 理想気体の状態方程式を改良した **van der Waals 状態方程式**

$$P = \frac{1}{\beta} \frac{N/V}{1 - bN/V} - a \left( \frac{N}{V} \right)^2$$

は相互作用する流体 (気体または液体) の熱力学的模型の雛形.  $a > 0$  は長距離での 2 粒子間の引力相互作用を表すパラメータで,  $b > 0$  は短距離での 2 粒子間の斥力相互作用を表すパラメータ.  $a$  と  $b$  の値は物質に依る.

- van der Waals 状態方程式で記述される流体は**臨界点**を持つ. 臨界温度  $T_c$ , 臨界圧力  $P_c$ , 臨界体積  $V_c$  は

$$T_c = \frac{8a}{27b^2}, \quad P_c = \frac{a}{27b^2}, \quad V_c = 3Nb$$

変数  $t = T/T_c$ ,  $p = P/P_c$ ,  $v = V/V_c$  を導入すると, van der Waals 状態方程式は次の様に書き換えられる:

$$p = \frac{8}{3} \frac{t}{v - 1/3} - \frac{3}{v^2}$$

この表式はパラメータ  $a$  と  $b$  に依らず, 従って物質に依らない. これを**対応状態の法則**と呼ぶ.

- 体積・粒子数一定の条件の下で, 物質を単位温度上昇させるのに必要な単位体積当たりのエネルギーを**定積比熱**と呼ぶ. また, 温度・粒子数一定の条件の下で, 物質に掛かる圧力を単位圧力上昇させた時の単位体積当たりの体積変化を**等温圧縮率**と呼ぶ. 正準分布及び大正準分布を使うと, 定積比熱  $c_V$  と等温圧縮率  $\kappa_T$  はそれぞれエネルギーと粒子数の揺らぎ (期待値からのずれ) の 2 乗平均で与えられる:

$$c_V = \frac{T}{V} \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V,N} = \beta^2 \frac{\langle (H - \langle H \rangle)^2 \rangle}{V}$$

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T,N} = \frac{\beta}{\rho^2} \frac{\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle}{V}$$

但し,  $S$  はエントロピーで  $\rho$  は粒子数密度.

- 臨界点近傍では一般にエネルギーと粒子数の揺らぎが非常に大きくなり,  $c_V$  と  $\kappa_T$  は次の冪則に従って発散する:

$$c_V \sim |T - T_c|^{-\alpha} \quad \text{as } T \downarrow T_c$$

$$\kappa_T \sim |T - T_c|^{-\gamma} \quad \text{as } T \downarrow T_c$$

冪の指数  $\alpha$  と  $\gamma$  を**臨界指数**と呼ぶ. van der Waals 状態方程式の場合, 臨界指数は

$$\alpha = 0 \quad \text{and} \quad \gamma = 1$$

統計分布	自然な変数	分配関数	熱力学ポテンシャルとその全微分
小正準分布	$(E, V, N)$	状態密度 $\Omega(E, V, N)$	エントロピー $S(E, V, N) = \log \Omega(E, V, N) \delta E$ $TdS = -dE + PdV - \mu dN$
正準分布	$(T, V, N)$	$Z(T, V, N) = \int_0^\infty dE e^{-\beta E} \Omega(E, V, N)$	Helmholtz の自由エネルギー $F(T, V, N) = -\frac{1}{\beta} \log Z(T, V, N)$ $dF = -SdT - PdV + \mu dN$
大正準分布	$(T, V, \mu)$	$\Xi(T, V, \mu) = \sum_{N=0}^\infty e^{\beta \mu N} Z(T, V, N)$	グランドポテンシャル $J(T, V, \mu) = -\frac{1}{\beta} \log \Xi(T, V, \mu) = -PV$ $dJ = -SdT - PdV - Nd\mu$
等温定圧分布	$(T, P, N)$	$\Delta(T, P, N) = \frac{1}{V_0} \int_0^\infty dV e^{-\beta PV} Z(T, V, N)$	Gibbs の自由エネルギー $G(T, P, N) = -\frac{1}{\beta} \log \Delta(T, P, N) = \mu N$ $dG = -SdT + VdP + \mu dN$

表2.1: 代表的な統計分布と分配関数. 分配関数が分かれば熱力学ポテンシャルが分かり, 熱力学ポテンシャルが分かればそれを偏微分することで種々の物理量が得られます.  $V_0$  は体積の次元を持った適当な定数で, 分配関数  $\Delta(T, P, N)$  を無次元にする為に導入しました.

高校物理でも学ぶ様に, 理想気体の状態方程式は  $PV = NT$ , 即ち, \*1

$$P = \frac{1}{\beta} \frac{N}{V} \quad (2.1.1)$$

ですが, 実際の気体は粒子数密度  $N/V$  が小さい領域もしくは高温領域のみでこの状態方程式に漸近するだけで, 実験結果から得られる蒸気圧曲線とは一致しません. 特に臨界点 (critical point) がありません. 臨界点とは大雑把に言って気相と液相の区別がつかなくなり始める点\*2で, この臨界点の存在は 1860 年代に Thomas Andrew によって実験的には分かっていた. この Andrew の実験結果を説明する為に van der Waals は 1870 年代に次の状態方程式を導入しました:

$$P = \frac{1}{\beta} \frac{N/V}{1 - bN/V} - a \left( \frac{N}{V} \right)^2 \quad (2.1.2)$$

ここで,  $a$  と  $b$  は模型のパラメータで, 物質によって異なる値を取ります. 今から見ていく様に, この状態方程式で記述される流体\*3は臨界点を持ちます. この van der Waals 状態方程式を取り敢えず認めて議論を進めて行っても良いのですが, それでは天下りの過ぎるので, 以下では統計力学を用いてこの状態方程式をまず導きましょう. 考えるのは Hamiltonian が次式で与えられる 2 体相互作用のみの  $N$  個の同種粒子系です:\*4

$$H(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{i < j} U(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|) \quad (2.1.3)$$

ここで  $\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i$  は  $i$  番目の粒子の位置と運動量です. また,  $m$  は粒子の質量で,  $U$  は 2 粒子間の距離のみに依存する相互作用ポテンシャルです. 以下, 統計力学の復習も兼ねてこの Hamiltonian を使って  $N$  粒子系を調べて行きましょう. 以下では正準分布と大正準分布を用います. 統計力学を忘れてしまった人は適当な教科書を見るか, 表2.1を見てください.

\*1 高校で学ぶのは  $PV = nRT$  ですが,  $nRT = Nk_B T$  で, この講義では  $k_B = 1$  の単位系を使うので  $nRT = NT$  です.

\*2 この臨界点近傍で観測される現象が臨界蛋白光 (critical opalescence) です. 臨界点近傍では気体・液体の密度揺らぎが大きくなり, 相関長が可視光の波長程度になると光の散乱が可視光の波長全域で起こって, 気体・液体が白く濁って見えます. YouTube で critical opalescence と検索すると動画が沢山出て来るので見てみると良いでしょう. 臨界蛋白光の理論としては 1910 年代の Ornstein-Zernike 理論が有名です.

\*3 気体または液体を総称して流体 (fluid) と呼びます.

\*4 記号  $\sum_{i < j}$  は条件  $i < j$  の下で  $i$  と  $j$  を 1 から  $N$  まで足せ, という和の記号で, より明確に書くと下のようになります:

$$\sum_{i < j} U(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|) = \sum_{j=2}^N \sum_{i=1}^{j-1} U(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|)$$

## 2.1.1 正準分布と大正準分布

まず正準分布と大正準分布の復習から始めましょう。これらを使うと、定積比熱  $c_V$  及び等温圧縮率  $\kappa_T$  はそれぞれエネルギー及び粒子数の揺らぎの2乗平均に比例することが分かります:

$$c_V \propto \frac{\langle (H - \langle H \rangle)^2 \rangle}{V} \quad \text{and} \quad \kappa_T \propto \frac{\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle}{V} \quad (2.1.4)$$

この結果はとても重要で、第3章から導入する場の理論を用いると、これらは連結2点相関関数と呼ばれる量の空間積分で書ける事が分かります。そして2点相関関数が臨界点近傍でスケールリング則に従い、そのスケールリング則から臨界現象の普遍性及び臨界指数の定量的予言が出来る、という仕組みになっています。

## 正準分布の復習

温度  $T$  の熱浴に接した体積  $V$  の容器中の  $N$  個の同種粒子を考えます。粒子に適当に番号を振って  $i$  番目の粒子の位置と運動量を  $\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i$  としましょう。この系の Hamiltonian が  $H(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$  と与えられた時、分配関数は

$$Z(T, V, N) = \left[ \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^N \iint_V \frac{d^d \mathbf{p}_i d^d \mathbf{q}_i}{(2\pi\hbar)^d} \right] e^{-\beta H(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)} \quad (2.1.5)$$

但し、 $d$  は空間次元です。分配関数  $Z$  が分かると、Helmholtz の自由エネルギーは  $Z$  の対数を取ることで得られます:

$$F(T, V, N) = -\frac{1}{\beta} \log Z(T, V, N) \quad (2.1.6)$$

そして Helmholtz の自由エネルギー  $F$  が分かると、この系のエントロピー  $S$ 、圧力  $P$ 、化学ポテンシャル  $\mu$  は  $F$  を偏微分することで得られます:

$$S(T, V, N) = -\frac{\partial F(T, V, N)}{\partial T} \quad (2.1.7a)$$

$$P(T, V, N) = -\frac{\partial F(T, V, N)}{\partial V} \quad (2.1.7b)$$

$$\mu(T, V, N) = \frac{\partial F(T, V, N)}{\partial N} \quad (2.1.7c)$$

さて、体積  $V$  一定かつ粒子数  $N$  一定の条件下、系の温度を単位温度上昇させるのに必要な単位体積当たりのエネルギーを定積比熱  $c_V$  と呼びます。定積比熱は温度変化に対する系の応答を表す量で、応答関数と呼ばれるものの一つです。熱力学で学んだ様に  $c_V$  はエントロピーの温度微分で与えられます:

$$\begin{aligned} c_V &= \frac{T}{V} \frac{\partial S(T, V, N)}{\partial T} \\ &= -\frac{T}{V} \frac{\partial^2 F(T, V, N)}{\partial T^2} \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

統計力学を用いると、この定積比熱はエネルギーの揺らぎの2乗平均で与えられる事が分かります。これを見る為に、まず  $T$  微分は  $\frac{\partial}{\partial T} = \frac{d\beta}{dT} \frac{\partial}{\partial \beta} = -\frac{1}{T^2} \frac{\partial}{\partial \beta} = -\beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta}$  と  $\beta$  微分で書ける事に注意しましょう。これと式(2.1.6)を合わせて少し計算すると、定積比熱(2.1.8)は次の様に分配関数で書き表される事が分かります:

$$\begin{aligned} c_V &= \frac{\beta^2}{V} \frac{\partial^2 \log Z(T, V, N)}{\partial \beta^2} \\ &= \frac{\beta^2}{V} \left[ \frac{1}{Z(T, V, N)} \frac{\partial^2 Z(T, V, N)}{\partial \beta^2} - \left( \frac{1}{Z(T, V, N)} \frac{\partial Z(T, V, N)}{\partial \beta} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

ここで Hamiltonian の  $n$  乗の期待値  $\langle H^n \rangle$  は次の様に書ける事に注意しましょう:

$$\begin{aligned} \langle H^n \rangle &:= \frac{1}{Z(T, V, N)} \left[ \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^N \iint_V \frac{d^d \mathbf{p}_i d^d \mathbf{q}_i}{(2\pi\hbar)^d} \right] H^n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{q}_N) e^{-\beta H(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{q}_N)} \\ &= \frac{(-1)^n}{Z(T, V, N)} \frac{\partial^n Z(T, V, N)}{\partial \beta^n} \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

実際、式(2.1.5)を使って最右辺の  $n$  階  $\beta$  微分を実行すると、真ん中の表式になります。これの  $n = 1, 2$  の場合を使うと、予告通り定積比熱  $c_V$  は Hamiltonian(エネルギー)の揺らぎの2乗平均で書き表される事が分かります:\*5

$$\begin{aligned} c_V &= \beta^2 \frac{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2}{V} \\ &= \beta^2 \frac{\langle (H - \langle H \rangle)^2 \rangle}{V} \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

### 大正準分布の復習

次は大正準分布を考えましょう。温度  $T$ 、化学ポテンシャル  $\mu$  の熱浴・粒子浴に接した体積  $V$  の同種粒子系を考えます。この系の分配関数  $\Xi$  は分配関数  $Z$  を用いて次の様に与えられます:

$$\Xi(T, V, \mu) = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} Z(T, V, N) \quad (2.1.12)$$

この大分配関数が出ると、グランドポテンシャルは大分配関数の対数を取ることで得られます:

$$J(T, V, \mu) = -\frac{1}{\beta} \log \Xi(T, V, \mu) \quad (2.1.13)$$

そしてグランドポテンシャルが出ると、この系のエントロピー  $S$ 、圧力  $P$ 、粒子数  $N$  は  $J$  を偏微分する事で得られます:

$$S(T, V, \mu) = -\frac{\partial J(T, V, \mu)}{\partial T} \quad (2.1.14a)$$

$$P(T, \mu) = -\frac{\partial J(T, V, \mu)}{\partial V} \quad (2.1.14b)$$

$$N(T, V, \mu) = -\frac{\partial J(T, V, \mu)}{\partial \mu} \quad (2.1.14c)$$

圧力  $P$  は変数  $(T, V, \mu)$  の関数として表した時、 $V$  には依存しない事に注意しましょう。これは圧力  $P$  は示強変数なので、変数  $(T, V, \mu)$  の中で唯一の示量変数  $V$  には依存し得ない\*6からです。一方、グランドポテンシャルは示量性を示すので、ある  $T$  と  $\mu$  だけの関数  $j(T, \mu)$  が存在して  $J(T, V, \mu) = j(T, \mu)V$  と書けねばなりません。これを式(2.1.14b)に代入すると  $P(T, \mu) = -j(T, \mu)$  となるので、結局グランドポテンシャルは一般に次の形を取ります:

$$J(T, V, \mu) = -P(T, \mu)V \quad (2.1.15)$$

同様にエントロピー  $S$  と粒子数  $N$  も示量変数なので、変数  $(T, V, \mu)$  の関数として表した時、ある  $T$  と  $\mu$  だけの関数  $s(T, \mu)$  と  $\rho(T, \mu)$  が存在して次の様に書けねばなりません:

$$S(T, V, \mu) = s(T, \mu)V \quad (2.1.16a)$$

$$N(T, V, \mu) = \rho(T, \mu)V \quad (2.1.16b)$$

この  $s(T, \mu)$  と  $\rho(T, \mu)$  は物理的にはエントロピー密度と粒子数密度です。これらを用いると、式(2.1.14a)と(2.1.14b)は次の様になります:

$$s(T, \mu) = \frac{\partial P(T, \mu)}{\partial T} \quad (2.1.17a)$$

$$\rho(T, \mu) = \frac{\partial P(T, \mu)}{\partial \mu} \quad (2.1.17b)$$

さて、温度  $T$  一定かつ粒子数  $N$  一定の条件下、系の圧力が単位圧力上昇した時の単位体積当たりの体積変化を等温圧縮率  $\kappa_T$  と呼びます。等温圧縮率は圧力変化に対する系の応答を表す量で、定積比熱同様、応答関数の一つです。式で書くと次の様になります:

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T, N} \quad (2.1.18)$$

\*5 式(2.1.11)の2番目の等号は  $\langle (H - \langle H \rangle)^2 \rangle = \langle H^2 - 2H\langle H \rangle + \langle H \rangle^2 \rangle = \langle H^2 \rangle - 2\langle H \rangle \langle H \rangle + \langle H \rangle^2 = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2$  から従います。

\*6 ある量  $f(T, V, \mu)$  が任意の  $\lambda > 0$  に対して  $f(T, \lambda V, \mu) = f(T, V, \mu)$  を満たす時、 $f$  を示強変数と呼びます。この時、 $\lambda$  の任意性を利用して  $\lambda = 1/V$  と選ぶと、 $f(T, V, \mu) = f(T, 1, \mu)$  となり右辺は最早  $V$  に依存しないので、そもそも  $f$  は  $V$  には依存していなかった事が分かります。一方、任意の  $\lambda > 0$  に対して  $f(T, \lambda V, \mu) = \lambda f(T, V, \mu)$  を満たす時、 $f$  を示量変数と呼びます。この時、 $\lambda$  の任意性を利用して  $\lambda = 1/V$  と選ぶと、 $f(T, V, \mu) = V f(T, 1, \mu)$  となるので、ある  $T$  と  $\mu$  だけの関数  $g(T, \mu)$  が存在して  $f(T, V, \mu) = g(T, \mu)V$  と書けねばならない事が分かります。示強変数・示量変数のこの辺の議論は適当な熱力学・統計力学の教科書を見てください。



ここで全体に掛かる負号は  $\kappa_T$  を正の量<sup>\*7</sup>にする為に入れてあります。体積  $V$  の代わりに粒子数密度  $\rho = N/V$  を用いると、粒子数  $N$  一定の条件の下で  $-V \frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{\rho}{N} \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{N}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P}$  となるので、等温圧縮率は次の様にも書けます：

$$\kappa_T = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \quad (2.1.19)$$

この  $\kappa_T$  が実は粒子数の期待値からのずれの 2 乗平均  $\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle$  に比例するのですが、これを示すには少しトリッキーな計算をしないと行けません。まず大正準分布では粒子数  $N$  の  $n$  乗の期待値は次式で与えられます：

$$\begin{aligned} \langle N^n \rangle &:= \frac{1}{\Xi(T, V, \mu)} \sum_{N=0}^{\infty} N^n e^{\beta \mu N} Z(T, V, N) \\ &= \frac{1}{\beta^n} \frac{1}{\Xi(T, V, \mu)} \frac{\partial^n \Xi(T, V, \mu)}{\partial \mu^n} \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

特に  $n = 1$  の場合、 $\langle N \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \Xi}{\partial \mu} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \log \Xi}{\partial \mu}$  は式(2.1.14c)の  $N(T, V, \mu)$  と一致する事に注意しましょう。式(2.1.20)より粒子数の期待値からのずれの 2 乗平均  $\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$  は次の様に書けることが分かります：

$$\begin{aligned} \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 &= \frac{1}{\beta^2} \left[ \frac{1}{\Xi(T, V, \mu)} \frac{\partial^2 \Xi(T, V, \mu)}{\partial \mu^2} - \left( \frac{1}{\Xi(T, V, \mu)} \frac{\partial \Xi(T, V, \mu)}{\partial \mu} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \log \Xi(T, V, \mu)}{\partial \mu^2} \\ &= -\frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 J(T, V, \mu)}{\partial \mu^2} \\ &= \frac{V}{\beta} \frac{\partial^2 P(T, \mu)}{\partial \mu^2} \\ &= \frac{V}{\beta} \frac{\partial \rho(T, \mu)}{\partial \mu} \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

ここで、2 番目の等号は単純計算から従い、3 番目の等号は式(2.1.13)から、4 番目の等号は式(2.1.15)から、そして最後の等号は式(2.1.17b)から従います。

さて、大正準分布では粒子数密度  $\rho$  は温度  $T$  と化学ポテンシャル  $\mu$  の関数  $\rho(T, \mu)$  として与えられる訳ですが、これを温度  $T$  と圧力  $P$  の関数として書き表すことを考えましょう。まず、圧力  $P$  は  $T$  と  $\mu$  の関数  $P(T, \mu)$  として与えられますが、この関数  $P(T, \mu)$  が与えられた時、方程式  $P = P(T, \mu)$  を立ててこれを  $\mu$  について解く事で化学ポテンシャルを  $T$  と  $P$  の関数  $\mu(T, P)$  として表します：<sup>\*8</sup>

$$P = P(T, \mu) \xrightarrow{\mu \text{ について解く}} \mu = \mu(T, P) \quad (2.1.22)$$

こうやって  $T$  と  $P$  の関数として表した化学ポテンシャル  $\mu(T, P)$  を変数とする粒子数密度  $\rho(T, \mu(T, P))$  を、同じ記号を使って  $\rho(T, P) \equiv \rho(T, \mu(T, P))$  と書くことにしましょう。この時、 $\rho(T, P)$  の  $\mu$  依存性は  $P = P(T, \mu)$  を通して陰に含まれるのみです。従って、 $\rho(T, P(T, \mu))$  の  $\mu$  微分はチェインルールより次の様になります：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(T, P(T, \mu))}{\partial \mu} &= \frac{\partial \rho(T, P(T, \mu))}{\partial P} \frac{\partial P(T, \mu)}{\partial \mu} \\ &= \rho^2(T, P(T, \mu)) \kappa_T \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

但し、最後の等号は式(2.1.17b)と(2.1.19)から従います。式(2.1.21)と(2.1.23)を合わせることで、予告通り等温圧縮率  $\kappa_T$  は粒子数の揺らぎの 2 乗平均で書き表されることが分かりました：

$$\begin{aligned} \kappa_T &= \frac{\beta}{\rho^2} \frac{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}{V} \\ &= \frac{\beta}{\rho^2} \frac{\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle}{V} \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

この最後の表式から明らかですが、等温圧縮率  $\kappa_T$  は正定値である事に注意しましょう。

<sup>\*7</sup> 直感的に明らかな様に、印加する圧力を増やすと体積は減少するので熱力学的に安定な系では必ず  $(\frac{\partial V}{\partial P})_{T, N} \leq 0$  になります。

<sup>\*8</sup> 変数を  $(T, \mu)$  から  $(T, P)$  へ変える操作は、理想気体の場合に式(2.1.34)の所で具体的に行います。

### 2.1.2 理想気体

我々が最終的に調べたいのは  $N$  粒子 Hamiltonian が式(2.1.3)で表される相互作用系ですが, 復習も兼ねてまずは粒子間の相互作用ポテンシャルがゼロの自由粒子系 (理想気体) を調べましょう. この系の Hamiltonian は

$$H(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} \quad (2.1.25)$$

です. この自由粒子の系を正準分布と大正準分布で調べて行きます.

#### 正準分布の場合

まず分配関数を計算しましょう. Hamiltonian(2.1.25)を式(2.1.5)に代入して計算すると次の様になります:

$$\begin{aligned} Z_{\text{ideal}}(T, V, N) &= \left[ \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^N \iint_V \frac{d^d \mathbf{p}_i d^d \mathbf{q}_i}{(2\pi\hbar)^d} \right] \exp \left( -\beta \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} \right) \\ &= \frac{1}{N!} \left[ \prod_{i=1}^N \left( \int \frac{d^d \mathbf{p}_i}{(2\pi\hbar)^d} e^{-\frac{\beta}{2m} \mathbf{p}_i^2} \right) \right] \left[ \prod_{i=1}^N \int_V d^d \mathbf{q}_i \right] \\ &= \frac{1}{N!} \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{dN/2} V^N \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

Helmholtz の自由エネルギーは分配関数の対数を取れば得られます.\*9

$$\begin{aligned} F_{\text{ideal}}(T, V, N) &= -\frac{1}{\beta} \log Z_{\text{ideal}}(T, V, N) \\ &= \frac{1}{\beta} \left\{ \log N! - N \log \left[ \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{d/2} V \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

これを  $T, V, N$  で偏微分することでエントロピー  $S$ , 圧力  $P$ , 化学ポテンシャル  $\mu$  が求まります. 例えば圧力を計算すると

$$\begin{aligned} P(T, V, N) &= -\frac{\partial F_{\text{ideal}}(T, V, N)}{\partial V} \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{N}{V} \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

となります. これは理想気体の状態方程式(2.1.1)に他なりません. 一方, 定積比熱  $c_V$  は次の様に計算されます:

$$\begin{aligned} c_V &= \frac{\beta^2}{V} \frac{\partial^2 \log Z_{\text{ideal}}(T, V, N)}{\partial \beta^2} \\ &= \frac{\beta^2}{V} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log \left[ \frac{1}{N!} \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{dN/2} V^N \right] \\ &= \frac{\beta^2}{V} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left( -\frac{dN}{2} \log \beta \right) \\ &= \frac{d}{2} \frac{N}{V} \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

自由粒子の場合は  $c_V = \frac{1}{2} \times (\text{空間次元 } d) \times (\text{粒子数密度})$  という非常にシンプルな形を取ることが分かります. この自由粒子の場合, 定積比熱は温度には依存しない只の定数であることに注意しましょう.

\*9 熱力学極限での表式も求めておきましょう. まず,  $N \gg 1$  に対する Stirling の公式  $\log N! = N \log N - N + O(\log N)$  を使うと, 式(2.1.27)は

$$F_{\text{ideal}}(T, V, N) = -\frac{1}{\beta} \left\{ N + N \log \left[ \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{d/2} \frac{V}{N} \right] + O(\log N) \right\} \quad \text{for } N \gg 1$$

となります. 従って, 粒子数密度  $\rho = N/V$  を固定したまま熱力学極限  $V \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$  を取ると, 単位体積当たりの Helmholtz の自由エネルギー  $f_{\text{ideal}}(T, \rho)$  は次の様になります:

$$\begin{aligned} f_{\text{ideal}}(T, \rho) &:= \lim_{\substack{V \rightarrow \infty \\ \rho = N/V: \text{固定}}} \frac{F_{\text{ideal}}(T, V, N)}{V} \\ &= -\frac{\rho}{\beta} \left\{ 1 + \log \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{d/2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (i)$$

## 大正準分布の場合

次に大正準分布を使って自由粒子系を調べましょう。まず大分配関数は分配関数(2.1.26)を使って次の様に求まります:

$$\begin{aligned}\Xi_{\text{ideal}}(T, V, \mu) &= \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} Z_{\text{ideal}}(T, V, N) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left[ \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{d/2} V e^{\beta\mu} \right]^N \\ &= \exp \left[ \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{d/2} V e^{\beta\mu} \right]\end{aligned}\quad (2.1.30)$$

グランドポテンシャルはこれの対数を取れば得られます:

$$\begin{aligned}J_{\text{ideal}}(T, V, \mu) &= -\frac{1}{\beta} \log \Xi_{\text{ideal}}(T, V, \mu) \\ &= -\frac{1}{\beta} \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{d/2} V e^{\beta\mu}\end{aligned}\quad (2.1.31)$$

式(2.1.15)の所で述べたように、グランドポテンシャルの体積依存性は確かに  $V$  に比例するだけであることに注意しましょう。このグランドポテンシャルを  $T, V, \mu$  で偏微分することでエントロピー  $S$ , 圧力  $P$ , 粒子数  $N$  が求まります。例えば圧力を計算すると

$$\begin{aligned}P(T, \mu) &= -\frac{\partial J_{\text{ideal}}(T, V, \mu)}{\partial V} \\ &= -\frac{J_{\text{ideal}}(T, V, \mu)}{V} \\ &= \frac{1}{\beta} \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{d/2} e^{\beta\mu}\end{aligned}\quad (2.1.32)$$

となります。圧力  $P(T, \mu)$  が分かったので、式(2.1.17a), (2.1.17b)に従ってこれを  $T, \mu$  で偏微分するとエントロピー密度  $s$ , 粒子数密度  $\rho$  が求まります。例えば粒子数密度は次の様になります:

$$\begin{aligned}\rho(T, \mu) &= -\frac{\partial P(T, \mu)}{\partial \mu} \\ &= \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{d/2} e^{\beta\mu}\end{aligned}\quad (2.1.33)$$

さて、式(2.1.22)の所で述べたように、 $P = P(T, \mu)$  を  $\mu$  について解いて化学ポテンシャルを  $T$  と  $P$  の関数  $\mu(T, P)$  として表してみよう。これは式(2.1.32)を  $\mu$  について解くだけで良く、答えは

$$\mu(T, P) = \frac{1}{\beta} \log \left[ \beta \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{-d/2} P \right]\quad (2.1.34)$$

となります。これを式(2.1.33)に代入することで、粒子数密度を  $T$  と  $P$  の関数  $\rho(T, P) \equiv \rho(T, \mu(T, P))$  として表せます:

$$\rho(T, P) = \beta P\quad (2.1.35)$$

これは理想気体の状態方程式  $P = \frac{1}{\beta} \rho$  に他ならない事に注意しましょう。  $\rho(T, P)$  が分かったのでこれを  $P$  で偏微分することで等温圧縮率は次の様に求まります:

$$\begin{aligned}\kappa_T &= \frac{1}{\rho(T, P)} \frac{\partial \rho(T, P)}{\partial P} \\ &= \frac{\beta}{\rho(T, P)} \\ &= \frac{1}{P}\end{aligned}\quad (2.1.36)$$

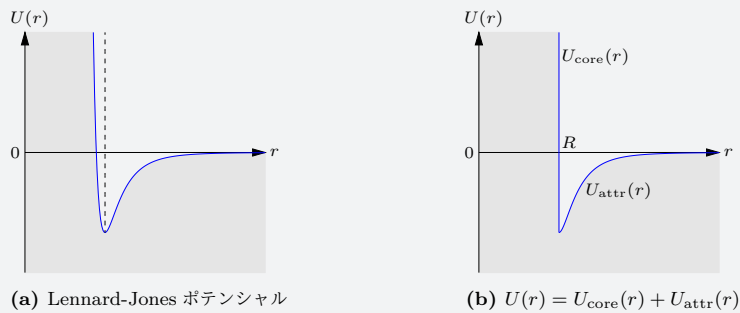


図2.1: 2体相互作用ポテンシャル.  $r$  は2粒子間の距離を表します. (a) は Lennard-Jones ポテンシャル(2.1.38)で, (b) は斥力部分をハードコア(2.1.40a)に置き換えたものです.

### 2.1.3 平均場近似

さて, いよいよ本題の相互作用する粒子系の話に移りましょう. まず正準分布から始めます. Hamiltonian が式(2.1.3)で与えられる  $N$  粒子系の分配関数は次の積分で与えられます:

$$\begin{aligned}
 Z(T, V, N) &= \left[ \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^N \iint_V \frac{d^d \mathbf{p}_i d^d \mathbf{q}_i}{(2\pi\hbar)^d} \right] \exp \left( -\beta \left[ \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{i<j} U(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|) \right] \right) \\
 &= \frac{1}{N!} \left[ \prod_{i=1}^N \left( \int \frac{d^d \mathbf{p}_i}{(2\pi\hbar)^d} e^{-\frac{\beta}{2m} \mathbf{p}_i^2} \right) \right] \left[ \prod_{i=1}^N \int_V d^d \mathbf{q}_i \right] e^{-\beta \sum_{i<j} U(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|)} \\
 &= \frac{Z_{\text{ideal}}(T, V, N)}{V^N} \int_V d^d \mathbf{q}_1 \cdots \int_V d^d \mathbf{q}_N \exp \left( -\beta \sum_{i<j} U(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|) \right) \quad (2.1.37)
 \end{aligned}$$

但し, 3行目で運動量積分を実行しました. 運動量積分の部分は理想気体の場合の分配関数(2.1.26)を  $V^N$  で割ったものになります. 一方, 最後の座標積分は勿論  $U$  を具体的に指定しないと計算できません. しかし問題は  $U$  を具体的に指定した所でこの積分を実行するのは一般に非常に困難である, という所にあります. 普通は何かしらの近似計算で最後の積分を評価して行くのですが, 以下では代表的な近似法である平均場近似 (mean field approximation) を用いて計算していきましょう. 今考えている粒子系に於いては, 平均場近似は次の3つの近似から成ります:

- 近似その1: 粒子間の斥力相互作用をハードコア斥力で置き換える

これまで粒子間相互作用について全く述べてきませんでした, 相互作用としては, 短距離では斥力が働いて粒子が互いに凝縮しない様になっており, 逆に長距離では引力が働いて粒子が互いに離れ過ぎない様になっているものを考えます. その様な相互作用ポテンシャルの代表例として Lennard-Jones ポテンシャルがあります (図2.1a参照):

$$U(r) = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6} \quad (A, B: \text{正の定数}) \quad (2.1.38)$$

但し, 以下ではこれは使いません. 式(2.1.38)の様な相互作用ポテンシャルの斥力部分をハードコア斥力 (半径  $R$  の剛体球) に置き換えてもっと簡単化します (図2.1b参照). 具体的には次の相互作用ポテンシャルを使います:

$$U(r) = U_{\text{core}}(r) + U_{\text{attr}}(r) \quad (2.1.39)$$

ここで  $U_{\text{core}}(r)$  はハードコア斥力ポテンシャル,  $U_{\text{attr}}(r)$  は引力ポテンシャルで次の性質を満たします:

$$U_{\text{core}}(r) = \begin{cases} +\infty & \text{for } r < R \\ 0 & \text{for } r > R \end{cases} \quad (2.1.40a)$$

$$U_{\text{attr}}(r) = \begin{cases} 0 & \text{for } r < R \\ \text{非正で無限遠で充分早くゼロに収束する関数} & \text{for } r > R \end{cases} \quad (2.1.40b)$$

以下では  $U_{\text{attr}}(r)$  の  $r > R$  での関数形は特に指定しません. この  $U(r)$  を用いると, 式(2.1.37)の被積分関数は

$$\exp \left( -\beta \sum_{i<j} U(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|) \right) = \exp \left( -\beta \sum_{i<j} U_{\text{core}}(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|) \right) \exp \left( -\beta \sum_{i<j} U_{\text{attr}}(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \prod_{i<j} e^{-\beta U_{\text{core}}(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|)} \right] \exp \left( -\beta \sum_{i<j} U_{\text{attr}}(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|) \right) \\
&= \left[ \prod_{i<j} \theta\left(\frac{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|}{R}\right) \right] \exp \left( -\beta \sum_{i<j} U_{\text{attr}}(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|) \right)
\end{aligned} \tag{2.1.41}$$

となります。ここで  $\theta(x)$  は階段関数で、最後の等号は(2.1.40a)から従う次の等式によります:

$$e^{-\beta U_{\text{core}}(r)} = \theta\left(\frac{r}{R}\right) = \begin{cases} 0 & \text{for } r < R \\ 1 & \text{for } r > R \end{cases} \tag{2.1.42}$$

• 近似その 2: 粒子数密度を平均粒子数密度で置き換える

次に式(2.1.41)最右辺に現れた引力ポテンシャルの和  $\sum_{i<j} U_{\text{attr}}(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|)$  を近似していきます。まずこの和は次の様に積分で書ける事に注意します:

$$\begin{aligned}
\sum_{i<j} U_{\text{attr}}(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N U_{\text{attr}}(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_V d^d \mathbf{q} \int_V d^d \mathbf{q}' \delta^d(\mathbf{q} - \mathbf{q}_i) \delta^d(\mathbf{q}' - \mathbf{q}_j) U_{\text{attr}}(|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|) \\
&= \frac{1}{2} \int_V d^d \mathbf{q} \int_V d^d \mathbf{q}' \rho(\mathbf{q}) \rho(\mathbf{q}') U_{\text{attr}}(|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|)
\end{aligned} \tag{2.1.43}$$

但し、最初の等号で  $U_{\text{attr}}(0) = 0$  を使いました。また、和  $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N$  は同じもの  $U_{\text{attr}}(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|) = U_{\text{attr}}(|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i|)$  を 2 回足しているので全体に 1/2 を掛けています。2 番目の等号はデルタ関数の積分を実行すると 1 行目に一致することから分かります。最後の等号で現れた  $\rho(\mathbf{q})$  は位置  $\mathbf{q}$  における粒子数密度で、次式で定義されます:

$$\rho(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^N \delta^d(\mathbf{q} - \mathbf{q}_i) \tag{2.1.44}$$

ここまではデルタ関数の積分のトリックを使って和を書き換えただけで、何も近似はしていません。次が重要な近似 (と言うか置き換え) で、積分(2.1.43)に現れた粒子数密度  $\rho(\mathbf{q})$  を平均の粒子数密度  $N/V$  に置き換えます:

$$\rho(\mathbf{q}) \rightarrow \frac{N}{V} \tag{2.1.45}$$

この大胆な置き換えの下で和  $\sum_{i<j} U_{\text{attr}}(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|)$  は次の様に置き換えられます:

$$\sum_{i<j} U_{\text{attr}}(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|) \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{N}{V}\right)^2 \int_V d^d \mathbf{q} \int_V d^d \mathbf{q}' U_{\text{attr}}(|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|) \tag{2.1.46}$$

この右辺の積分は最早粒子の座標  $\mathbf{q}_i$  には依存しない只の定数です。従ってこの定数を  $-2aV$  と書きましょう:

$$\int_V d^d \mathbf{q} \int_V d^d \mathbf{q}' U_{\text{attr}}(|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|) = -2aV \tag{2.1.47}$$

この  $-2aV$  の物理的意味ですが、おおよそ  $-2a$  が引力ポテンシャル  $U_{\text{attr}}$  の空間積分  $\int_V d^d \mathbf{q} U_{\text{attr}}(|\mathbf{q}|)$  に対応し、 $V$  が残りの体積積分  $\int_V d^d \mathbf{q}'$  に対応します。  $a > 0$  は正の量で、2 粒子間の長距離での引力相互作用を表すパラメータの役割を果たします。以上の結果(2.1.41), (2.1.46), (2.1.47)をまとめると、分配関数(2.1.37)に現れる空間積分は次の様に置き換えられます:

$$\begin{aligned}
\int_V d^d \mathbf{q}_1 \cdots \int_V d^d \mathbf{q}_N \exp \left( -\beta \sum_{i<j} U(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|) \right) &\rightarrow \int_V d^d \mathbf{q}_1 \cdots \int_V d^d \mathbf{q}_N \left[ \prod_{i<j} \theta\left(\frac{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|}{R}\right) \right] e^{-\beta \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{N}{V}\right)^2 (-2aV)} \\
&= e^{\frac{\beta a N^2}{V}} \int_V d^d \mathbf{q}_1 \cdots \int_V d^d \mathbf{q}_N \prod_{i<j} \theta\left(\frac{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|}{R}\right)
\end{aligned} \tag{2.1.48}$$

- 近似その3: 体積積分の近似

式(2.1.48)には階段関数を含んだ体積積分が残っていますが、これがまた難しい積分で、厳密に計算するのは困難です。但し直感的にはハードコア斥力(2.1.40a)の為に1つの粒子には半径  $R$  以上近づけないので、 $b$  を半径  $R$  の  $d$  次元球の体積とした時、1つの体積積分  $\int_V d^d \mathbf{q}_i$  の寄与は (粒子数密度  $N/V$  が小さければ) 大体  $V - Nb$  になるだろうと期待出来ます。この素朴な期待の下、体積積分を次の様に置き換えます:

$$\int_V d^d \mathbf{q}_1 \cdots \int_V d^d \mathbf{q}_N \prod_{i < j} \theta\left(\frac{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|}{R}\right) \rightarrow (V - Nb)^N \quad (2.1.49)$$

粒子間の斥力相互作用によって  $V^N$  が実効的に  $(V - Nb)^N$  に減少する事を排除体積効果と呼びます。  $b > 0$  は模型のパラメータで、2粒子間の短距離での斥力相互作用を表すパラメータの役割を果たします。

以上がこの  $N$  粒子系での平均場近似で、式(2.1.48)と(2.1.49)を分配関数(2.1.37)に代入すると平均場近似での分配関数  $Z_{\text{mean}}$  が得られます:

$$\begin{aligned} Z_{\text{mean}}(T, V, N) &= \frac{Z_{\text{ideal}}(T, V, N)}{V^N} \exp\left(\frac{\beta a N^2}{V}\right) (V - Nb)^N \\ &= Z_{\text{ideal}}(T, V, N) \left(1 - \frac{bN}{V}\right)^N \exp\left(\frac{\beta a N^2}{V}\right) \end{aligned} \quad (2.1.50)$$

分配関数があったので、Helmholtz の自由エネルギーは式(2.1.50)の対数を取れば得られます:<sup>\*10</sup>

$$\begin{aligned} F_{\text{mean}}(T, V, N) &= -\frac{1}{\beta} \log Z_{\text{mean}}(T, V, N) \\ &= F_{\text{ideal}}(T, V, N) - \frac{N}{\beta} \log\left(1 - \frac{bN}{V}\right) - \frac{aN^2}{V} \end{aligned} \quad (2.1.51)$$

但し、 $F_{\text{ideal}}$  は式(2.1.27)で与えられる理想気体の Helmholtz の自由エネルギーです。平均場近似での Helmholtz の自由エネルギーが分かったので、圧力は式(2.1.51)を  $V$  で偏微分すれば得られます:

$$\begin{aligned} P(T, V, N) &= -\frac{\partial F_{\text{mean}}(T, V, N)}{\partial V} \\ &= -\frac{\partial F_{\text{ideal}}(T, V, N)}{\partial V} + \frac{1}{\beta} \frac{bN^2/V^2}{1 - bN/V} - \frac{aN^2}{V^2} \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{N}{V} + \frac{1}{\beta} \frac{bN^2/V^2}{1 - bN/V} - a \left(\frac{N}{V}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{N/V}{1 - bN/V} - a \left(\frac{N}{V}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.1.52)$$

但し、3行目で式(2.1.28)を使いました。これより次の  $P, T, V, N$  の間の関係式(状態方程式)を得ます:

$$P = \frac{1}{\beta} \frac{N/V}{1 - bN/V} - a \left(\frac{N}{V}\right)^2 \quad (2.1.53)$$

これが **van der Waals** 状態方程式で、1870年代前半に当時博士課程の学生だった Johannes Diderik van der Waals によって現象論的に導入されました。以下、この van der Waals 状態方程式で記述される流体の性質を列挙しましょう:

- 臨界点 (critical point)

温度  $T$ , 粒子数  $N$  を固定して  $(P, V)$  曲線を描いてみれば分かりますが、van der Waals 状態方程式で記述される流体はある温度以下では

$$\frac{\partial P}{\partial V} > 0 \quad (2.1.54)$$

<sup>\*10</sup> 粒子数密度  $\rho = N/V$  を固定して熱力学極限  $V, N \rightarrow \infty$  を取ると、単位体積当たりの Helmholtz の自由エネルギー  $f_{\text{mean}}(T, \rho)$  は

$$\begin{aligned} f_{\text{mean}}(T, \rho) &:= \lim_{\substack{V \rightarrow \infty \\ \rho = N/V: \text{固定}}} \frac{F_{\text{mean}}(T, V, N)}{V} \\ &= f_{\text{ideal}}(T, \rho) - \frac{\rho}{\beta} \log(1 - b\rho) - a\rho^2 \\ &= -\frac{\rho}{\beta} \left\{ 1 + \log \left[ \frac{1 - b\rho}{\rho} \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{d/2} \right] \right\} - a\rho^2 \end{aligned} \quad (\text{ii})$$

となります。但し、2番目の等号で式(i)を使いました。

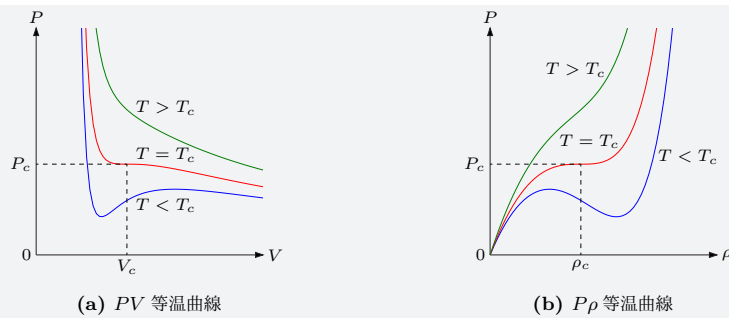


図2.2: van der Waals 状態方程式から得られる等温曲線.  $\rho_c = 1/3b$  は臨界粒子数密度を表します.  $T < T_c$  では  $\frac{\partial P}{\partial V} > 0$  (または  $\frac{\partial P}{\partial \rho} < 0$ ) の熱力学的に不安定な領域が存在します. (これを解消するには Maxwell の等面積則 (または  $F_{\text{mean}}$  の凸関数化) を適用する必要があります.)

となる  $V$  の領域があります (図2.2参照). 一方, 等温圧縮率  $\kappa_T$  の所で議論したように, 熱力学的に安定な系では常に  $\frac{\partial P}{\partial V} \leq 0$  です. この  $\frac{\partial P}{\partial V} \leq 0$  から  $\frac{\partial P}{\partial V} > 0$  へ転じる点, 即ち

$$\frac{\partial P}{\partial V} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = 0 \quad (2.1.55)$$

が臨界点に対応します. この臨界点を求めましょう. 式(2.1.53)の両辺を  $V$  について偏微分して次の条件を得ます:

$$\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{1}{\beta} \frac{N}{(V - Nb)^2} + \frac{2aN^2}{V^3} = 0 \quad (2.1.56a)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = \frac{1}{\beta} \frac{2N}{(V - Nb)^3} - \frac{6aN^2}{V^4} = 0 \quad (2.1.56b)$$

この連立方程式は簡単に解けて, 次の臨界温度  $T_c$ , 臨界圧力  $P_c$ , 臨界体積  $V_c$  を得ます:

$$T_c = \frac{8a}{27b}, \quad P_c = \frac{a}{27b^2}, \quad V_c = 3Nb \quad (2.1.57)$$

- 対応状態の法則 (law of corresponding states)

van der Waals 状態方程式に登場するパラメータ  $a$  と  $b$  の値は物質に依存しますが, 上で求めた臨界温度, 臨界圧力, 臨界体積を基準にして  $T, P, V$  を測る事にすると, 状態方程式から完全に  $a$  と  $b$  を消し去ることが出来ます. 次の無次元の変数を導入しましょう:

$$t = \frac{T}{T_c}, \quad p = \frac{P}{P_c}, \quad v = \frac{V}{V_c} \quad (2.1.58)$$

状態方程式をこの  $t, p, v$  で書き直すと次の様になります:

$$p = \frac{8}{3} \frac{t}{v - 1/3} - \frac{3}{v^2} \quad (2.1.59)$$

この状態方程式は  $a$  と  $b$  に依らないので, 特定の物質に依らず普遍的に成り立つ表式です. これを対応状態の法則と呼びます. また, 次の比も  $a$  と  $b$  に依らない普遍的な値を示します:

$$\frac{P_c V_c}{N T_c} = \frac{3}{8} = 0.375 \quad (2.1.60)$$

実際の単原子分子気体 (希ガス) の測定結果では, キセノンが 0.288, アルゴンが 0.291 となっていて<sup>\*11</sup>, 0.375 からは少しずれています.

- 臨界指数 (critical exponents)

臨界点近傍では種々の物理量が特異性を示し,  $T \rightarrow T_c$  で  $|T - T_c|$  の冪関数の様に振る舞ったりすることが知られています. 流体の場合, 次の量とその様な物理量の典型例です:<sup>\*12</sup>

$$(\text{定積比熱}) \quad c_V \sim |T - T_c|^{-\alpha} \quad (T \rightarrow T_c) \quad (2.1.61a)$$

<sup>\*11</sup> H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Oxford University Press, 1971) の Table 5.1 から引用.

<sup>\*12</sup> 他には気相と液相の体積差の  $T \uparrow T_c$  での振る舞い  $V_{\text{gas}} - V_{\text{liquid}} \sim |T - T_c|^\beta$  が重要ですが, この臨界指数  $\beta$  を計算するには  $T < T_c$  での系の振る舞いを正しく知る必要があります. 今使っている平均場近似で  $T < T_c$  の振る舞いを知るには Maxwell の等面積則を使わないといけません, これは面倒なのでここではやらないことにします. 因みに Maxwell の等面積則を使って計算すると  $\beta = 1/2$  になります.

$$\text{(等温圧縮率)} \quad \kappa_T \sim |T - T_c|^{-\gamma} \quad (T \rightarrow T_c) \quad (2.1.61b)$$

$$\text{(臨界圧力からのずれ)} \quad P - P_c \sim (V_c - V)^\delta \quad (T = T_c \ \& \ V \rightarrow V_c) \quad (2.1.61c)$$

冪の指数  $\{\alpha, \gamma, \delta\}$  を臨界指数と呼びます。この臨界指数を求めてみましょう。まず  $p(t, v) = \frac{8}{3} \frac{t}{v-1/3} - \frac{3}{v^2}$  とすると、この2変数関数  $p(t, v)$  は臨界点  $(t, v) = (1, 1)$  周りで Taylor 展開可能です。2変数関数の Taylor 展開は

$$\begin{aligned} p(t, v) &= p(1, 1) + \frac{\partial p(1, 1)}{\partial t}(t-1) + \frac{\partial p(1, 1)}{\partial v}(v-1) \\ &+ \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 p(1, 1)}{\partial t^2}(t-1)^2 + 2 \frac{\partial^2 p(1, 1)}{\partial t \partial v}(t-1)(v-1) + \frac{\partial^2 p(1, 1)}{\partial v^2}(v-1)^2 \right] \\ &+ \frac{1}{3!} \left[ \frac{\partial^3 p(1, 1)}{\partial t^3}(t-1)^3 + 3 \frac{\partial^3 p(1, 1)}{\partial t^2 \partial v}(t-1)^2(v-1) + 3 \frac{\partial^3 p(1, 1)}{\partial t \partial v^2}(t-1)(v-1)^2 + \frac{\partial^3 p(1, 1)}{\partial v^3}(v-1)^3 \right] \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (2.1.62)$$

ですが、展開係数を計算すると、3次のオーダーまでで次のようになります：

$$p(t, v) = 1 + 4(t-1) - 6(t-1)(v-1) + 9(t-1)(v-1)^2 - \frac{3}{2}(v-1)^3 + \dots \quad (2.1.63)$$

これから臨界指数  $\gamma$  と  $\delta$  が計算できます。最初に  $\gamma$  を計算しましょう。等温圧縮率  $\kappa_T$  は  $\kappa_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P}$  ですが、これは次の表式とも等しいです：

$$\kappa_T(t, v) = -\frac{1}{P_c v} \left( \frac{\partial p(t, v)}{\partial v} \right)^{-1} \quad (2.1.64)$$

これに式(2.1.63)を代入すると、臨界体積直上 ( $v = 1$ ) かつ臨界温度近傍 ( $|t-1| \ll 1$ ) では等温圧縮率は  $\kappa_T(t, 1) = -\frac{1}{P_c} (-6(t-1) + \dots)^{-1} \sim \frac{1}{6P_c} (t-1)^{-1} = \frac{1}{6P_c} \left( \frac{T-T_c}{T_c} \right)^{-1}$  と振る舞います。従って、

$$\kappa_T \sim (T - T_c)^{-1} \quad (T \downarrow T_c \ \& \ V = V_c) \quad (2.1.65)$$

これより  $\beta = 1$  が読み取れます。次に臨界指数  $\delta$  を求めましょう。臨界温度直上 ( $t = 1$ ) では  $p(1, v) - 1 = -\frac{3}{2}(v-1)^3 + \dots \sim \frac{3}{2}(1-v)^3 = \frac{3}{2} \left( \frac{V_c - V}{V_c} \right)^3$  と振る舞います\*13。従って、

$$P - P_c \sim (V_c - V)^3 \quad (T = T_c \ \& \ V \rightarrow V_c) \quad (2.1.66)$$

これより  $\delta = 3$  が読み取れます。最後に臨界指数  $\alpha$  を求めましょう。式(2.1.50)の分配関数を使って定積比熱  $c_V$  を計算すると

$$\begin{aligned} c_V &= \frac{\beta^2}{V} \frac{\partial^2 \log Z_{\text{mean}}(T, V, N)}{\partial \beta^2} \\ &= \frac{\beta^2}{V} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left[ \log Z_{\text{ideal}}(T, V, N) + N \log \left( 1 - \frac{bN}{V} \right) + \frac{\beta a N^2}{V} \right] \\ &= \frac{\beta^2}{V} \frac{\partial^2 \log Z_{\text{ideal}}(T, V, N)}{\partial \beta^2} \\ &= \frac{d}{2} \frac{N}{V} \quad \text{for } T > T_c \end{aligned} \quad (2.1.67)$$

但し、最後の等号で理想気体の結果(2.1.29)を使いました。この  $c_V$  は温度に依らない定数なので臨界指数は  $\alpha = 0$  となります。

### 大正準分布の場合

以上、正準分布を使って計算して来ましたが、最後に大正準分布を使うとどうなるか簡単に述べて終わりにしましょう。まず大分配関数は分配関数(2.1.50)を用いて次式で与えられます：

$$\begin{aligned} \Xi_{\text{mean}}(T, V, \mu) &= \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta \mu N} Z_{\text{mean}}(T, V, N) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \exp[-\beta (F_{\text{mean}}(T, V, N) - \mu N)] \end{aligned} \quad (2.1.68)$$

\*13 体積  $V$  の代わりに粒子数密度  $\rho$  を使うと  $P - P_c \sim (\rho - \rho_c)^3$  となります。



この和  $\sum_{N=0}^{\infty}$  が計算出来れば良いのですが、これは難しいので近似を考えましょう。  $N$  で和を取った時に一番寄与するのは  $(T, V, \mu)$  を固定した時に  $F_{\text{mean}}(T, V, N) - \mu N$  を最小にする  $N$  なので、大分配関数は次の様に近似出来ます：

$$\Xi_{\text{mean}}(T, V, \mu) \sim \exp \left[ -\beta \min_N (F_{\text{mean}}(T, V, N) - \mu N) \right] \quad (2.1.69)$$

ここで記号「 $\min_N f(N)$ 」は「 $N$  を変えていった時の  $f(N)$  の最小値」という意味です。式(2.1.69)によって大分配関数が  $(T, V, \mu)$  の関数として得られたので、圧力  $P(T, \mu)$  は式(2.1.15)と(2.1.13)より

$$\begin{aligned} P(T, \mu) &= -\frac{J_{\text{mean}}(T, V, \mu)}{V} \\ &= \frac{1}{V\beta} \log \Xi_{\text{mean}}(T, V, \mu) \\ &\sim -\frac{1}{V} \left[ \min_N (F_{\text{mean}}(T, V, N) - \mu N) \right] \\ &\sim -\min_{\rho} (f_{\text{mean}}(T, \rho) - \mu\rho) \end{aligned} \quad (2.1.70)$$

と評価されます。但し、最後の行で  $F_{\text{mean}}(T, V, \mu)/V$  を(熱力学極限を取った後の)単位体積当たりの Helmholtz の自由エネルギー  $f_{\text{mean}}(T, \rho)$  に置き換え、 $N$  に関して最小値を取る操作を粒子数密度  $\rho = N/V$  に関して最小値を取る操作に置き換えました。式(2.1.70)が変数  $(T, \mu)$  を用いた時の状態方程式を与えます。実際、 $\rho_*(T, \mu)$  を  $(T, \mu)$  を固定した時の  $f_{\text{mean}}(T, \rho) - \mu\rho$  の最小値とすると、最小値は極小値なので  $\rho_*$  は方程式  $\frac{\partial}{\partial \rho} (f_{\text{mean}}(T, \rho) - \mu\rho) = 0$  の解、即ち、

$$\mu = \frac{\partial f_{\text{mean}}(T, \rho)}{\partial \rho} \quad (2.1.71)$$

の解です。これを式(2.1.70)に代入して式(ii)で求めた  $f_{\text{mean}}$  を使って計算すると次の様になります：<sup>\*14</sup>

$$\begin{aligned} P(T, \mu) &\sim -f_{\text{mean}}(T, \rho_*(T, \mu)) + \left. \frac{\partial f_{\text{mean}}(T, \rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_*(T, \mu)} \rho_*(T, \mu) \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{\rho_*(T, \mu)}{1 - b\rho_*(T, \mu)} - a\rho_*(T, \mu)^2 \end{aligned} \quad (2.1.72)$$

これは van der Waals 状態方程式(2.1.53)の  $N/V$  が  $\rho_*$  に置き換わったものに他なりません。重要なのは粒子数密度  $\rho$  が「最小値を取る」という操作で決まる所で、 $f_{\text{mean}}(T, \rho) - \mu\rho$  が複数の極小値を持つ場合に特に重要になってきます。複数の極小値というのが異なる相(液相か気相)での粒子数密度に対応し、温度を変えていった時にどの極小値が選ばれるのか、という数学的な問いが、温度を変えていった時にどの相が実現されるのか、という物理的な問いに対応するわけです。但し、 $f_{\text{mean}}(T, \rho) - \mu\rho$  の最小値の現れ方を具体的に調べるのは大変なので、これ以上解析する事は止めにして強磁性体の臨界現象の話に移ることにします。

## 2.2 強磁性体の臨界現象

### この節のまとめ

- 固体の結晶格子の各格子点  $\mathbf{x}_i (i = 1, \dots, N)$  にスピン変数  $S(\mathbf{x}_i) = \pm 1$  が付与されているとする。この時、Hamiltonian が<sup>3</sup>

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} S(\mathbf{x}_i) S(\mathbf{x}_j) - h \sum_{i=1}^N S(\mathbf{x}_i)$$

で与えられる最近接相互作用の格子模型を **Ising 模型** と呼ぶ。  $J$  はスピン間相互作用のパラメータで、  $J > 0$  の時は強磁性体の模型、  $J < 0$  の時は反強磁性体の模型を表す。この講義では  $J > 0$  のみを扱う。一方、  $h$  は外部磁場に対応するパラメータ。

- 平均場近似では Ising 模型は任意次元で臨界点を持つ。  $d$  次元立方格子の場合、臨界温度  $T_c$  は

$$T_c = 2dJ$$

<sup>\*14</sup>  $\rho \frac{\partial f_{\text{mean}}(T, \rho)}{\partial \rho} = f_{\text{mean}}(T, \rho) + \frac{1}{\beta} \frac{\rho}{1 - b\rho} - a\rho^2$  を使うと簡単に求まります。因みに  $T$  と  $\mu$  を与えた時に  $-\min_{\rho} (f_{\text{mean}}(T, \rho) - \mu\rho)$  を求める操作は、関数  $f_{\text{mean}}(T, \rho)$  の変数  $\rho$  に関する Legendre 変換に他なりません。この Legendre 変換を用いると Maxwell の等面積則を使わずに済みます。また、Legendre 変換を 2 回施すと Maxwell の等面積則と同じ結果を再現する(物理的に正しい)Helmholtz の自由エネルギーが得られます。(凸関数なら Legendre 変換を 2 回施すと元の関数に戻りますが、 $f_{\text{mean}}$  は凸関数では無いので元には戻りません。)

- $f(T, h)$  を単位格子当たりの自由エネルギーとすると、単位格子当たりの磁化  $m$  は次式で与えられる:

$$m(T, h) = -\frac{\partial f(T, h)}{\partial h}$$

外部磁場がゼロの時,  $m$  は  $T > T_c$  の常磁性相ではゼロだが,  $T < T_c$  の強磁性相では非ゼロの有限値を獲得する:

$$\begin{aligned} m(T, 0) &= 0 & \text{for } T > T_c \\ m(T, 0) &\neq 0 & \text{for } T < T_c \end{aligned}$$

即ち,  $m$  がゼロかゼロでないかで常磁性相にあるか強磁性相にあるかが判定できる. この様な量を秩序変数と呼ぶ.

- 外部磁場一定の条件の下, 磁性体の温度を単位温度上昇させた時の単位格子点当たりのエネルギーの変化を定磁場比熱と呼ぶ. また, 温度一定の条件の下, 外部磁場を変化させた時の磁化の変化率を等温帯磁率と呼ぶ. 定磁場比熱と等温帯磁率はそれぞれエネルギーと磁化の揺らぎの2乗平均で表される:

$$c_h = -T \frac{\partial^2 f(T, h)}{\partial T^2} = \beta^2 \frac{\langle (H - \langle H \rangle)^2 \rangle}{N} \quad \text{and} \quad \chi_T = -\frac{\partial^2 f(T, h)}{\partial h^2} = \beta \frac{\langle (M - \langle M \rangle)^2 \rangle}{N}$$

但し,  $M = \sum_{i=1}^N S(\mathbf{x}_i)$ .

- 臨界点近傍では一般にエネルギー及び磁化の揺らぎが非常に大きくなり,  $c_h$  と  $\chi_T$  は次の冪則に従って発散する:

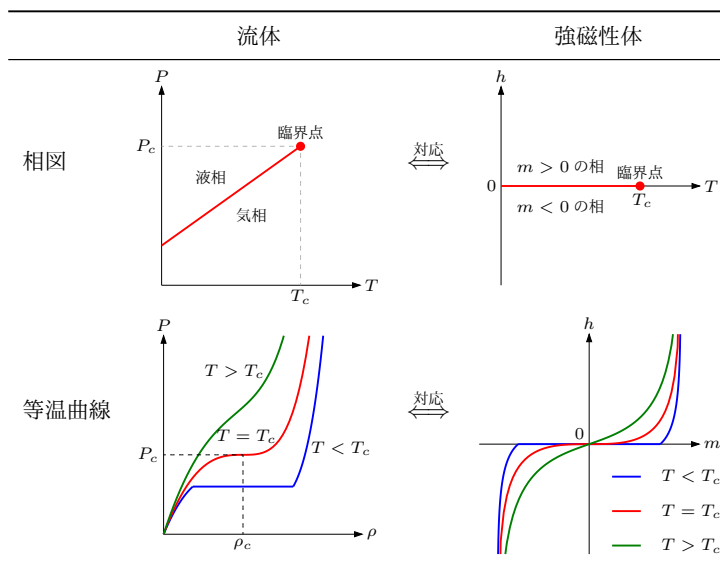
$$c_h \sim |T - T_c|^{-\alpha} \quad \text{and} \quad \chi_T \sim |T - T_c|^{-\gamma} \quad \text{as } T \rightarrow T_c \quad \text{with } h = 0$$

また, 単位格子当たりの磁化  $m$  は臨界点近傍で次のように振る舞う:

$$\begin{aligned} m(T, 0) &\sim |T - T_c|^\beta & \text{as } T \uparrow T_c \quad \text{with } h = 0 \\ m(T_c, h) &\sim h^{1/\delta} & \text{at } T = T_c \end{aligned}$$

平均場近似で計算した場合, 臨界指数  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  は van der Waals 流体の臨界指数  $\{0, \frac{1}{2}, 1, 3\}$  と一致する.

磁石を高温の溶鉱炉の中に入れると磁性が失われるという事は昔から分かっていたようですが, この現象の物理的な理解が進み始めたのは19世紀で, 特に重要なのが1895年のPierre Curieの論文だと言われています. この論文の中でCurieは既に流体の臨界現象と強磁性体の臨界現象の類似性について言及しており, 流体の圧力・粒子数密度の等温曲線と強磁性体の外部磁場・磁化の等温曲線の類似性を指摘していると言われています\*15. 現在の後付けの知識を加えると, この類似性は次の図にまとめられます.\*16



\*15 この辺の歴史は C. Domb のモノグラフ “The Critical Point” 第1章参照.

\*16 下段図の青色の曲線の平坦な部分は平均場近似だけでは出て来ません. 平均場近似の結果からこの曲線を得るには Maxwell の等面積則もしくは自由エネルギーの凸関数化もしくは Legendre 変換 2 回を施さないとはいけませんが, これらを実際に行うのはかなり面倒なので, この講義ではこの部分は議論しません. (自由エネルギーの凸性や Legendre 変換については適当な熱力学・統計力学の教科書を見てください.)

この図から明らかですが、流体の圧力  $P$  が強磁性体の外部磁場  $h$  に対応し、流体の粒子数密度  $\rho$  が強磁性体の単位格子当たりの磁化  $m$  に対応しています。例えば、 $T = T_c$  での  $(P, \rho)$  と  $(h, m)$  の関係 (下段の赤色の曲線) は共に  $P - P_c \sim (\rho - \rho_c)^\delta$  及び  $h \sim m^\delta$  で、多くの物質で冪の指数  $\delta$  も大体一致しているのです。

以下では強磁性体の統計力学的模型の雛形である **Ising 模型** を例に、平均場近似で強磁性体の臨界現象を調べます。

## 2.2.1 Ising 模型

まず Ising 模型の説明から始めましょう。Ising 模型は結晶格子を成す各原子の持つスピン自由度だけに着目した理論的模型で、結晶格子の格子点の総数を  $N$ 、格子点に適当に番号を振ってその位置を  $\mathbf{x}_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 、格子点  $\mathbf{x}_i$  におけるスピン変数を  $S(\mathbf{x}_i) = \pm 1$  とした時、Hamiltonian が次式で与えられる模型です：

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} S(\mathbf{x}_i) S(\mathbf{x}_j) - h \sum_{i=1}^N S(\mathbf{x}_i) \quad (2.2.1)$$

この Hamiltonian は少し説明が必要でしょう。まず記号  $\sum_{\langle ij \rangle}$  は隣り合うスピン変数  $S(\mathbf{x}_i)$  と  $S(\mathbf{x}_j)$  について和を取れ、という和の記号で、より明確に書くと周期的境界条件の課された  $d$  次元立方格子の場合は次のようになります：

$$\sum_{\langle ij \rangle} S(\mathbf{x}_i) S(\mathbf{x}_j) := \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^d S(\mathbf{x}_i) S(\mathbf{x}_i + a \mathbf{e}_j) \quad (2.2.2)$$

ここで  $a$  は格子間隔で  $\mathbf{e}_j$  は  $j$  方向の単位ベクトルです。この講義では周期的境界条件を課した立方格子のみを扱います。また、 $J$  はスピン変数の間の相互作用のパラメータで、 $J$  の符号によって Hamiltonian が記述する対象が異なります。まず次式に注意しましょう：

$$-JS(\mathbf{x}_i)S(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} -J & \text{for } S(\mathbf{x}_i) = S(\mathbf{x}_j) \\ +J & \text{for } S(\mathbf{x}_i) = -S(\mathbf{x}_j) \end{cases} \quad (2.2.3)$$

$J > 0$  の時はスピンの向きが揃っている方がエネルギーが下がる (エネルギー的に得をする) ので強磁性体に対応します。一方、 $J < 0$  の時はスピンの向きが逆の方がエネルギーが下がるので反強磁性体に対応します。この講義では  $J > 0$  の場合のみを扱います。最後に  $h$  は固体に掛けられた外部磁場に対応するパラメータです。

さて、Hamiltonian が式(2.2.1)で与えられるスピン系の統計力学を調べたいわけですが、この系の分配関数は Boltzmann 因子  $e^{-\beta H}$  を全てのスピン変数の配位について足し上げたものとして与えられます：

$$Z(T, h) = \sum_{S(\mathbf{x}_1)=\pm 1} \dots \sum_{S(\mathbf{x}_N)=\pm 1} e^{-\beta H} \quad (2.2.4)$$

また、自由エネルギーは分配関数の対数で与えられます。以下の議論で重要なのは単位格子当たりの自由エネルギーで、これは次式で与えられます：

$$f(T, h) = -\frac{1}{N\beta} \log Z(T, h) \quad (2.2.5)$$

単位格子当たりの自由エネルギーが分かると、単位格子当たりのエントロピー  $s(T, h)$  と単位格子当たりの磁化  $m(T, h)$  が分かります。これらは  $f$  の温度及び外部磁場に関する偏微分で与えられます：

$$s(T, h) = -\frac{\partial f(T, h)}{\partial T} \quad (2.2.6a)$$

$$m(T, h) = -\frac{\partial f(T, h)}{\partial h} \quad (2.2.6b)$$

さて、外部磁場  $h$  一定の条件下、系の温度を単位温度上昇させるのに必要な単位格子当たりのエネルギーを **定磁場比熱** と呼びます。定磁場比熱は温度変化に対する系の応答を表す量で、応答関数の一つです。流体の時と同様、定磁場比熱はエントロピーの温度微分で与えられ、エネルギーの揺らぎの 2 乗平均として表されます：

$$\begin{aligned} c_h &= T \frac{\partial s(T, h)}{\partial T} \\ &= -T \frac{\partial^2 f(T, h)}{\partial T^2} \\ &= \frac{\beta^2}{N} \frac{\partial^2 \log Z(T, h)}{\partial \beta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\beta^2}{N} \left[ \frac{1}{Z(T, h)} \frac{\partial^2 Z(T, h)}{\partial \beta^2} - \left( \frac{1}{Z(T, h)} \frac{\partial Z(T, h)}{\partial \beta} \right)^2 \right] \\
&= \beta^2 \frac{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2}{N} \\
&= \beta^2 \frac{\langle (H - \langle H \rangle)^2 \rangle}{N}
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

ここで、一般にある量  $\mathcal{O}$  の期待値は、Ising 模型では

$$\langle \mathcal{O} \rangle := \frac{1}{Z(T, h)} \sum_{S(\mathbf{x}_1)=\pm 1} \cdots \sum_{S(\mathbf{x}_N)=\pm 1} \mathcal{O} e^{-\beta H} \tag{2.2.8}$$

と定義されます。式(2.2.7)の5番目の等号は分配関数(2.2.4)の  $\beta$  微分をする事で簡単に確かめられます。最後の表式から明らかですが、 $c_h$  は正定値である事に注意しましょう。

一方、温度一定の条件下、外部磁場を変化させた時の単位格子当たりの磁化の変化率を等温帯磁率と呼びます。等温帯磁率は外部磁場に対する系の応答を表す量で、これも応答関数の一つです。流体の時と同様、等温帯磁率は磁化の外部磁場微分で与えられ、磁化の揺らぎの2乗平均として表されます：

$$\begin{aligned}
\chi_T &= \frac{\partial m(T, h)}{\partial h} \\
&= - \frac{\partial^2 f(T, h)}{\partial h^2} \\
&= \frac{1}{N\beta} \frac{\partial^2 \log Z(T, h)}{\partial h^2} \\
&= \frac{1}{N\beta} \left[ \frac{1}{Z(T, h)} \frac{\partial^2 Z(T, h)}{\partial h^2} - \left( \frac{1}{Z(T, h)} \frac{\partial Z(T, h)}{\partial h} \right)^2 \right] \\
&= \beta \frac{\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2}{N} \\
&= \beta \frac{\langle (M - \langle M \rangle)^2 \rangle}{N}
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

ここで  $M$  はスピン変数の総和で、次式で与えられます：

$$M = \sum_{i=1}^N S(\mathbf{x}_i) \tag{2.2.10}$$

この  $M$  の期待値  $\langle M \rangle$  が系全体の磁化を表し、これを  $N$  で割ったものが単位格子当たりの磁化  $m(T, h)$  と一致します。実際に計算してみると

$$\begin{aligned}
m(T, h) &= - \frac{\partial f(T, h)}{\partial h} \\
&= \frac{1}{N\beta} \frac{\partial \log Z(T, h)}{\partial h} \\
&= \frac{1}{N\beta} \frac{1}{Z(T, h)} \frac{\partial Z(T, h)}{\partial h} \\
&= \frac{1}{N} \frac{1}{Z(T, h)} \sum_{S(\mathbf{x}_1)=\pm 1} \cdots \sum_{S(\mathbf{x}_N)=\pm 1} M e^{-\beta H} \\
&= \frac{1}{N} \langle M \rangle
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

となります。  $c_h$  と同様、  $\chi_T$  は正定値である事に注意しましょう。

## 2.2.2 平均場近似

さて、Ising 模型の Hamiltonian は非常に単純ですが、このような単純な Hamiltonian でも分配関数を計算するのは至難の業です。実際、分配関数が厳密に計算出来ているのは1次元と2次元の場合のみで、3次元以上の Ising 模型は未だに解けていません。以下では代表的な近似計算である平均場近似を用いて分配関数や自由エネルギー、定磁場比熱や等温帯磁率を計算していきましょう。

まず  $m$  を単位格子当たりの磁化として、Hamiltonian のスピン変数の 2 次の項を  $S = m$  周りで展開し直します:

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x}_i)S(\mathbf{x}_j) &= [m + (S(\mathbf{x}_i) - m)][m + (S(\mathbf{x}_j) - m)] \\ &= m^2 + m(S(\mathbf{x}_i) - m) + m(S(\mathbf{x}_j) - m) + (S(\mathbf{x}_i) - m)(S(\mathbf{x}_j) - m) \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

以下では  $m$  からのずれ  $S(\mathbf{x}_i) - m$  が小さいと思って、これの 1 次の項までで近似します。式(2.2.12)の最後の項は  $m$  からのずれの 2 次なので無視すると、Hamiltonian は次の様になります:

$$\begin{aligned} H &= -J \sum_{\langle ij \rangle} [m^2 + m(S(\mathbf{x}_i) - m) + m(S(\mathbf{x}_j) - m)] - h \sum_{i=1}^N S(\mathbf{x}_i) \\ &= -J \sum_{\langle ij \rangle} [-m^2 + 2mS(\mathbf{x}_i)] - h \sum_{i=1}^N S(\mathbf{x}_i) \\ &= NdJm^2 - (2dJm + h) \sum_{i=1}^N S(\mathbf{x}_i) \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

但し、最後の行で

$$\sum_{\langle ij \rangle} 1 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^d 1 = Nd \quad (2.2.14a)$$

$$\sum_{\langle ij \rangle} S(\mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^d S(\mathbf{x}_i) = d \sum_{i=1}^N S(\mathbf{x}_i) \quad (2.2.14b)$$

を使いました。この近似の下で分配関数(2.2.4)は次の様に計算されます:

$$\begin{aligned} Z_{\text{mean}}(T, h) &= \sum_{S(\mathbf{x}_1)=\pm 1} \cdots \sum_{S(\mathbf{x}_N)=\pm 1} \exp \left( -\beta \left[ NdJm^2 - (2dJm + h) \sum_{i=1}^N S(\mathbf{x}_i) \right] \right) \\ &= e^{-\beta NdJm^2} \left( \sum_{S(\mathbf{x}_1)=\pm 1} e^{\beta(2dJm+h)S(\mathbf{x}_1)} \right) \cdots \left( \sum_{S(\mathbf{x}_N)=\pm 1} e^{\beta(2dJm+h)S(\mathbf{x}_N)} \right) \\ &= e^{-\beta NdJm^2} [2 \cosh(\beta(2dJm + h))]^N \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

これより平均場近似での単位格子当たりの自由エネルギーは

$$\begin{aligned} f_{\text{mean}}(T, h) &= -\frac{1}{N\beta} \log Z_{\text{mean}}(T, h) \\ &= dJm^2 - \frac{1}{\beta} \log [2 \cosh(\beta(2dJm + h))] \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

となります。ところで、 $m$  は単位格子当たりの自由エネルギーの  $h$  微分と一致しなければなりません:

$$\begin{aligned} m &= -\frac{\partial f_{\text{mean}}(T, h)}{\partial h} \\ &= \tanh(\beta(2dJm + h)) \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

これが矛盾なく成り立つためには  $m$  は次の条件式の解でなければなりません:

$$m = \tanh(\beta(2dJm + h)) \quad (2.2.18)$$

この条件を自己無撞着条件 (**self-consistency condition**) と呼びます。この方程式を解析的に解くのは難しいですが、 $y(m) = m$ ,  $y(m) = \tanh(\beta(2dJm + h))$  としてこの 2 つの関数が交点を持つかどうかで方程式(2.2.18)が解を持つかどうか判定できます。図2.3より明らかですが、方程式(2.2.18)が解を持つ為には右辺の  $\tanh(\beta(2dJm + h))$  が  $m$  の関数として  $m = 0$  での微係数が 1 以上であれば良いので次の条件を得ます:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dm} \tanh(\beta(2dJm + h)) \right|_{m=0} \geq 1 &\Rightarrow \frac{2dJ\beta}{\cosh^2(\beta h)} \geq 1 \\ &\Rightarrow \frac{T}{2dJ} \leq \frac{1}{\cosh^2(\beta h)} \leq 1 \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

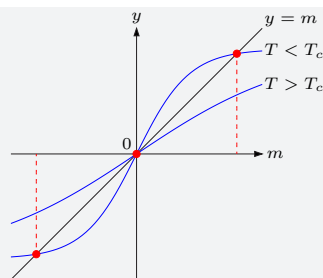


図2.3: 外部磁場  $h = 0$  の時の自己無撞着方程式(2.2.18)の解. 青色の曲線は  $y = \tanh(\beta 2dJm)$  を表し, 赤色の交点が方程式の解を表します.  $T > T_c = 2dJ$  では  $y = m$  との交点は  $m = 0$  しかありませんが,  $T < T_c$  では  $m \neq 0$  で交点が存在します. この  $h = 0$  での  $m \neq 0$  の解を自発磁化と呼びます. 自発磁化  $m$  は秩序変数と呼ばれ,  $m$  がゼロかゼロでないかで強磁性体が常磁性相 (スピンの向きが揃っていない無秩序相) にあるのか強磁性相 (スピンの向きが揃っている秩序相) にあるのが判定できます.

従って, 特に  $h = 0$  の時は  $T \leq 2dJ$  であれば解があります. この上限の温度が臨界温度  $T_c$  で, 次式で与えられます:

$$T_c = 2dJ \quad (2.2.20)$$

以下, この臨界点近傍での  $m$ ,  $c_h$ ,  $\chi_T$  の振る舞いを調べて行きましょう. この目的の為に式(2.2.18)を少し書き換えておきます.  $\operatorname{arctanh}(z) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$  を使うと\*17式(2.2.18)は次の様に書き換えられます:

$$\beta(2dJm + h) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+m}{1-m}\right) \quad (2.2.21)$$

これを使って臨界指数を計算して行きます.

- 臨界指数  $\beta$

$h = 0$  の時, 臨界点近傍では  $m$  は小さいので, 式(2.2.21)の右辺は Taylor 展開出来ます. 3 次の項まで展開すると

$$\begin{aligned} \frac{T_c}{T} m(T, 0) &= \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+m(T, 0)}{1-m(T, 0)}\right) \\ &= m(T, 0) + \frac{1}{3} m^3(T, 0) + O(m^5) \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

これより, 3 次のオーダーまでで次の方程式を得ます:

$$\frac{1}{3} m(T, 0) \left[ m^2(T, 0) - 3 \frac{T_c - T}{T} \right] = 0 \quad (2.2.23)$$

$T > T_c$  の時, この方程式の実数解は  $m = 0$  しかありません. 一方,  $T < T_c$  の時は  $m = 0$  の解の他に次の2つの実数解があります:

$$\begin{aligned} m(T, 0) &= \pm \left( 3 \frac{T_c - T}{T} \right)^{1/2} \\ &= \pm \left( 3 \frac{T_c - T}{T_c} \frac{1}{1 - (T_c - T)/T_c} \right)^{1/2} \\ &= \pm \left( 3 \frac{T_c - T}{T_c} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{T_c - T}{T_c} \right)^n \right)^{1/2} \\ &= \pm \left( 3 \frac{T_c - T}{T_c} \right)^{1/2} + O\left(\frac{T_c - T}{T_c}\right)^{3/2} \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

ところで, 臨界指数  $\beta$  は  $m(T, 0)$  の  $T \uparrow T_c$  での振る舞いから次の様に定義されます:

$$m(T, 0) \sim (T_c - T)^\beta \quad \text{as } T \uparrow T_c \quad \text{with } h = 0 \quad (2.2.25)$$

これと式(2.2.24)を比較して  $\beta = 1/2$  と読み取れます.

\*17  $z = \tanh(x)$  とすると,  $z = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$  なので, これを少し変形して整理すると  $e^{2x} = \frac{1+z}{1-z}$  を得ます. 両辺の対数を取ると  $x = \operatorname{arctanh}(z) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$  となります.

- 臨界指数  $\delta$

$T = T_c$  の時, 臨界点近傍では  $m$  の値は小さいので式(2.2.21)の右辺は Taylor 展開できます:

$$\begin{aligned} m(T_c, h) + \frac{1}{T_c} h &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + m(T_c, h)}{1 - m(T_c, h)} \right) \\ &= m(T_c, h) + \frac{1}{3} m^3(T_c, h) + O(m^5) \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

従って,  $m^3$  のオーダーまでで次が成り立ちます:

$$m^3(T_c, h) = \frac{3}{T_c} h \quad (2.2.27)$$

ところで, 臨界指数  $\delta$  は  $m(T_c, h)$  の  $h$  依存性から次の様に定義されます:

$$m(T_c, h) \sim h^{1/\delta} \quad \text{at } T = T_c \quad (2.2.28)$$

これと式(2.2.27)を比較して  $\delta = 3$  と読み取れます.

- 臨界指数  $\gamma$

等温帯磁率  $\chi_T$  は  $m$  の  $h$  微分で与えられます. 特に  $h = 0$  の時の  $m(T, h)$  の微係数は, 式(2.2.18)より

$$\begin{aligned} \chi_T &= \left. \frac{\partial m(T, h)}{\partial h} \right|_{h=0} \\ &= \frac{1}{T} \frac{T_c \chi_T + 1}{\cosh^2(T_c m/T)} \\ &= \frac{T_c \chi_T + 1}{T} (1 - \tanh^2(T_c m/T)) \\ &= \frac{T_c \chi_T + 1}{T} (1 - m^2(T, 0)) \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

但し, 最後の等号で  $m(T, 0) = \tanh(T_c m/T)$  を使いました. 式(2.2.29)を  $\chi_T$  について解くと次の様になります:

$$\begin{aligned} \chi_T &= \frac{1 - m^2(T, 0)}{T - T_c (1 - m^2(T, 0))} \\ &= \frac{1}{T_c} \frac{1 - m^2(T, 0)}{m^2(T, 0) - (T_c - T)/T_c} \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

さて,  $T > T_c$  の時は  $m(T, 0) = 0$  なので

$$\begin{aligned} \chi_T &= \frac{1}{T_c} \frac{1 - 0}{0 - (T_c - T)/T_c} \\ &= \frac{1}{T - T_c} \quad \text{for } T > T_c \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

一方,  $T < T_c$  の時は式(2.2.24)より  $m(T, 0) = \pm 3(T_c - T/T_c)^{1/2}$  なので

$$\begin{aligned} \chi_T &= \frac{1}{T_c} \frac{1 - 3(T_c - T)/T_c}{3(T_c - T)/T_c - (T_c - T)/T_c} \\ &= \frac{1}{2(T_c - T)} + O(1) \quad \text{for } T < T_c \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

となります. これらをまとめると次の様になります:

$$\chi_T = \begin{cases} (T - T_c)^{-1} & \text{for } T > T_c \\ \frac{1}{2}(T_c - T)^{-1} + O(1) & \text{for } T < T_c \end{cases} \quad (2.2.33)$$

ここで臨界指数  $\gamma$  は  $\chi_T$  の  $T \rightarrow T_c$  での振る舞いから次の様に定義されます:

$$\chi_T \sim |T - T_c|^{-\gamma} \quad \text{as } T \rightarrow T_c \quad \text{with } h = 0 \quad (2.2.34)$$

これと式(2.2.33)を比較して  $\gamma = 1$  と読み取れます.

• 臨界指数  $\alpha$

まず  $h = 0$  での単位格子当たりの自由エネルギー(2.2.16)の温度微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(T, 0)}{\partial T} &= T_c m(T, 0) \frac{\partial m(T, 0)}{\partial T} - \log \left[ 2 \cosh \left( \frac{T_c}{T} m(T, 0) \right) \right] + \tanh \left( \frac{T_c}{T} m(T, 0) \right) \left( \frac{T_c}{T} m(T, 0) - T_c \frac{\partial m(T, 0)}{\partial T} \right) \\ &= \frac{T_c}{T} m^2(T, 0) - \log \left[ 2 \cosh \left( \frac{T_c}{T} m(T, 0) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.2.35a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(T, 0)}{\partial T^2} &= -\frac{T_c}{T^2} m^2(T, 0) + \frac{2T_c}{T} m(T, 0) \frac{\partial m(T, 0)}{\partial T} - \tanh \left( \frac{T_c}{T} m(T, 0) \right) \left( -\frac{T_c}{T^2} m(T, 0) + \frac{T_c}{T} \frac{\partial m(T, 0)}{\partial T} \right) \\ &= \frac{T_c}{T} m(T, 0) \frac{\partial m(T, 0)}{\partial T} \\ &= \frac{T_c}{2T} \frac{\partial m^2(T, 0)}{\partial T} \end{aligned} \quad (2.2.35b)$$

但し,  $m(T, 0) = \tanh(T_c m/T)$  を使いました. よって  $h = 0$  での定磁場比熱は

$$c_h = -T \frac{\partial^2 f(T, 0)}{\partial T^2} = -\frac{T_c}{2} \frac{\partial}{\partial T} m^2(T, 0) = \begin{cases} 0 & \text{for } T > T_c \\ \frac{3}{2} & \text{as } T \uparrow T_c \end{cases} \quad (2.2.36)$$

となります. 但し, 最後の等号で式(2.2.24)を使いました. ここで, 臨界指数  $\alpha$  は  $h = 0$  での臨界点近傍での  $c_h$  の振る舞いから次の様に定義されます:

$$c_h \sim |T - T_c|^{-\alpha} \quad \text{as } T \rightarrow T_c \quad \text{with } h = 0 \quad (2.2.37)$$

これと式(2.2.36)を比較すると  $\alpha = 0$  を得ます.

以上まとめると, 平均場近似の下では臨界指数  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  は

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 3 \quad (2.2.38)$$

となります. これは前節2.1.3で調べた van der Waals 流体の臨界指数と完全に一致しています.

## 2.3 スケーリング則と普遍性

### この節のまとめ

- 応答関数や秩序変数の臨界点近傍での普遍的な振る舞いはスケーリング仮説により導出できる. 簡単の為, 強磁性体の臨界点近傍を考えよう.  $\tau = (T - T_c)/T_c$  として単位格子当たりの自由エネルギーを  $f(\tau, h)$  と表す事にする. スケーリング仮説とは, 臨界点近傍で次の関数関係式 (スケーリング則) が成り立つことを仮定する事:

$$f(\tau, h) \sim \lambda^{-1} f(\lambda^a \tau, \lambda^b h)$$

ここで  $\lambda > 0$  は任意の正数で,  $a$  と  $b$  はスケーリング仮説のパラメータである.

- 応答関数および秩序変数は全て単位格子当たりの自由エネルギーの偏微分で与えられる. 一旦スケーリング仮説を認めると, これらは臨界点近傍で次のスケーリング則を満たすことが言える:

$$\begin{aligned} c_h(\tau, 0) &\sim \lambda^{2a-1} c_h(\lambda^a \tau, 0), & m(\tau, 0) &\sim \lambda^{b-1} m(\lambda^a \tau, 0) \\ \chi_T(\tau, 0) &\sim \lambda^{2b-1} \chi_T(\lambda^a \tau, 0), & m(0, h) &\sim \lambda^{b-1} m(0, \lambda^b h) \end{aligned}$$

- 上のスケーリング則は解ける. 臨界点近傍では次の様な関数形を取ることが言える:

$$\begin{aligned} c_h(\tau, 0) &\sim |T - T_c|^{-\frac{2a-1}{a}}, & m(\tau, 0) &\sim |T - T_c|^{\frac{1-b}{a}} \\ \chi_T(\tau, 0) &\sim |T - T_c|^{-\frac{2b-1}{a}}, & m(0, h) &\sim |h|^{\frac{1-b}{b}} \end{aligned}$$

これより臨界指数が次の様に読み取れる:

$$\alpha = \frac{2a-1}{a}, \quad \beta = \frac{1-b}{a}, \quad \gamma = \frac{2b-1}{a}, \quad \delta = \frac{b}{1-b}$$

平均場近似の結果  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} = \{0, \frac{1}{2}, 1, 3\}$  は  $\{a, b\} = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$  で再現できる.



- スケーリング則には2つのパラメータしか無い。従ってスケーリング仮説の下では4つの臨界指数  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  は全てが独立では無い。臨界指数の間には次の関係式が成り立つ:

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \quad \gamma = \beta(\delta - 1)$$

前節までで、van der Waals 流体や Ising 模型の平均場近似の範囲では、応答関数と秩序変数が臨界点近傍で普遍的な冪則に従って振舞うことを見てきました。この冪則はスケーリング仮説 (**scaling hypothesis**) と呼ばれる単位体積当たりの自由エネルギーに対する関係式を仮定すると自然に導出できます。簡単のため強磁性体を考えましょう。今興味があるのは臨界点近傍なので、温度  $T$  は臨界点から測る事にして次の様に無次元の変数を導入しておく便利です:

$$\tau := \frac{T - T_c}{T_c} \quad (2.3.1)$$

この無次元の変数  $\tau$  を用いて、単位格子当たりの自由エネルギーを  $f(\tau, h)$  と表しましょう。スケーリング仮説とはこの  $f(\tau, h)$  が臨界点近傍で任意の正数  $\lambda$  に対して次の関係式を満たす、と仮定する事です:<sup>\*18</sup>

$$f(\tau, h) \sim \lambda^{-1} f(\lambda^a \tau, \lambda^b h), \quad \forall \lambda > 0 \quad (2.3.2)$$

ここで  $a$  と  $b$  はスケーリング仮説のパラメータです。一体どこからこの関係式が出て来たのか不思議に思うでしょうが、取り敢えずこのスケーリング則を認めることで何が導かれるか見ておきましょう。

まず、スケーリング則(2.3.2)を満たす  $f(\tau, h)$  は実質的には1変数関数です。これを見る為に  $\lambda$  の任意性を利用します。  $\lambda > 0$  は任意の正のパラメータだったので次の様に選ぶことができます:

$$\lambda = |\tau|^{-1/a} > 0 \quad (2.3.3)$$

この様に選ぶと、式(2.3.2)は次の様に書き換えることができます:

$$\begin{aligned} f(\tau, h) &\sim \lambda^{-1} f(\lambda^a \tau, \lambda^b h) \\ &= |\tau|^{1/a} f\left(\frac{\tau}{|\tau|}, \frac{h}{|\tau|^{1/a}}\right) \\ &= |\tau|^{1/a} f(\text{sgn}(\tau), \frac{h}{|\tau|^{1/a}}) \\ &= |\tau|^{1/a} \Phi^\pm\left(\frac{h}{|\tau|^{1/a}}\right) \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

ここで、 $\text{sgn}(\tau) = \tau/|\tau|$  は符号関数で、 $\tau > 0$  なら  $\text{sgn}(\tau) = +1$ 、 $\tau < 0$  なら  $\text{sgn}(\tau) = -1$  の値を取ります。関数  $f(\text{sgn}(\tau), \frac{h}{|\tau|^{1/a}})$  の  $h$  と  $\tau$  の依存性は ( $\tau$  の符号の違いを除いて)  $h/|\tau|^{1/a}$  の組み合わせでしか現れないので、これは実質的に1変数関数で、最後の等式ではこの1変数関数を  $\Phi^\pm(\frac{h}{|\tau|^{1/a}}) = f(\text{sgn}(\tau), h/|\tau|^{1/a})$  と置きました。  $\Phi^\pm$  を  $\text{sgn}(\tau) = \pm 1$  の場合に対応させています。  $\Phi^\pm$  はスケーリング則だけでは決まらない関数で、スケーリング関数と呼ばれます。上の議論から求めた関係式

$$f(\tau, h) \sim |\tau|^{1/a} \Phi^\pm\left(\frac{h}{|\tau|^{1/a}}\right) \quad (2.3.5)$$

をスケーリング仮説と呼ぶ事もあります。

さて、前節で見た様に、定磁場比熱  $c_h$  や等温帯磁率  $\chi_T$ 、単位格子当たりの磁化  $m$  は全て単位格子当たりの自由エネルギーの偏微分で与えられます。一方、 $f$  はスケーリング則(2.3.2)を満たしているのです。これの帰結として  $c_h$ 、 $\chi_T$ 、 $m$  も次のスケーリング則を満たします:

$$c_h(\tau, 0) \sim -\tau \frac{\partial^2 f(\tau, 0)}{\partial \tau^2} \sim -\lambda^{2a-1} \tau \frac{\partial^2 f(\lambda^a \tau, 0)}{\partial \tau^2} \sim \lambda^{2a-1} c_h(\lambda^a \tau, 0) \quad (2.3.6a)$$

$$m(\tau, 0) \sim -\frac{\partial f(\tau, 0)}{\partial h} \sim -\lambda^{b-1} \frac{\partial f(\lambda^a \tau, 0)}{\partial h} \sim \lambda^{b-1} m(\lambda^a \tau, 0) \quad (2.3.6b)$$

$$\chi_T(\tau, 0) \sim -\frac{\partial^2 f(\tau, 0)}{\partial h^2} \sim -\lambda^{2b-1} \frac{\partial^2 f(\lambda^a \tau, 0)}{\partial h^2} \sim \lambda^{2b-1} \chi_T(\lambda^a \tau, 0) \quad (2.3.6c)$$

$$m(0, h) \sim -\frac{\partial f(0, h)}{\partial h} \sim -\lambda^{b-1} \frac{\partial f(0, \lambda^b h)}{\partial h} \sim \lambda^{b-1} m(0, \lambda^b h) \quad (2.3.6d)$$

<sup>\*18</sup> 一般に、関係式  $f(\lambda^a \tau, \lambda^b h) = \lambda f(\tau, h)$  を満たす様な関数を一般化された同次関数 (**generalized homogeneous function**) と呼びます。(普通の同次関数は  $f(\lambda \tau, \lambda h) = \lambda f(\tau, h)$  を満たします。) スケーリング仮説は、自由エネルギーが臨界点近傍で一般化された同次関数として振舞うと仮定する事に他なりません。

式(2.3.4)でやった様に、これらのスケーリング則も  $\lambda$  の任意性を利用する事で解くことが出来ます。  $\lambda$  を式(2.3.3)と同じに選ぶと、スケーリング則(2.3.6a)は

$$\begin{aligned} c_h(\tau, 0) &\sim \lambda^{2a-1} c_h(\lambda^a \tau, 0) \\ &= |\tau|^{-\frac{2a-1}{a}} c_h(\text{sgn}(\tau), 0) \\ &= \left| \frac{T - T_c}{T_c} \right|^{-\frac{2a-1}{a}} c_h(\text{sgn}(\tau), 0) \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

ここで  $c_h(\text{sgn}(\tau), 0)$  は臨界温度から充分離れた所での比熱なので、これはある有限な定数です。(  $\text{sgn}(\tau) = +1$  は  $T = 2T_c$ ,  $\text{sgn}(\tau) = -1$  は  $T = 0$  を意味する事に注意。 ) 従って、式(2.3.7)は次を意味します:

$$c_h(\tau, 0) \sim |T - T_c|^{-\frac{2a-1}{a}} \quad (2.3.8)$$

これより臨界指数  $\alpha$  が次の様に読み取れます:

$$\alpha = \frac{2a - 1}{a} \quad (2.3.9)$$

同様に、  $\lambda$  を式(2.3.3)の様に選ぶと、スケーリング則(2.3.6b)は次の様に解けます:

$$\begin{aligned} m(\tau, 0) &\sim \lambda^{b-1} m(\lambda^a \tau, 0) \\ &= |\tau|^{\frac{1-b}{a}} m(\text{sgn}(\tau), 0) \\ &= \left| \frac{T - T_c}{T_c} \right|^{\frac{1-b}{a}} m(\text{sgn}(\tau), 0) \\ &\sim \begin{cases} 0 & \text{for } \tau > 0 \\ |T - T_c|^{\frac{1-b}{a}} & \text{for } \tau < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

但し、臨界温度以上  $\tau > 0$  では自発磁化はゼロ ( $m(+1, 0) = 0$ ) を使いました。これより臨界指数  $\beta$  が次の様に読み取れます:

$$\beta = \frac{1 - b}{a} \quad (2.3.11)$$

また、ゼロ磁場での等温帯磁率は、スケーリング則(2.3.6c)より

$$\begin{aligned} \chi_T(\tau, 0) &\sim \lambda^{2b-1} \chi_T(\lambda^a \tau, 0) \\ &= |\tau|^{-\frac{2b-1}{a}} \chi_T(\text{sgn}(\tau), 0) \\ &= \left| \frac{T - T_c}{T_c} \right|^{-\frac{2b-1}{a}} \chi_T(\text{sgn}(\tau), 0) \\ &\sim |T - T_c|^{-\frac{2b-1}{a}} \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

これより臨界指数  $\gamma$  は次の様に読み取れます:

$$\gamma = \frac{2b - 1}{a} \quad (2.3.13)$$

臨界温度直上での  $m$  の  $h$  依存性を見るには  $\lambda$  を次の様に選びます:

$$\lambda = |h|^{-1/b} \quad (2.3.14)$$

するとスケーリング則(2.3.6d)は

$$\begin{aligned} m(0, h) &\sim \lambda^{b-1} m(0, \lambda^b h) \\ &= |h|^{\frac{1-b}{b}} m(0, \text{sgn}(h)) \\ &= |h|^{\frac{1-b}{b}} m(0, \text{sgn}(h)) \\ &\sim |h|^{\frac{1-b}{b}} \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

従って、臨界指数  $\delta$  は次の様に読み取れます:

$$\delta = \frac{b}{1 - b} \quad (2.3.16)$$

以上まとめると、スケーリング則(2.3.2)を認めると臨界指数  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  は次の様に与えられます:

$$\alpha = \frac{2a-1}{a}, \quad \beta = \frac{1-b}{a}, \quad \gamma = \frac{2b-1}{a}, \quad \delta = \frac{b}{1-b} \quad (2.3.17)$$

平均場近似では  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} = \{0, \frac{1}{2}, 1, 3\}$  でしたが、これは  $\{a, b\} = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$  で再現できる事に注意しましょう。

さて、スケーリング仮説には2つのパラメータ  $a, b$  しかありませんが、今までの議論で登場してきた臨界指数は4つあります。これはスケーリング仮説が成り立っているとすると、臨界指数は全てが独立では無いことを意味します。実際、簡単に確かめることが出来ますが、次の関係式が成り立ちます:

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad (2.3.18a)$$

$$\gamma = \beta(\delta - 1) \quad (2.3.18b)$$

この関係式をスケーリング関係式と呼びます。式(2.3.18a)を特に Rushbrooke の等式、式(2.3.18b)を Griffiths の等式と呼んだりします。

以上、スケーリング則をかなり天下り的に与えましたが、繰り込み群を使うとこのスケーリング則を導くことが出来ます。そしてパラメータ  $a$  と  $b$  というのが、実は(固定点周りで線形化した)繰り込み群変換の固有値から求まるのです。

## 参考文献

表2.1は次の演習書 §5.14 の 215 ページの表を殆どそのまま借用しました:

[1] 久保亮五編, 『大学演習 熱力学・統計力学』修訂版(裳華房, 1998年)

この本は演習問題だけでなく熱力学・統計力学の要点も簡潔にまとめられているので、忘れてしまった時に参考になると思います。

第2.1節で取り扱った流体の臨界現象は、Mehran Kardar の次の教科書の第5章をかなり参考にしました:

[2] M. Kardar, *Statistical Physics of Particle* (Cambridge University Press, 2007)

この講義ノートでも割と詳しく書きましたが、この講義ノートでは触れていない事も書かれているので一度目を通して見ると良いでしょう。

脚注\*2で触れた臨界淡白光(流体の臨界点近傍で観測される現象)についてはこの講義ノートでは全く議論しませんでした。この臨界淡白光の理論として有名なのが Ornstein-Zernike 理論ですが、これに興味がある人は次の Harry Eugene Stanley の教科書の第7章を読むと良いでしょう:

[3] H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Oxford University Press, 1971)

ちなみにこの教科書は Wilson 登場以前の臨界現象の理論をまとめた教科書で、第4章に Rushbrooke の不等式や Griffiths の不等式の導出、第11章にスケーリング仮説の議論も詳しく載っています。

第2.2節で扱った Ising 模型の平均場近似は色々な教科書に載っています。和書だと例えば次の教科書に載っています:

[4] 西森秀稔, 『相転移・臨界現象の統計物理学』(培風館, 2005年)

[5] 田崎晴明, 『統計力学II』(培風館, 2008年)

[6] 高橋和孝, 西森秀稔, 『相転移・臨界現象とくりこみ群』(丸善出版, 2017年)

この講義ノートではちゃんと議論しなかった部分も載っているので参考にすると良いと思います。

さて、平均場近似で扱う Ising 模型は任意次元で臨界点を持ちますが、実際に有限温度で相転移が起きるのは2次元以上で、1次元 Ising 模型は有限温度で相転移は起きません。しかし、これはスピン間相互作用が最近接相互作用の場合で、長距離相互作用に拡張した模型

$$H = -J \sum_{i>j} \frac{S_i S_j}{|i-j|^\alpha} \quad (1 < \alpha < 2)$$

では1次元でも有限温度で相転移が起きることが知られています。興味のある人は次の Freeman Dyson の論文を見てみましょう:

[7] F. J. Dyson, "Existence of a Phase-Transition in a One-Dimensional Ising Ferromagnet," *Commun. Math. Phys.* **12** (1969) 91-107

この論文はだいぶ数学的ですが、臨界点の有無は空間次元だけでなく相互作用の種類にも依るという良い例になっています。



## 第 3 章

# Ginzburg-Landau 理論

理論物理学教程で有名な Lev Landau は、臨界現象を支配するのは秩序変数と系の対称性であることを看破しました。この章では、Landau および Ginzburg-Landau によって創始された相転移と臨界現象の現象論を学びます。

### 3.1 連成振動子から場の理論へ

この章からは場の理論を扱っていきます。統計力学で場の理論をどう導入するかは悩ましい所ですが、やはり離散的な模型の連続極限として与えるのが最も正統的でしょう。この節では  $N$  個の質点から成る 1 次元連成振動子の連続極限を取ることで 1 次元の自由スカラー場の理論を構成して行きます。考えるのはポテンシャルエネルギー  $U$  が次で与えられるようなバネ定数  $k_1, k_2$  の 2 種類のバネに繋がった連成振動子です：

$$\begin{aligned} U(q_1, \dots, q_N) &= \sum_{i=1}^{N+1} \frac{k_1}{2} (q_i - q_{i-1})^2 + \sum_{i=1}^N \frac{k_2}{2} q_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N+1} a \frac{k_1 a}{2} \left( \frac{q_i - q_{i-1}}{a} \right)^2 + \sum_{i=1}^N a \frac{k_2/a}{2} q_i^2 \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

ここで、 $q_i$  が  $i$  番目の質点の平衡の位置からのずれ (変位) で、 $a$  は平衡の位置での質点間の距離 (格子間隔) です。  $q_0$  と  $q_{N+1}$  に対しては適当な条件 (境界条件) が課されています。極限  $N \rightarrow \infty, a \rightarrow 0$  を取ると離散的なラベル  $i$  が連続的なラベル  $x$  に変わり、変位  $q_i$  が関数  $q(x)$  に変わり、和  $\sum_i a$  が積分  $\int dx$  に変わり、差分  $\frac{q_i - q_{i-1}}{a}$  が微分  $\frac{dq(x)}{dx}$  に変わります：

$$U(q) = \int dx \left[ \frac{\kappa_1}{2} \left( \frac{dq(x)}{dx} \right)^2 + \frac{\kappa_2}{2} q^2(x) \right] \quad (3.1.2)$$

但し、極限  $N \rightarrow \infty, a \rightarrow 0$  を取っても  $U$  がゼロや無限大にならないように、 $k_1 = \kappa_1/a, k_2 = \kappa_2 a$  とバネ定数に  $a$  依存性を持たせる必要があります。また、連成振動子の分配関数  $Z$  は  $N$  重積分

$$Z \propto \left[ \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dq_i \right] \exp(-\beta U(q_1, \dots, q_n)) \quad (3.1.3)$$

で与えられますが、極限  $N \rightarrow \infty, a \rightarrow 0$  を取るとこれが汎関数積分 (functional integral)

$$Z \propto \left[ \prod_{x \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} dq(x) \right] \exp \left( -\beta \int dx \left[ \frac{\kappa_1}{2} \left( \frac{dq(x)}{dx} \right)^2 + \frac{\kappa_2}{2} q^2(x) \right] \right) \quad (3.1.4)$$

になります。  $\beta U(q)$  が場の理論の作用汎関数  $S[q]$  の役割を果たします。上の議論はかなり大雑把ですが、自由場の理論を離散的模型の連続極限から構成する方法は基本的にこれだけです。この汎関数積分や作用汎関数もとても重要なのですが、今後もっと重要なのは格子間隔  $a$  の逆数が波数 (運動量) の上限  $\Lambda$  を与える、という点です。この  $\Lambda$  をカットオフと呼びます。次章で導入する Wilson の繰り込み群で扱うのはカットオフ付きの場の理論 (カットオフ理論) で、最初から  $\Lambda = \infty$  (または  $a = 0$ ) の理論を取り扱う訳ではありません。  $\Lambda = \infty$  の連続空間上の場の理論は、 $\Lambda$  が有限なカットオフ理論の極限  $\Lambda \rightarrow \infty$  で構成されます。この節では  $\Lambda \sim 1/a$  を明らかにする為に相関関数の観点から連続極限を議論して行くことにします。まずは初等的な Gauss 積分の話から始めましょう。

### 3.1.1 Gauss 積分

#### 1 変数 Gauss 積分

まず 1 変数の Gauss 積分から始めましょう。次の積分を考えます:

$$Z[J] = \int_{-\infty}^{\infty} dq \exp\left(-\frac{1}{2}Aq^2 + Jq\right) \quad (3.1.5)$$

$A$  と  $J$  は実数です。積分が有限になるためには  $A > 0$  でなければならない事に注意しましょう。統計力学や場の理論では相関関数が重要なのですが、今のおもちゃの積分で相関関数に対応するのは次の量です:

$$\langle q^n \rangle = \frac{1}{Z[0]} \int_{-\infty}^{\infty} dq q^n \exp\left(-\frac{1}{2}Aq^2\right) \quad (3.1.6)$$

これを (Gauss 分布での)  $n$  次のモーメントと呼んだりします。  $n$  が奇数の時は奇関数の  $-\infty$  から  $+\infty$  までの積分なので  $\langle q^n \rangle$  はゼロになることに注意しましょう。

さて、今から  $\langle q^n \rangle$  を計算していきたい訳ですが、これは次の様に  $Z[J]$  を  $J$  で  $n$  階微分して最後に  $J = 0$  と置く事で計算できます:

$$\langle q^n \rangle = \frac{1}{Z[0]} \left. \frac{\partial^n Z[J]}{\partial J^n} \right|_{J=0} \quad (3.1.7)$$

従って、 $Z[J]$  が求まれば後は  $J$  について微分していけば良いことになります。この  $Z[J]$  を求めましょう。積分(3.1.5)は指数部分を平方完成して適当に変数変換する事で簡単に計算できます。まず指数部分を平方完成すると

$$-\frac{1}{2}Aq^2 + Jq = -\frac{1}{2}A(q - A^{-1}J)^2 + \frac{1}{2}A^{-1}J^2 \quad (3.1.8)$$

なので、変数  $x$  を  $x = q - A^{-1}J$  で導入して変数変換すると、積分(3.1.5)は次の様に計算されます:

$$\begin{aligned} Z[J] &= e^{-\frac{1}{2}A^{-1}J^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{1}{2}Ax^2\right) \\ &= Z[0] \exp\left(\frac{1}{2}A^{-1}J^2\right) \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

但し、

$$\begin{aligned} Z[0] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{1}{2}Ax^2\right) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{A}} \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

式(3.1.7)の  $\partial^n Z[J]/\partial J^n|_{J=0}$  は  $Z[J]$  の  $J = 0$  周りの Taylor 展開の  $n$  次の展開係数に他ならないので、式(3.1.9)を Taylor 展開しておくくと便利です。計算すると次の様になります:

$$Z[J] = Z[0] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} (A^{-1})^n J^{2n} \quad (3.1.11)$$

これより相関関数  $\langle q^{2n} \rangle$  は次の様に求まります:

$$\begin{aligned} \langle q^{2n} \rangle &= \frac{(2n)!}{2^n n!} (A^{-1})^n \\ &= (2n-1)!! (A^{-1})^n \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

ここで  $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1$  は 2 重階乗 (double factorial) です。以下ではまず上の結果を  $N$  変数の場合に拡張して、その結果を使って相互作用の無い連続場の理論の相関関数を構成していきます。

#### 多変数 Gauss 積分

次に  $N$  変数の Gauss 型積分を考えましょう:

$$Z[\mathbf{J}] = \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dq_N \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i A_{ij} q_j + \sum_{i=1}^N J_i q_i\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dq_N \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{q}^T A \mathbf{q} + \mathbf{J}^T \mathbf{q}\right) \quad (3.1.13)$$

ここで  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)^T$ ,  $\mathbf{J} = (J_1, \dots, J_N)^T$  は実の  $N$  成分縦ベクトルで,  $A = A^T = (A_{ij})$  は実の  $N$  次対称行列です.  $\top$  は転置を表します. この  $N$  変数のおもちゃの積分では  $n$  点相関関数に対応するのは次の量です:

$$\langle q_{i_1} \cdots q_{i_n} \rangle = \frac{1}{Z[\mathbf{0}]} \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dq_N q_{i_1} \cdots q_{i_n} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{q}^T A \mathbf{q}\right) \quad (3.1.14)$$

これは式(3.1.7)同様,  $Z[\mathbf{J}]$  を  $J_{i_1}, J_{i_2}, \dots, J_{i_n}$  で微分して  $(J_1, \dots, J_N) = (0, \dots, 0)$  と置けば得られます:

$$\langle q_{i_1} \cdots q_{i_n} \rangle = \frac{1}{Z[\mathbf{0}]} \frac{\partial^n Z[\mathbf{J}]}{\partial J_{i_1} \cdots \partial J_{i_n}} \Big|_{\mathbf{J}=\mathbf{0}} \quad (3.1.15)$$

従って,  $Z[\mathbf{J}]$  が分かれば相関関数を求めることが出来ます. 以下,  $Z[\mathbf{J}]$  を求めましょう. まず, 式(3.1.8)でやったように指数部分を平方完成します. 対称行列  $A = A^T$  に対しては  $A^{-1} = (A^{-1})^T$  が成り立つことに注意すると, 指数部分は次の様に平方完成出来ます:

$$-\frac{1}{2} \mathbf{q}^T A \mathbf{q} + \mathbf{J}^T \mathbf{q} = -\frac{1}{2} (\mathbf{q} - A^{-1} \mathbf{J})^T A (\mathbf{q} - A^{-1} \mathbf{J}) + \frac{1}{2} \mathbf{J}^T A^{-1} \mathbf{J} \quad (3.1.16)$$

実際,  $(\mathbf{q} - A^{-1} \mathbf{J})^T = \mathbf{q}^T - \mathbf{J}^T (A^{-1})^T = \mathbf{q}^T - \mathbf{J}^T A^{-1}$  となる事を使うと左辺が右辺に一致する事が簡単に分かります. 積分変数  $x_i$  を新たに  $x_i = q_i - \sum_{j=1}^N (A^{-1})_{ij} J_j$  で導入して変数変換を行うと, 積分(3.1.13)は次の様になります:

$$\begin{aligned} Z[\mathbf{J}] &= e^{\frac{1}{2} \mathbf{J}^T A^{-1} \mathbf{J}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_N \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T A \mathbf{x}\right) \\ &= Z[\mathbf{0}] \exp\left(\frac{1}{2} \mathbf{J}^T A^{-1} \mathbf{J}\right) \\ &= Z[\mathbf{0}] \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N J_i (A^{-1})_{ij} J_j\right) \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

但し,

$$Z[\mathbf{0}] = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_N \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T A \mathbf{x}\right) \quad (3.1.18)$$

この  $Z[\mathbf{0}]$  は以下の議論では全然重要ではないのですが, 場の理論の 1 ループ有効作用 (または 1 ループ有効ポテンシャル) の計算で登場する **trace-log** 公式の典型例なのでここで計算しておきましょう. まず, 実対称行列  $A$  に対しては必ずある直交行列  $O$  が存在して  $A = O A_{\text{diag}} O^T$  と対角化できる事に注意します. ここで  $A_{\text{diag}} = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  は対角行列で  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$  は  $A$  の  $N$  個の実の固有値です. 新たな積分変数  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)^T$  を  $\mathbf{x} = O \mathbf{y}$  で導入すると, 積分の指数部分は  $-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = -\frac{1}{2} \mathbf{y}^T O^T O A_{\text{diag}} O^T O \mathbf{y} = -\frac{1}{2} \mathbf{y}^T A_{\text{diag}} \mathbf{y} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \alpha_n y_n^2$  となります. また, この変数変換の Jacobian は  $|\det(\frac{\partial x_i}{\partial y_j})| = |\det(O_{ij})| = |\det O| = 1$  となる事に注意すると,  $Z[\mathbf{0}]$  は次の様に計算されます:

$$\begin{aligned} Z[\mathbf{0}] &= \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dy_N |\det O| \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{y}^T A_{\text{diag}} \mathbf{y}\right) \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 e^{-\frac{1}{2} \alpha_1 y_1^2} \right) \cdots \left( \int_{-\infty}^{\infty} dy_N e^{-\frac{1}{2} \alpha_N y_N^2} \right) \\ &= \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{\alpha_1 \cdots \alpha_N}} \\ &= \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{\det A}} \\ &= (2\pi)^{N/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \log \det A\right) \\ &= (2\pi)^{N/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Tr} \log A\right) \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

但し, 3 行目で  $\det A = \det A_{\text{diag}} = \alpha_1 \cdots \alpha_N$  を使いました. 最後の等号は  $\log \det A = \text{Tr} \log A$  から従います.

さて, 相関関数の話に戻りましょう. まず式(3.1.17)の指数関数を  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$  周りで Taylor 展開すると次の級数表示を得ます:

$$Z[\mathbf{J}] = Z[\mathbf{0}] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{j_1=1}^N \sum_{j_2=1}^N \cdots \sum_{j_{2n-1}=1}^N \sum_{j_{2n}=1}^N (A^{-1})_{j_1 j_2} \cdots (A^{-1})_{j_{2n-1} j_{2n}} J_{j_1} J_{j_2} \cdots J_{j_{2n-1}} J_{j_{2n}} \quad (3.1.20)$$

これと式(3.1.15)及び  $\frac{\partial J_i}{\partial J_j} = \delta_{ij}$  を用いてひたすら  $J_{i_1}, J_{i_2}, \dots, J_{i_n}$  で偏微分していくことで相関関数  $\langle q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_n} \rangle$  が得られます。(1変数の時と同様,  $n$  が奇数の場合はゼロです。) 例えば2点と4点相関関数を計算すると次のようになります:

$$\langle q_{i_1} q_{i_2} \rangle = (A^{-1})_{i_1 i_2} \quad (3.1.21a)$$

$$\langle q_{i_1} q_{i_2} q_{i_3} q_{i_4} \rangle = (A^{-1})_{i_1 i_2} (A^{-1})_{i_3 i_4} + (A^{-1})_{i_1 i_3} (A^{-1})_{i_2 i_4} + (A^{-1})_{i_1 i_4} (A^{-1})_{i_2 i_3} \quad (3.1.21b)$$

多点の相関関数はもっと項が増えて, 一般に  $2n$  点相関関数では  $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\dots 1$  個の項からなります。例えば6点相関関数は  $5!! = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$  個, 8点相関関数は  $7!! = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 105$  個の項からなります。この様に項数は2重階乗で増えていくのですが, 最終的な結果は非常に単純で,  $2n$  点相関関数の場合は単に2点相関関数の  $n$  個の積の和になります。そしてどのような和になっているかと言うと,  $2n$  個の添字から  $n$  個の添字のペアを作る全ての可能な組み合わせの数だけの和になっています。形式的には次の様に書けます:

$$\langle q_{i_1} \dots q_{i_{2n}} \rangle = \sum_{\substack{\text{添字の集合 } \{i_1, \dots, i_{2n}\} \\ \text{から作る } (2n-1)!! \text{ 通りのペアリング} \\ \{(j_1 j_2), \dots, (j_{n-1} j_{2n})\}}} (A^{-1})_{j_1 j_2} \dots (A^{-1})_{j_{n-1} j_{2n}} \quad (3.1.22)$$

この結果は場の理論の文脈では **Wick** の定理として知られており, 確率論の文脈では **Isserlis** の定理として知られています。Wick の定理は Gauss 固定点周りでの摂動論 (Feynman 則) の基礎を成す結果で, これを用いて摂動計算を行います。場の理論の摂動計算については後の章でまた詳しく論じる予定です。

### 3.1.2 1次元連成振動子

以上, 多変数 Gauss 積分を見てきましたが, これらの結果を用いて質量  $m$  の  $N$  個の質点から成る1次元系の古典統計力学を考えて行きましょう。 $i$  番目の質点の運動量を  $p_i$ , 質点の平衡の位置からのずれを  $q_i$  とすると, この系の Hamiltonian は

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + U(q_1, \dots, q_N) \quad (3.1.23)$$

但し,  $U(q_1, \dots, q_N)$  はポテンシャルエネルギーです。前章の第2.1.3節でやったように, この様な系の正準分布での分配関数  $Z$  は運動量積分が実行出来て必ず次の様な形を取ります:

$$Z = \mathcal{N} \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dq_N \exp(-\beta U(q_1, \dots, q_N)) \quad (3.1.24)$$

ここで  $\mathcal{N}$  は運動量積分から来る因子で, 以下の相関関数の議論では全く重要ではありません。

さて,  $U$  が一般的なままでは何も計算出来ないのです。以下ではバネ定数  $k_1$  と  $k_2$  の2種類のバネに繋がれた  $N$  個の連成振動子を考えます。ポテンシャルエネルギーは次の形のものを考えます:

$$U(q_1, \dots, q_N) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \frac{k_1}{2} (q_i - q_{i-1})^2 + \sum_{i=1}^N \frac{k_2}{2} q_i^2 & \text{(周期的境界条件の場合)} \\ \sum_{i=1}^{N+1} \frac{k_1}{2} (q_i - q_{i-1})^2 + \sum_{i=1}^N \frac{k_2}{2} q_i^2 & \text{(Dirichlet \& Neumann 境界条件の場合)} \end{cases} \quad (3.1.25)$$

第1項目の和には  $q_0$  や  $q_{N+1}$  が含まれていますが, これらは表式をコンパクトにする為に仮想的に入れたもので, 実際には  $q_0$  と  $q_{N+1}$  に対応する自由度はありません。適当な境界条件を課してこれらの自由度を消すのですが, 代表的な境界条件としては次の3つがあります。<sup>\*1</sup>

$$\text{(周期的境界条件)} \quad q_0 = q_N \quad (3.1.26a)$$

$$\text{(Dirichlet 境界条件)} \quad q_0 = 0 \quad \& \quad q_{N+1} = 0 \quad (3.1.26b)$$

$$\text{(Neumann 境界条件)} \quad q_0 = q_1 \quad \& \quad q_{N+1} = q_N \quad (3.1.26c)$$

<sup>\*1</sup> 他には Dirichlet 境界条件と Neumann 境界条件を滑らかにつなぐ Robin 境界条件

$$q_0 = (1 - \alpha_L) q_1 \quad \& \quad q_{N+1} = (1 + \alpha_R) q_N \quad (\alpha_L, \alpha_R : \text{定数})$$

などもあります。(但し, この境界条件では行列  $A$  の固有値に負の固有値が現れる場合があります。)



さて、式(3.1.25)は変位  $q_i$  に関して 2 次形式なのでこれはベクトルと行列を用いて次の様に表すことが出来ます:

$$U(q_1, \dots, q_N) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T A \mathbf{q} \quad (3.1.27)$$

ここで  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)^T$  は  $N$  成分縦ベクトルで、 $A = A^T$  は  $N$  次の実対称行列で次式で与えられます:

$$A = k_1 M + k_2 I \quad (3.1.28)$$

但し、 $I = \text{diag}(1, \dots, 1)$  は  $N$  次の単位行列、 $M = M^T$  は  $N$  次の実対称行列で境界条件の違いによって次の 3 通りあります:

$$\text{(周期的境界条件)} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & -1 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ -1 & & & & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.1.29a)$$

$$\text{(Dirichlet 境界条件)} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.1.29b)$$

$$\text{(Neumann 境界条件)} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1.29c)$$

この実対称行列  $A = k_1 M + k_2 I$  を用いると分配関数(3.1.24)は次の様に表されます:

$$Z = \mathcal{N} \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dq_N \exp\left(-\frac{\beta}{2} \mathbf{q}^T A \mathbf{q}\right) \quad (3.1.30)$$

これはまさに前節で取り扱ってきた多変数 Gauss 積分に他なりません。この模型の相関関数は

$$\langle q_{i_1} \cdots q_{i_n} \rangle = \frac{\mathcal{N}}{Z} \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dq_N q_{i_1} \cdots q_{i_n} \exp\left(-\frac{\beta}{2} \mathbf{q}^T A \mathbf{q}\right) \quad (3.1.31)$$

で定義されますが、前節で見て来た様にこれらは全て  $A^{-1}$  の行列要素で書き表されます。特に 2 点相関関数は次の様になります:

$$\langle q_i q_j \rangle = \frac{1}{\beta} (A^{-1})_{ij} \quad (3.1.32)$$

従って問題はこの逆行列を如何にして求めるかという線型代数の問題になります。逆行列の求め方は色々あるでしょうが、一番見通しが良いのは  $A$  の固有値と固有ベクトルを求めて、スペクトル分解 (spectral decomposition) から構成する方法でしょう。実際、固有値方程式

$$A \mathbf{e}_n = \alpha_n \mathbf{e}_n \quad (3.1.33)$$

を満たす  $A$  の固有値  $\{\alpha_n\}$  と規格化された固有ベクトル  $\{\mathbf{e}_n\}$  が全て求めたとすると、実対称行列  $A$  は次の様にスペクトル分解出来ます:

$$A = \sum_n \alpha_n P_n \quad \text{with} \quad P_n = \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^\dagger \quad (3.1.34)$$

ここで、 $P_n$  は射影演算子で次の性質を満たします:

$$\text{(規格直交性)} \quad P_n P_m = \delta_{nm} P_m \quad (3.1.35a)$$

$$\text{(完全性)} \quad \sum_n P_n = I \quad (3.1.35b)$$

ひとたび  $A$  のスペクトル分解が得られると,  $A$  の任意の冪は  $A^\lambda = (\sum_n \alpha_n P_n)^\lambda = \sum_n \alpha_n^\lambda P_n$  で与えられます. より一般に Taylor 展開可能な関数  $f$  に対しては  $f(A) = \sum_n f(\alpha_n) P_n$  になります. また,  $A$  の逆行列は次の様に表されます:

$$A^{-1} = \sum_n \alpha_n^{-1} P_n \quad (3.1.36)$$

従って  $A$  の固有値と固有ベクトルが全て分かれば良い訳ですが, これらを実際に求めるのは結構面倒な計算が必要です. 計算の詳細は省略して答えだけ書くと, 逆行列  $A^{-1}$  の行列要素  $(A^{-1})_{ij}$  は次の様になります:

$$\text{(周期的境界条件)} \quad (A^{-1})_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{n=-[\frac{N}{2}]}^{[\frac{N}{2}]'} \frac{e^{i\frac{2n\pi}{N}(i-j)}}{4k_1 \sin^2(\frac{n\pi}{N}) + k_2} \quad (3.1.37a)$$

$$\text{(Dirichlet 境界条件)} \quad (A^{-1})_{ij} = \frac{1}{2(N+1)} \sum_{n=-N}^N \frac{e^{i\frac{n\pi}{N+1}(i-j)} - e^{i\frac{n\pi}{N+1}(i+j)}}{4k_1 \sin^2(\frac{n\pi}{2(N+1)}) + k_2} \quad (3.1.37b)$$

$$\text{(Neumann 境界条件)} \quad (A^{-1})_{ij} = \frac{1}{2N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \frac{e^{i\frac{n\pi}{N}(i-j)} + e^{i\frac{n\pi}{N}(i+j-1)}}{4k_1 \sin^2(\frac{n\pi}{2N}) + k_2} \quad (3.1.37c)$$

ここで  $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n < x\}$  は  $x$  を超えない最大の整数,  $[x]' = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$  は  $x$  以下の最大の整数を表します. この様に  $N$  が有限だと境界条件によってだいぶ異なる表式になりますが<sup>3</sup>, 上手に  $N \rightarrow \infty$  の熱力学極限を取ると全て次の積分に収束します:<sup>\*2</sup>

$$(A^{-1})_{ij} \rightarrow \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ik(x_i-x_j)}}{\frac{4k_1}{a} \sin^2(\frac{ka}{2}) + \frac{k_2}{a}} \quad \text{as } N \rightarrow \infty \quad (3.1.38)$$

ここで波数  $k$  の上限が  $\pi/a$  である事に注意しましょう. この様な波数 (運動量) の上限をカットオフ (または運動量カットオフ) と呼び,  $\Lambda$  と記します.  $\Lambda = \pi/a$  です. 更に  $a \rightarrow 0$  の連続極限 (continuum limit) を取ると次の表式になります:

$$(A^{-1})_{ij} \rightarrow G(x_i - x_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ik(x_i-x_j)}}{\kappa_1 k^2 + \kappa_2} \quad \text{as } N \rightarrow \infty \ \& \ a \rightarrow 0 \quad (3.1.39)$$

但し,  $a \rightarrow 0$  の極限の下で 2 点相関関数がゼロや無限大にならないよう, バネ定数に

$$k_1 = \frac{\kappa_1}{a} \quad \& \quad k_2 = \kappa_2 a \quad (\text{但し, } \kappa_1, \kappa_2 \text{ は定数}) \quad (3.1.40)$$

と  $a$  依存性を持たせました. 要するに  $a \rightarrow 0, k_1 \rightarrow \infty, k_2 \rightarrow 0$  (但し,  $\kappa_1 = k_1 a, \kappa_2 = k_2/a$  は固定) の極限を取りました. 非自明な連続極限が存在する為には格子模型のパラメータにカットオフ依存性を持たせなければならない, という点が重要です.

さて, 式(3.1.39)の  $G$  は微分演算子  $-\kappa_1 \frac{d^2}{dx^2} + \kappa_2$  に対する Green 関数で次の微分方程式を満たします:

$$\left(-\kappa_1 \frac{d^2}{dx^2} + \kappa_2\right) G(x-y) = \delta(x-y) \quad (3.1.41)$$

実際, 積分表示(3.1.39)を使って計算してみると,  $G$  が上の微分方程式を満たすことは容易に確認できます:

$$\begin{aligned} \left(-\kappa_1 \frac{d^2}{dx^2} + \kappa_2\right) G(x-y) &= \left(-\kappa_1 \frac{d^2}{dx^2} + \kappa_2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ik(x-y)}}{\kappa_1 k^2 + \kappa_2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} (\kappa_1 k^2 + \kappa_2) \frac{e^{ik(x-y)}}{\kappa_1 k^2 + \kappa_2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-y)} \end{aligned}$$

<sup>\*2</sup> 実際, 上手に  $N \rightarrow \infty$  の極限を取ると式(3.1.29a)-(3.1.29c)の3つの行列  $M$  はどれも次の  $\infty \times \infty$  の実対称行列になります:

$$M = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

「上手に」とはどういう事かと思うでしょうが<sup>3</sup>, あまり気にしなくて良いです. (下手に  $N \rightarrow \infty$  の極限を取ると Dirichlet と Neumann の場合は半直線上の理論になってしまい, 境界で反射する波に対応する項  $\pm e^{ik(x_i+x_j)}$  が式(3.1.38)の被積分関数の分子に加わってしまいます.)

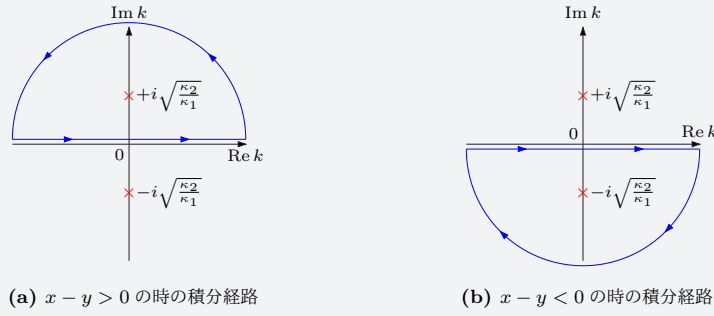


図3.1: 式(3.1.45)1行目の積分の経路変形.  $k = |k|e^{i\theta} = |k|(\cos\theta + i\sin\theta)$  と置くと  $e^{ik(x-y)} = e^{i|k|(x-y)\cos\theta} e^{-|k|(x-y)\sin\theta}$  なので,  $x - y > 0$  の時は式(3.1.45)1行目の被積分関数は  $\sin\theta > 0$  の領域では  $|k| \rightarrow \infty$  でゼロに収束します. 従って,  $x - y > 0$  の時は積分経路を上半平面で閉じることが出来ます. (上半平面の半径無限大の半円に沿った積分はゼロだから足しても結果は変わらない事に注意しましょう.) 一方,  $x - y < 0$  の時は式(3.1.45)1行目の被積分関数は  $\sin\theta < 0$  の領域では  $|k| \rightarrow \infty$  でゼロに収束します. 従って,  $x - y < 0$  の時は積分経路を下半平面で閉じることが出来ます.

$$= \delta(x - y) \quad (3.1.42)$$

また, 微分方程式(3.1.41)は次の様にも書けます:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz D(x-z)G(z-y) = \delta(x-y) \quad (3.1.43)$$

但し,

$$D(x-z) = \left( -\kappa_1 \frac{d^2}{dx^2} + \kappa_2 \right) \delta(x-z) \quad (3.1.44)$$

式(3.1.43)は離散的モデルでの等式  $\sum_{k=1}^N A_{ik}(A^{-1})_{kj} = \delta_{ij}$  の連続極限版に対応します.

最後に積分(3.1.39)を計算することで Green 関数  $G(x-y)$  の関数形を具体的に求めてみましょう. 積分(3.1.39)は留数定理を用いると簡単に計算できます:

$$\begin{aligned} G(x-y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ik(x-y)}}{\kappa_1 k^2 + \kappa_2} \\ &= \frac{1}{\kappa_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ik(x-y)}}{\left(k - i\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\right) \left(k + i\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}\right)} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\kappa_1} \frac{1}{2\pi} \cdot (+2\pi i) \cdot \frac{e^{i(+i\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}})(x-y)}}{+2i\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}} = \frac{e^{-\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}(x-y)}}{2\sqrt{\kappa_1\kappa_2}} & \text{for } x-y > 0 \\ \frac{1}{\kappa_1} \frac{1}{2\pi} \cdot (-2\pi i) \cdot \frac{e^{i(-i\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}})(x-y)}}{-2i\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}} = \frac{e^{+\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}(x-y)}}{2\sqrt{\kappa_1\kappa_2}} & \text{for } x-y < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\kappa_1\kappa_2}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}|x-y|\right) \end{aligned} \quad (3.1.45)$$

但し, 2行目で  $x-y > 0$  の時は積分経路を上半平面の半径無限大の半円で閉じ,  $x-y < 0$  の時は下半平面の半径無限大の半円で閉じて留数定理を用いました(図3.1参照). これより Green 関数は  $G(x-y) \propto \exp(-\frac{|x-y|}{\xi})$  と振る舞うことが分かります. 但し,  $\xi = \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}$  です. この  $\xi$  を相関長 (correlation length) と呼びます. 相関長は Green 関数の典型的な広がり (または 2点間の影響を及ぼし合う距離) を表す量で, 臨界点では無限大に発散します. これについては後々詳しく見ていきます.

### 3.1.3 汎関数積分と汎関数微分

以上, 連成振動子の連続極限を取ることで, 1次元の自由スカラー場の理論の相関関数を構成しました. 最後に汎関数積分を用いた標準的な方法について簡単に述べて終わりにしましょう. 以下述べることは今までの議論から導かれたものではなく, 単に  $N$  変数の場合の素朴な拡張として導入しています. また, 空間次元は一般の  $d \geq 1$  にしています.

まず前節3.1.1で扱った  $N$  変数 Gauss 型積分の連続極限版は次の汎関数積分 (functional integral) に対応します:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \mathcal{N} \left[ \prod_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi(\mathbf{x}) \right] \exp \left( -\frac{1}{2} \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \phi(\mathbf{x}) D(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) + \int d^d \mathbf{x} J(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \right) \\ &= Z[0] \exp \left( \frac{1}{2} \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} J(\mathbf{x}) G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) J(\mathbf{y}) \right) \end{aligned} \quad (3.1.46)$$

$\mathcal{N}$  は適当な規格化因子で、以下では全く重要ではありません。また、 $G$  は  $D$  の「逆行列」で次式を満たします:

$$\int d^d \mathbf{z} D(\mathbf{x} - \mathbf{z}) G(\mathbf{z} - \mathbf{y}) = \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3.1.47)$$

これは等式  $\sum_{k=1}^N A_{ik}(A^{-1})_{kj} = \delta_{ij}$  の連続極限版に対応します。特に自由場の理論の場合、 $D$  は次の微分演算子です:

$$D(\mathbf{x} - \mathbf{z}) = (-\nabla_{\mathbf{x}}^2 + m^2) \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \quad (3.1.48)$$

この時、式(3.1.47)は次の微分方程式になります:

$$(-\nabla_{\mathbf{x}}^2 + m^2) G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3.1.49)$$

即ち、 $G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  は微分演算子  $(-\nabla_{\mathbf{x}}^2 + m^2)$  に対する Green 関数です。Fourier 変換を使うとこの微分方程式は簡単に解けて、次の積分表示を得ます:

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (3.1.50)$$

また、一般の  $n$  点相関関数は次の様に表されます:

$$\begin{aligned} \langle \phi(\mathbf{x}_1) \cdots \phi(\mathbf{x}_n) \rangle &= \frac{\mathcal{N}}{Z[0]} \left[ \prod_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi(\mathbf{x}) \right] \phi(\mathbf{x}_1) \cdots \phi(\mathbf{x}_n) \exp \left( -\frac{1}{2} \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \phi(\mathbf{x}) D(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) \right) \\ &= \frac{\mathcal{N}}{Z[0]} \frac{\delta^n}{\delta J(\mathbf{x}_1) \cdots \delta J(\mathbf{x}_n)} \left[ \prod_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi(\mathbf{x}) \right] \exp \left( -\frac{1}{2} \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \phi(\mathbf{x}) D(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) + \int d^d \mathbf{x} J(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \right) \Bigg|_{J=0} \\ &= \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(\mathbf{x}_1) \cdots \delta J(\mathbf{x}_n)} \Bigg|_{J=0} \end{aligned} \quad (3.1.51)$$

ここで、 $\frac{\delta}{\delta J(\mathbf{x})}$  は汎関数微分 (functional derivative) で、次を満たします:

$$\frac{\delta J(\mathbf{x})}{\delta J(\mathbf{y})} = \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3.1.52)$$

これは等式  $\frac{\partial J_i}{\partial J_j} = \delta_{ij}$  の連続極限版に対応します。 $N$  変数 Gauss 型積分の時の様に、(3.1.51)を用いて相関関数が計算できます。まず分配関数(3.1.46)を  $J$  について級数展開すると

$$Z[J] = Z[0] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \int d^d \mathbf{x}_1 \cdots \int d^d \mathbf{x}_{2n} G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdots G(\mathbf{x}_{2n-1} - \mathbf{x}_{2n}) J(\mathbf{x}_1) \cdots J(\mathbf{x}_{2n}) \quad (3.1.53)$$

あとはこれを(3.1.52)のルールを使って  $J(\mathbf{x}_1), \dots, J(\mathbf{x}_n)$  について汎関数微分をして最後に  $J = 0$  と置けば相関関数が得られます。例えば2点及び4点相関関数は次の様になります:

$$\langle \phi(\mathbf{x}_1) \phi(\mathbf{x}_2) \rangle = G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \quad (3.1.54a)$$

$$\langle \phi(\mathbf{x}_1) \phi(\mathbf{x}_2) \phi(\mathbf{x}_3) \phi(\mathbf{x}_4) \rangle = G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) G(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4) + G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) G(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4) + G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4) G(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \quad (3.1.54b)$$

一般の  $2n$  点相関関数の場合は、式(3.1.22)と同様、2点相関関数の積の和になります:

$$\langle \phi(\mathbf{x}_1) \cdots \phi(\mathbf{x}_{2n}) \rangle = \sum_{\substack{\text{添字の集合 } \{1, \dots, 2n\} \text{ から作る} \\ (2n-1)!! \text{ 通りの添字のペアリング} \\ \{(i_1 i_2), \dots, (i_{2n-1} i_{2n})\}}} G(\mathbf{x}_{i_1} - \mathbf{x}_{i_2}) \cdots G(\mathbf{x}_{i_{2n-1}} - \mathbf{x}_{i_{2n}}) \quad (3.1.55)$$

$N$  変数 Gauss 型積分の時と同様、 $2n$  点相関関数は  $(2n-1)!!$  個の項からなります。式(3.1.55)の結果を Wick の定理と呼び、Gauss 固定点周りの摂動論の基礎を成す重要な結果です。場の理論の摂動計算については必要になった時にまた詳しく議論します。

## Green 関数と相関長

最後に積分(3.1.50)を計算して Green 関数 (2 点相関関数) の関数形を求めておきましょう. 積分の計算の仕方は色々ありますが, いわゆる **Schwinger** のパラメータ表示 (**Schwinger parameterization**) を使って計算するのが最も簡単です. まず次の等式が成り立つ事に注意しましょう:

$$\frac{1}{\mathbf{p}^2 + m^2} = \int_0^\infty d\tau e^{-\tau(\mathbf{p}^2 + m^2)} \quad (3.1.56)$$

この等式は右辺の積分を計算することで容易に確かめられます. 式(3.1.56)を Schwinger のパラメータ表示とか Schwinger の固有時間表示と呼び,  $\tau$  を Schwinger の固有時間と呼んだりします. (但し  $\tau$  の質量次元は  $-2$  で普通の時間の質量次元  $-1$  とは異なります.) これを式(3.1.50)に代入して  $\mathbf{p}$  について平方完成し, 運動量積分を先に実行することで次の表式を得ます:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \int_0^\infty d\tau \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} e^{-\tau(\mathbf{p}^2 + m^2) + i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \\ &= \int_0^\infty d\tau \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} e^{-\tau(\mathbf{p} - i\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{2\tau})^2 - m^2\tau - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{4\tau}} \\ &= \int_0^\infty d\tau e^{-m^2\tau - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{4\tau}} \prod_{j=1}^d \left[ \int_{-\infty}^\infty \frac{dp_j}{2\pi} e^{-\tau(p_j - i\frac{x_j - y_j}{2\tau})^2} \right] \\ &= \int_0^\infty d\tau e^{-m^2\tau - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{4\tau}} \prod_{j=1}^d \left[ \int_{-\infty + i\frac{x_j - y_j}{2\tau}}^{\infty + i\frac{x_j - y_j}{2\tau}} \frac{dp_j}{2\pi} e^{-\tau(p_j - i\frac{x_j - y_j}{2\tau})^2} \right] \\ &= \int_0^\infty d\tau e^{-m^2\tau - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{4\tau}} \prod_{j=1}^d \left[ \int_{-\infty}^\infty \frac{dq_j}{2\pi} e^{-\tau q_j^2} \right] \\ &= \int_0^\infty d\tau \frac{e^{-m^2\tau - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{4\tau}}}{(4\pi\tau)^{\frac{d}{2}}} \end{aligned} \quad (3.1.57)$$

但し, 3 行目で  $p_j$  積分の積分経路を虚軸方向に  $+i\frac{x_j - y_j}{2\tau}$  だけずらし, 4 行目で変数変換  $q_j = p_j - i\frac{x_j - y_j}{2\tau}$  を行いました. 次に積分変数を  $\tau$  から  $s = \frac{2m}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}\tau$  に変数変換すると, 積分(3.1.57)は次の様になります:

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{m}{2\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{\frac{d-2}{2}} \int_0^\infty ds s^{-\frac{d}{2}} \exp \left[ -\frac{m|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{2} \left( s + \frac{1}{s} \right) \right] \quad (3.1.58)$$

最後の積分は第 2 種変形 Bessel 関数  $K_{\frac{d-2}{2}}(m|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$  の積分表示の 2 倍に他ならないので, 結局 Green 関数は次の様に書けます:

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{m}{2\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{\frac{d-2}{2}} K_{\frac{d-2}{2}}(m|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \quad (3.1.59)$$

以下で重要なのはこの Green 関数の漸近形です. 一般に第 2 種変形 Bessel 関数  $K_\nu(z)$  は  $|z| \gg 1$  と  $|z| \ll 1$  で次の様に振る舞います:

$$K_\nu(z) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} (1 + O(\frac{1}{z})) & \text{for } |z| \gg 1 \\ \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left( \frac{2}{z} \right)^\nu (1 + O(z)) & \text{for } |z| \ll 1 \end{cases} \quad (3.1.60)$$

これより Green 関数は  $m|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \gg 1$  と  $m|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \ll 1$  の極限で次の様に振る舞う事が分かります.\*3

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{1}{2m} \left( \frac{m}{2\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{\frac{d-1}{2}} e^{-m|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \left( 1 + O\left(\frac{1}{m|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}\right) \right) & \text{for } m|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \gg 1 \\ \frac{\Gamma(\frac{d-2}{2})}{4\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d-2}} (1 + O(m|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)) & \text{for } m|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \ll 1 \end{cases} \quad (3.1.61)$$

\*3 第 2 種変形 Bessel 関数の漸近形(3.1.60)を持ち出さなくても, Green 関数の  $m|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \gg 1$  の漸近形は積分(3.1.58)を鞍点近似で評価すれば得られます. 一方,  $m|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \ll 1$  の漸近形は式(3.1.57)の被積分関数を  $m = 0$  周りで Taylor 展開して  $s = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{4\tau}$  と変数変換し, Gamma 関数の積分表示  $\Gamma(z) = \int_0^\infty ds s^{z-1} e^{-s}$  を用いれば得られます. 漸近形(3.1.60)を天降りだと感じる人は自分で計算してみましょう.

従って2点間の距離  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  が  $1/m$  よりも十分長い時、2点相関関数は指数関数  $e^{-m|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$  で減衰し、2点間の距離  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  が  $1/m$  よりも十分短い時、2点相関関数は冪関数  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-(d-2)}$  の様に振る舞うことが分かります。これまでの議論でもすでに登場していましたが、この  $1/m$  を相関長 (correlation length) と呼び、 $\xi$  と記します:

$$\xi = \frac{1}{m} \quad (3.1.62)$$

今後はこの相関長が非常に重要な役割を果たしていきます。

## 3.2 Ginzburg-Landau 理論

### この節のまとめ

- $\phi(\mathbf{x}) = (\phi_1(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x}))$  を実の  $n$  成分スカラー場とする。この  $\phi$  を秩序変数とする統計場の理論の分配関数は次の汎関数積分で与えられる:

$$Z = \left[ \prod_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \prod_{a=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_a(\mathbf{x}) \right] \exp(-S[\phi])$$

但し、 $S[\phi]$  は  $n$  成分スカラー場の汎関数で、 $\beta H[\phi]$  に対応。  $S[\phi]$  を作用汎関数と呼ぶ。  $S[\phi]$  は局所性、対称性などを指針に構成し、この節では次の模型 ( $O(n)$  線型  $\sigma$  模型) を調べる:

$$S[\phi] = \int d^d \mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi \cdot \phi + \frac{\lambda}{4!} (\phi \cdot \phi)^2 \right], \quad m^2 = m_0^2 \frac{T - T_c}{T_c}$$

この  $S[\phi]$  は任意の  $n$  次直交行列  $O \in O(n)$  に対して  $S[O\phi] = S[\phi]$  を満たす。

- $\langle \phi \rangle$  を作用汎関数を最小にする場の配位とすると、これは方程式  $\frac{\delta S[\langle \phi \rangle]}{\delta \phi_a(\mathbf{x})} = 0$  の解。特にポテンシャル  $U(\phi) = \frac{m}{2} |\phi|^2 + \frac{\lambda}{4!} |\phi|^4$  を最小にする定数場で、一般性を失うこと無く次の様に選ぶことが出来る:

$$\langle \phi \rangle = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{for } m^2 > 0 \\ \sqrt{\frac{-6m^2}{\lambda}} \mathbf{e}_n & \text{for } m^2 < 0 \end{cases}$$

但し、 $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$ 。この時、作用汎関数は  $\phi(\mathbf{x}) = \langle \phi \rangle$  周りで次の様に展開出来る:

$$\begin{aligned} S[\phi] &= S[\langle \phi \rangle] + \frac{1}{2!} \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \frac{\delta^2 S[\langle \phi \rangle]}{\delta \phi_a(\mathbf{x}) \delta \phi_b(\mathbf{y})} (\phi_a(\mathbf{x}) - \langle \phi_a \rangle) (\phi_b(\mathbf{y}) - \langle \phi_b \rangle) + O(\phi_a - \langle \phi_a \rangle)^3 \\ &= S[\langle \phi \rangle] + \frac{1}{2} \int d^d \mathbf{x} \left[ \sum_{a=1}^{n-1} \{ (\nabla \varphi_a)^2 + M_{\perp}^2 \varphi_a^2 \} + (\nabla \varphi_n)^2 + M_{\parallel}^2 \varphi_n^2 \right] + O(\varphi_a^3) \end{aligned}$$

ここで、 $\varphi_a(\mathbf{x}) = \phi_a(\mathbf{x}) - \langle \phi_a \rangle$  は  $\langle \phi \rangle$  の周りの揺らぎで、 $M_{\perp}^2$  と  $M_{\parallel}^2$  は次式で与えられる:

$$\begin{aligned} M_{\perp}^2 &= m^2 + \frac{\lambda}{6} |\langle \phi \rangle|^2 = \begin{cases} m^2 & \text{for } m^2 > 0 \\ 0 & \text{for } m^2 < 0 \end{cases} \\ M_{\parallel}^2 &= m^2 + \frac{\lambda}{2} |\langle \phi \rangle|^2 = \begin{cases} m^2 & \text{for } m^2 > 0 \\ -2m^2 & \text{for } m^2 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$m^2 < 0$  の秩序相 (対称性が破れた相) では  $M_{\perp}^2 = 0$  なので  $\varphi_a$  は無質量になる。この対称性が破れた相で出現する  $n-1$  個の無質量スカラー場を **Nambu-Goldstone** ボゾンと呼ぶ。

- 揺らぎ  $\varphi$  の 0 次の近似では分配関数は

$$Z \approx \exp(-S[\langle \phi \rangle]) = \exp\left(-V \left[ \frac{m}{2} |\langle \phi \rangle|^2 + \frac{\lambda}{4!} |\langle \phi \rangle|^4 \right]\right)$$

但し、 $V = \int d^d \mathbf{x}$  は系の体積。これより単位体積当たりの自由エネルギーは

$$\beta f = \frac{m}{2} |\langle \phi \rangle|^2 + \frac{\lambda}{4!} |\langle \phi \rangle|^4 = \begin{cases} 0 & \text{for } m^2 > 0 \\ -\frac{3}{2} \frac{m^4}{\lambda} & \text{for } m^2 < 0 \end{cases}$$

この単位体積当たりの自由エネルギーから平均場近似での臨界指数が再現できる。揺らぎの第ゼロ近似を特に **Landau 理論** と呼ぶ。

- 揺らぎ  $\varphi$  の 2 次の近似の範囲では分配関数は Gauss 型の汎関数積分になって次の様に計算される:

$$Z \approx \exp \left( -S[\langle \phi \rangle] - \frac{1}{2} \text{Tr} \log \frac{\delta^2 S[\langle \phi \rangle]}{\delta \phi_a(\mathbf{x}) \delta \phi_b(\mathbf{y})} \right)$$

これより単位体積当たりの自由エネルギーは次の様になる:

$$\beta f = \frac{m^2}{2} |\langle \phi \rangle|^2 + \frac{\lambda}{4!} |\langle \phi \rangle|^4 + \frac{n-1}{2} \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \log(\mathbf{p}^2 + M_{\perp}^2) + \frac{1}{2} \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \log(\mathbf{p}^2 + M_{\parallel}^2)$$

この単位体積当たりの自由エネルギーから比熱  $c = -T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2}$  を計算すると次の様になる:

$$c \approx \begin{cases} 0 + \frac{n}{2} \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{m_0^4}{(\mathbf{p}^2 + m^2)^2} & \text{for } m^2 > 0 \\ -\frac{3m_0^4}{\lambda} + \frac{1}{2} \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{4m_0^4}{(\mathbf{p}^2 - 2m^2)^2} & \text{for } m^2 < 0 \end{cases}$$

2 項目の積分を評価すると,  $d > 4$  では揺らぎの効果が臨界指数に寄与しないが,  $d < 4$  では一般に揺らぎの効果が臨界指数に影響を与える事が分かる.  $d = 4$  を  $O(n)$  線型  $\sigma$  模型の臨界次元 (**critical dimension**) と呼ぶ.

第2.2節で平均場近似での Ising 模型の単位格子当たりの自由エネルギー  $f(T, h)$  は次の形を取ることを見ました:

$$f(T, h) = \frac{1}{2} T_c m^2 - T \log \left[ 2 \cosh \left( \frac{T_c}{T} m + \frac{1}{T} h \right) \right] \quad (3.2.1)$$

但し, 単位格子当たりの磁化  $m$  は次の自己無撞着条件の解でなければなりません:

$$m = \tanh \left( \frac{T_c}{T} m + \frac{1}{T} h \right) \quad (3.2.2)$$

この自己無撞着条件は式(3.2.1)を  $m$  の関数と思って,  $m$  が  $f$  の極値を与えるための条件  $\frac{\partial f}{\partial m} = 0$  と等価です:

$$\frac{\partial f}{\partial m} = T_c m - T_c \tanh \left( \frac{T_c}{T} m + \frac{1}{T} h \right) = 0 \quad (3.2.3)$$

これを踏まえて, 以下,  $f$  を  $m$  の関数としてみましょう. まず臨界点のごく近傍では自発磁化は非常に小さいので, 臨界点近傍の振る舞いは式(3.2.1)の  $m = 0$  周りでの Taylor 展開の最初の数項だけで決まる筈です. 地道に展開すると次の様になります:

$$f = f_0(T) + \frac{1}{2} a(T) m^2 + b(T) m^4 + O(m^6) - c(T) h m + \dots \quad (3.2.4)$$

ここで展開係数  $a(T)$ ,  $b(T)$ ,  $c(T)$  は温度  $T$  に関する解析関数で,  $T = T_c$  周りで次の様に Taylor 展開されます:

$$a(T) = 0 + a_1(T - T_c) + O(T - T_c)^2 \quad (3.2.5a)$$

$$b(T) = b_0 + b_1(T - T_c) + O(T - T_c)^2 \quad (3.2.5b)$$

$$c(T) = c_0 + c_1(T - T_c) + O(T - T_c)^2 \quad (3.2.5c)$$

Ising 模型の平均場近似では  $f_0(T) = -T \log 2$ ,  $a_1 = 1$ ,  $b_0 = \frac{T_c}{12}$ ,  $b_1 = -\frac{1}{4}$ ,  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = -\frac{1}{T_c}$  となります. 係数  $a(T)$  の  $T = T_c$  周りの Taylor 展開の初項  $a_0$  はゼロである事, 及び  $a_1$  と  $b_0$  は共に正である事に注意しましょう. 上の展開(3.2.5a)-(3.2.5c)の最低次の項だけを使うと単位体積当たりの自由エネルギーは次の様に書けます:

$$f = f_0(T) + \frac{1}{2} a_1(T - T_c) m^2 + b_0 m^4 - h m \quad (3.2.6)$$

この秩序変数  $m$  に関する  $f$  の多項式近似を用いると, 次の様に平均場近似の結果が全て再現出来ます:

• 秩序変数: 自発磁化と臨界指数  $\beta$  と  $\delta$

まず自己無撞着条件は  $\frac{\partial f}{\partial m} = 0$  に対応するので, まずこの方程式を解いて自発磁化を求めましょう. 式(3.2.6)を  $m$  で偏微分することで次の条件を得ます:

$$\frac{\partial f}{\partial m} = a_1(T - T_c)m + 4b_0m^3 - h = 0 \quad (3.2.7)$$

特に  $h = 0$  ではこれは  $4b_0m(m^2 + \frac{a_1}{2b_0}(T - T_c)) = 0$  になります. これより  $h = 0$  での自発磁化は

$$m(T, 0) = \begin{cases} 0 & \text{for } T > T_c \\ \sqrt{\frac{a_1}{4b_0}(T_c - T)} & \text{for } T < T_c \end{cases} \quad (3.2.8)$$

となります. 臨界指数  $\beta$  は  $m(T, 0) \sim |T - T_c|^\beta$  で定義されていた事を思い出すと, 式(3.2.8)より  $\beta = \frac{1}{2}$  と読み取れます. また  $T = T_c$  では式(3.2.7)は  $4b_0m^3 - h = 0$  になります. これより臨界温度  $T = T_c$  直上での単位体積当たりの磁化  $m(T_c, h)$  は

$$m(T_c, h) = \left(\frac{h}{4b_0}\right)^{1/3} \quad (3.2.9)$$

となります. 臨界指数  $\delta$  は  $m(T_c, h) \sim |h|^\delta$  で定義されていた事を思い出すと, 式(3.2.9)より  $\delta = 3$  と読み取れます.

• 応答関数: 等温帯磁率と臨界指数  $\gamma$

次に等温帯磁率を考えましょう. まず条件  $a_1(T - T_c)m + 4b_0m^3 - h = 0$  の両辺を  $h$  で偏微分すると

$$(a_1(T - T_c) + 12b_0m^2) \frac{\partial m}{\partial h} - 1 = 0 \quad (3.2.10)$$

これよりゼロ磁場での等温帯磁率は

$$\chi_T(T, 0) = \frac{\partial m(T, 0)}{\partial h} = \frac{1}{a_1(T - T_c) + 12b_0m^2(T, 0)} = \begin{cases} \frac{1}{a_1(T - T_c)} & \text{for } T > T_c \\ \frac{1}{2a_1(T_c - T)} & \text{for } T < T_c \end{cases} \quad (3.2.11)$$

となります. 臨界指数  $\gamma$  は  $\chi_T(T, 0) \sim |T - T_c|^{-\gamma}$  と定義されていた事を思い出すと, 式(3.2.11)より  $\gamma = 1$  と読み取れます.

• 応答関数: 定磁場比熱と臨界指数  $\alpha$

最後に定磁場比熱を考えましょう. まず式(3.2.8)を式(3.2.6)に代入することで,  $h = 0$  での単位体積当たりの自由エネルギーは次の様になる事が分かります:

$$f(T, 0) = \begin{cases} f_0(T) & \text{for } T > T_c \\ f_0(T) - \frac{a_1^2}{16b_0}(T_c - T)^2 & \text{for } T < T_c \end{cases} \quad (3.2.12)$$

よって  $h = 0$  での定磁場比熱は

$$c_h(T, 0) = -T \frac{\partial^2 f(T, 0)}{\partial T^2} = \begin{cases} c_0(T) & \text{for } T > T_c \\ c_0(T) - \frac{a_1^2}{8b_0} & \text{for } T < T_c \end{cases} \quad (3.2.13)$$

但し,  $c_0(T) = -T \frac{\partial^2 f_0(T)}{\partial T^2}$  です. (Ising 模型の平均場近似の場合は  $f_0(T) = -T \log 2$  なので  $c_0(T) = 0$  です.) 臨界指数  $\alpha$  は  $c_h(T, 0) \sim |T - T_c|^{-\alpha}$  で定義されていた事を思い出すと, 式(3.2.13)より  $\alpha = 0$  と読み取れます.

以上まとめると, 臨界指数は  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} = \{0, \frac{1}{2}, 1, 3\}$  となって第2.2節で求めた平均場近似の結果と一致します. 重要なのは臨界指数は展開係数  $a_1, b_0$  には全く依存しない所で, 臨界指数の値は  $f$  の次の性質だけで決まっています:

- $h = 0$  の時,  $f$  は  $m$  の偶関数である (即ち,  $h = 0$  では  $\mathbb{Z}_2$  変換  $m \mapsto -m$  の下で不変である)
- 臨界点  $T = T_c$  近傍では  $m$  は微小で,  $f$  は  $m = 0$  周りで Taylor 展開可能
- Taylor 展開の展開係数は温度依存性を持ち, 臨界点近傍では展開係数も  $T = T_c$  周りで Taylor 展開可能.  $m^2$  と  $m^4$  の係数  $a(T)$  と  $b(T)$  の  $T = T_c$  周りの展開は次の様になる:

$$a(T) = a_1(T - T_c) + O(T - T_c)^2, \quad a_1 > 0 \quad (3.2.14a)$$

$$b(T) = b_0 + O(T - T_c), \quad b_0 > 0 \quad (3.2.14b)$$



この様に秩序変数  $m$  と系の対称性および展開係数の温度依存性だけに基づいて  $f$  を  $m$  の多項式で表し解析するのが **Landau 理論** (または Landau の現象論) です。Landau 理論の利点はその柔軟性で、系の秩序変数と対称性が分かれば容易に他の系にも拡張することが出来ます。良く使われるの秩序変数  $m$  を  $n$  成分実ベクトル  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)$  に拡張し、 $\mathbb{Z}_2$  変換  $m \mapsto -m$  の下での不変性を  $n$  次元回転  $\mathbf{m} \mapsto O\mathbf{m}$  ( $O \in O(n)$ ) の下での不変性に拡張したものです。この時、単位体積当たりの自由エネルギー(3.2.6)は次の様に拡張されます:

$$f = f_0(T) + \frac{1}{2}a_1(T - T_c)\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} + b_0(\mathbf{m} \cdot \mathbf{m})^2 - \mathbf{h} \cdot \mathbf{m} \quad (3.2.15)$$

この模型は後で解析するのでここでは調べませんが、この  $f$  を使って臨界指数を計算すると全て平均場近似の結果と一致します。Landau 理論は解析が容易で便利ですが、秩序変数を定数として扱うのでその空間的揺らぎを調べる事が出来ません。これを解消する為に秩序変数に座標依存性を持たせて  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$  とし、分配関数が次の汎関数積分で与えられる場の理論を考えます:

$$Z = \left[ \prod_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \prod_{a=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} dm_a(\mathbf{x}) \right] \exp(-\beta H[\mathbf{m}]) \quad (3.2.16)$$

ここで Hamiltonian  $H[\mathbf{m}]$  は  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$  の汎関数で、式(3.2.4)に倣って次の様な積分で表されます:

$$\begin{aligned} H[\mathbf{m}] = \int d^d \mathbf{x} & \left[ \frac{1}{2}a_1(T - T_c)\mathbf{m}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{m}(\mathbf{x}) + b_0(\mathbf{m}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{m}(\mathbf{x}))^2 + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} \text{ の高次の項}) \right. \\ & + \frac{K}{2} \nabla \mathbf{m}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{m}(\mathbf{x}) + (\text{高階微分の項}) \\ & \left. - \mathbf{h}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{m}(\mathbf{x}) + \dots \right] \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

秩序変数を空間依存性を持った局所的な量  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$  にした事で微分項  $\nabla \mathbf{m} \cdot \nabla \mathbf{m}$  が入るとというのが新しい点です。前節の連成振動子の連続極限で見た様に、この微分項は秩序変数の最近接相互作用が起源となっていると見なせます。この微分項を特に**運動項 (kinetic term)**、また  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}$  の項を**質量項 (mass term)**と呼びます。  $a_1, b_0, K$  は模型のパラメータで、これらは全て正の量です。この様な秩序変数と対称性に基づいた場の理論の現象論を **Ginzburg-Landau 理論** (または Ginzburg-Landau-Wilson 理論) と呼びます。

以下では秩序変数  $\mathbf{m}$  を適当に規格化し直して  $\phi = \sqrt{\frac{K}{T_c}} \mathbf{m}$  とし、汎関数  $\beta H \approx \beta_c H$  の運動項が常に  $\frac{1}{2} |\nabla \phi|^2$  となるようにします。(  $\beta = \frac{1}{T}$  を  $T = T_c$  周りで展開した時の初項は  $\beta_c = \frac{1}{T_c}$  になります。 ) 式(3.2.6)に倣って  $\phi$  の 4 次の項までを取り入れると次の様な模型になります:

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \beta_c H[\sqrt{\frac{T_c}{K}} \phi] \\ &= \int d^d \mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} |\nabla \phi(\mathbf{x})|^2 + \frac{1}{2} m^2 |\phi(\mathbf{x})|^2 + \frac{\lambda}{4!} |\phi(\mathbf{x})|^4 \right] \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

但し、

$$m^2 = m_0^2 \tau \quad \text{with} \quad \tau = \frac{T - T_c}{T_c} \quad (3.2.19)$$

で、  $m_0^2 > 0$ ,  $\lambda > 0$  は共に正のパラメータです。また、簡単の為  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  としました。秩序変数を規格化し直した事で汎関数積分(3.2.16)の全体の規格化が定数だけずれますが、それは全く重要でないので捨てると、この理論の分配関数は次の汎関数積分で与えられます:

$$Z = \left[ \prod_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \prod_{a=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_a(\mathbf{x}) \right] \exp(-S[\phi]) \quad (3.2.20)$$

汎関数  $S[\phi]$  を作用汎関数 (**action functional**) とか単に作用 (**action**) と呼び、作用汎関数が式(3.2.18)で与えられるスカラー場の理論を特に  **$O(n)$  線型  $\sigma$  模型** と呼びます。特に  $n = 1$  の時を  $\phi^4$  模型 (または  $\phi^4$  理論) と呼びます。

さて、汎関数積分(3.2.20)が厳密に計算できればそれから単位体積当たりの自由エネルギー  $f = -\frac{\log Z}{\beta V}$  が求まるのですが、それはとても無理な問題なので、通常は適当に近似を行って汎関数積分(3.2.20)を評価します。以下では鞍点近似 (**saddlepoint approximation**) を用いて Landau 理論からのずれを見て行くことにしましょう\*4。これは  $\langle \phi \rangle$  を作用汎関数を最小にする場の配位として、  $S[\phi]$  を

\*4 正確には鞍点近似が良い近似になる為にはあるパラメータ  $\alpha \gg 1$  が存在して Boltzmann 因子が  $e^{-\alpha S}$  の形をとる場合ですが、ここでは気にしない事にします。因みに場の量子論では  $\alpha$  として  $1/\hbar$  を採用する事が出来て、  $\hbar \rightarrow 0$  の古典極限が  $\alpha \rightarrow \infty$  に対応します。今の  $O(n)$  線型  $\sigma$  模型では適当にパラメータの再定義や補助場の導入をすると  $\alpha = n$  とする事も可能で、  $n \rightarrow \infty$  のラージ  $n$  極限では鞍点近似が良い近似になります。但し、この節では特にラージ  $n$  極限を考えている訳ではありません。

$\phi(\mathbf{x}) = \langle \phi \rangle$  周りで Taylor 展開した表式

$$S[\phi] = S[\langle \phi \rangle] + \frac{1}{2!} \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \frac{\delta^2 S[\langle \phi \rangle]}{\delta \phi_a(\mathbf{x}) \delta \phi_b(\mathbf{y})} (\phi_a(\mathbf{x}) - \langle \phi_a \rangle) (\phi_b(\mathbf{y}) - \langle \phi_b \rangle) + O(\phi_a - \langle \phi_a \rangle)^3 \quad (3.2.21)$$

を用います。  $\langle \phi \rangle$  からのずれ (揺らぎ)  $\phi(\mathbf{x}) - \langle \phi \rangle$  の 2 次の近似だと、汎関数積分は単なる Gauss 型積分になって厳密に計算することが可能です。以下、この揺らぎの 2 次の近似で単位体積当たりの自由エネルギーを求めて、それを用いて比熱を計算してみましょう。

### 3.2.1 $O(n)$ 線型 $\sigma$ 模型

まず  $S[\phi]$  を最小にする場の配位  $\langle \phi \rangle$  を求めましょう。普通の関数  $f(x)$  の場合、 $f(x)$  の極値は  $\frac{df(x)}{dx} = 0$  の解として求まりますが、汎関数の場合も同様で、作用汎関数の極値は方程式  $\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi_a(\mathbf{x})} = 0$  の解として求まります。式(3.2.18)を使って計算すると、この極値の条件は次の非線形偏微分方程式になります:

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi_a(\mathbf{x})} = -\nabla^2 \phi_a(\mathbf{x}) + m^2 \phi_a(\mathbf{x}) + \frac{\lambda}{6} |\phi(\mathbf{x})|^2 \phi_a(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.2.22)$$

特に最小値を与えるのは  $\mathbf{x}$  依存性の無い定数解です。これは式(3.2.18)の運動項  $\frac{1}{2} |\nabla \phi(\mathbf{x})|^2 \geq 0$  は常に正定値なので、 $\nabla \phi(\mathbf{x}) = 0$  の場合、即ち  $\phi(\mathbf{x})$  が定数の場合が最も  $S[\phi]$  の値が小さくなるからです。従って作用汎関数を最小にする場の配位は方程式

$$m^2 \phi_a + \frac{\lambda}{6} |\phi|^2 \phi_a = \frac{\lambda}{6} \phi_a \left( |\phi|^2 + \frac{6m^2}{\lambda} \right) = 0 \quad (3.2.23)$$

の解です。これは簡単に解けて、 $m^2 > 0$  の場合は  $|\phi| = 0$ 、 $m^2 < 0$  の場合は  $|\phi| = \sqrt{\frac{-6m^2}{\lambda}}$  となります。これで  $\langle \phi \rangle$  の大きさが求まった事になります。  $\langle \phi \rangle$  の向きは  $O(n)$  対称性からどの方向でも良く、一般性を失う事無く  $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$  方向に選べます。結局、作用汎関数を最小にする場の配位は次の様に書けます:

$$\langle \phi \rangle = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{for } m^2 > 0 \\ \sqrt{\frac{-6m^2}{\lambda}} \mathbf{e}_n & \text{for } m^2 < 0 \end{cases} \quad (3.2.24)$$

次にこの  $\langle \phi \rangle$  周りの揺らぎを考えましょう:

$$\phi(\mathbf{x}) = \langle \phi \rangle + \varphi(\mathbf{x}) \quad (3.2.25)$$

作用汎関数を  $\phi(\mathbf{x}) = \langle \phi \rangle = \langle \phi_n \rangle \mathbf{e}_n$  周りで Taylor 展開すると次の様になります。<sup>\*5</sup>

$$\begin{aligned} S[\phi] &= S[\langle \phi \rangle + \varphi] \\ &= \sum_{j=0}^4 \frac{1}{j!} \int d^d \mathbf{x}_1 \cdots \int d^d \mathbf{x}_j \frac{\delta^j S[\langle \phi \rangle]}{\delta \phi_{a_1}(\mathbf{x}_1) \cdots \delta \phi_{a_j}(\mathbf{x}_j)} \varphi_{a_1}(\mathbf{x}_1) \cdots \varphi_{a_j}(\mathbf{x}_j) \\ &= S[\langle \phi \rangle] + \frac{1}{2} \int d^d \mathbf{x} \left[ \sum_{a=1}^{n-1} \{ (\nabla \varphi_a)^2 + M_{\perp}^2 \varphi_a^2 \} + (\nabla \varphi_n)^2 + M_{\parallel}^2 \varphi_n^2 \right] + \frac{\lambda \langle \phi_n \rangle}{3!} \int d^d \mathbf{x} \varphi_n |\varphi|^2 + \frac{\lambda}{4!} \int d^d \mathbf{x} |\varphi|^4 \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

但し、 $M_{\perp}^2$  ( $M_{\parallel}^2$ ) は  $\langle \phi \rangle = \langle \phi_n \rangle \mathbf{e}_n$  に直交 (平行) する場の配位の質量パラメータで次式で与えられます:

$$M_{\perp}^2 = m^2 + \frac{\lambda}{6} |\langle \phi \rangle|^2 = \begin{cases} m^2 & \text{for } m^2 > 0 \\ 0 & \text{for } m^2 < 0 \end{cases} \quad (3.2.27a)$$

$$M_{\parallel}^2 = m^2 + \frac{\lambda}{2} |\langle \phi \rangle|^2 = \begin{cases} m^2 & \text{for } m^2 > 0 \\ -2m^2 & \text{for } m^2 < 0 \end{cases} \quad (3.2.27b)$$

<sup>\*5</sup> 式(3.2.26)の書き方だと  $S[\phi]$  の汎関数微分をして計算していったと思うかもしれませんが、勿論それでも計算できるのですが、それよりも単に式(3.2.25)を式(3.2.18)に代入して計算した方がミス無く計算できます。代入すると、(3.2.18)の各項は次の様になります:

$$\begin{aligned} |\nabla \phi|^2 &= |\nabla \varphi|^2 \\ |\phi|^2 &= |\langle \phi \rangle|^2 + 2\langle \phi \rangle \cdot \varphi + |\varphi|^2 \\ |\phi|^4 &= |\langle \phi \rangle|^4 + 4|\langle \phi \rangle|^2 \langle \phi \rangle \cdot \varphi + 4(\langle \phi \rangle \cdot \varphi)^2 + 2|\langle \phi \rangle|^2 |\varphi|^2 + 4(\langle \phi \rangle \cdot \varphi) |\varphi|^2 + |\varphi|^4 \end{aligned}$$

これと式(3.2.24)を使ってまとめると式(3.2.26)になります。

$T < T_c$  の秩序相では  $M_{\perp}^2$  と  $M_{\parallel}^2$  の値が異なるので、作用汎関数はもはや  $O(n)$  変換  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)^{\top} \mapsto O(\varphi_1, \dots, \varphi_n)^{\top}$  ( $O \in O(n)$ ) の下で不変ではなく、 $O(n-1)$  変換  $(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})^{\top} \mapsto O(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})^{\top}$  ( $O \in O(n-1)$ ) の下でのみ不変です。この事を「対称性が  $O(n)$  から  $O(n-1)$  へ自発的に破れた」と言い表します。また、 $T < T_c$  の秩序相では  $\varphi_a$  ( $a = 1, \dots, n-1$ ) の質量項はゼロになることにも注意しましょう。この様に秩序相 (対称性が  $O(n)$  から  $O(n-1)$  へ破れた相) で質量項がゼロになる  $n-1$  個のスカラー場を **Nambu-Goldstone** ボゾンと呼びます。

さて、次に分配関数を評価しましょう。式(3.2.26)の  $\varphi$  の 3 次と 4 次の項は無視すると、分配関数は Gauss 型積分になって次の様に計算されます：

$$\begin{aligned} Z &= \left[ \prod_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \prod_{a=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_a(\mathbf{x}) \right] \exp(-S[\phi]) \\ &\approx e^{-S[\langle \phi \rangle]} \left[ \prod_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \prod_{a=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_a(\mathbf{x}) \right] \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \frac{\delta^2 S[\langle \phi \rangle]}{\delta \phi_a(\mathbf{x}) \delta \phi_b(\mathbf{y})} \varphi_a(\mathbf{x}) \varphi_b(\mathbf{y})\right) \\ &\approx \exp\left(-S[\langle \phi \rangle] - \frac{1}{2} \text{Tr} \log \frac{\delta^2 S[\langle \phi \rangle]}{\delta \phi_a(\mathbf{x}) \delta \phi_b(\mathbf{y})}\right) \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

ここで、 $\frac{\delta^2 S[\langle \phi \rangle]}{\delta \phi_a(\mathbf{x}) \delta \phi_b(\mathbf{y})}$  は 2 階微分演算子で、式(3.2.26)の 2 行目第 2 項を部分積分する事で次の様に読み取れます：<sup>\*6</sup>

$$\frac{\delta^2 S[\langle \phi \rangle]}{\delta \phi_a(\mathbf{x}) \delta \phi_b(\mathbf{y})} = \begin{pmatrix} I_{n-1}(-\nabla_{\mathbf{x}}^2 + M_{\perp}^2) \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & \\ & (-\nabla_{\mathbf{x}}^2 + M_{\parallel}^2) \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{pmatrix} \quad (3.2.29)$$

但し、 $I_{n-1}$  は  $(n-1)$  次の単位行列です。式(3.2.28)より単位体積当たりの自由エネルギーは次の様に求まります：

$$\begin{aligned} \beta f &= \frac{1}{V} \left( S[\langle \phi \rangle] + \frac{1}{2} \text{Tr} \log \frac{\delta^2 S[\langle \phi \rangle]}{\delta \phi_a(\mathbf{x}) \delta \phi_b(\mathbf{y})} \right) \\ &= \beta f_{\text{mean}} + \frac{n-1}{2} \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \log(\mathbf{p}^2 + M_{\perp}^2) + \frac{1}{2} \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \log(\mathbf{p}^2 + M_{\parallel}^2) \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

ここで  $f_{\text{mean}}$  は平均場近似 (または Landau 理論) での単位体積当たりの自由エネルギーで次式で与えられます：

$$\beta f_{\text{mean}} = \frac{1}{2} m^2 |\langle \phi \rangle|^2 + \frac{\lambda}{4!} |\langle \phi \rangle|^4 = \begin{cases} 0 & \text{for } m^2 > 0 \\ -\frac{3m^4}{2\lambda} = -\frac{3m_0^4}{2\lambda} \tau^{-2} & \text{for } m^2 < 0 \end{cases} \quad (3.2.31)$$

単位体積当たりの自由エネルギーが求まったので比熱  $c = -T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \approx -T_c \frac{\partial^2 f}{\partial T^2}$  は次の様に計算されます：

$$\begin{aligned} c &\approx -T_c \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \\ &= -T_c^2 \frac{\partial^2 (\beta_c f)}{\partial T^2} \\ &= -\frac{\partial^2 (\beta_c f)}{\partial \tau^2} \\ &\approx \begin{cases} c_{\text{mean}} + \frac{n}{2} \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{m_0^4}{(\mathbf{p}^2 + m^2)^2} & \text{for } m^2 > 0 \\ c_{\text{mean}} + \frac{1}{2} \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{4m_0^4}{(\mathbf{p}^2 - 2m^2)^2} & \text{for } m^2 < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

但し、2 行目で  $\beta f \approx \beta_c f$  を使いました。また、 $c_{\text{mean}}$  は平均場近似 (Landau 理論) での比熱で次式で与えられます：

$$c_{\text{mean}} \approx -\frac{\partial^2 (\beta_c f_{\text{mean}})}{\partial \tau^2} \approx \begin{cases} 0 & \text{for } T > T_c \\ -\frac{3m_0^4}{\lambda} & \text{for } T < T_c \end{cases} \quad (3.2.33)$$

<sup>\*6</sup> 式(3.2.26)の 2 行目第 2 項を部分積分すると次の様に書けます：

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int d^d \mathbf{x} \left[ \sum_{a=1}^{n-1} \{(\nabla \varphi_a)^2 + M_{\perp}^2 \varphi_a^2\} + (\nabla \varphi_n)^2 + M_{\parallel}^2 \varphi_n^2 \right] = \frac{1}{2} \int d^d \mathbf{x} \left[ \sum_{a=1}^{n-1} \varphi_a(-\nabla^2 + M_{\perp}^2) \varphi_a + \varphi_n(-\nabla^2 + M_{\parallel}^2) \varphi_n \right] \\ &= \frac{1}{2} \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \begin{pmatrix} \varphi_{\perp}(\mathbf{x}) \\ \varphi_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}^{\top} \begin{pmatrix} I_{n-1}(-\nabla_{\mathbf{x}}^2 + M_{\perp}^2) \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & \\ & (-\nabla_{\mathbf{x}}^2 + M_{\parallel}^2) \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{\perp}(\mathbf{y}) \\ \varphi_n(\mathbf{y}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

但し、 $\varphi_{\perp} = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})^{\top}$  で  $I_{n-1}$  は  $(n-1)$  次単位行列です。また、部分積分した時に出る表面項は捨てました。これより式(3.2.29)が読み取れます。

さて、式(3.2.32)の運動量積分は真面目に評価しないといけません。まず今まで明確にできてきませんでしたが、今扱っている場の理論はカットオフ理論で、従って運動量の上限  $|\mathbf{p}| < \Lambda$  があります。第3.1.2節で見た様に  $1/\Lambda$  が格子間隔  $a$  に対応します。  $\Lambda^2/m^2 \gg 1$  とすると、一般に次が成り立ちます：<sup>\*7</sup>

$$\int_{|\mathbf{p}| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 + m^2)^a} = \frac{\Omega(d)}{(2\pi)^d} \int_0^\Lambda dp \frac{p^{d-1}}{(p^2 + m^2)^a} \approx \begin{cases} \Lambda^{d-2a} & \text{for } d > 2a \\ m^{d-2a} & \text{for } d < 2a \end{cases} \quad (3.2.34)$$

但し、  $\Omega(d) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$  です。式(3.2.34)の  $a = 2$  の場合を使うと比熱(3.2.32)は結局次の様に評価されます：

$$c \approx \begin{cases} c_{\text{mean}} + A_{\pm} \Lambda^{d-4} & \text{for } d > 4 \\ c_{\text{mean}} + B_{\pm} |T - T_c|^{-\frac{4-d}{2}} & \text{for } d < 4 \end{cases} \quad (3.2.35)$$

ここで  $A_{\pm}$  と  $B_{\pm}$  は温度に依存しない係数で、  $T > T_c$  と  $T < T_c$  で異なる値を取ります。  $d > 4$  では揺らぎの寄与は大きな定数  $\Lambda^{d-4}$  ですが温度依存性は無く、従って臨界指数は平均場近似の値  $\alpha = 0$  から変更はありません。一方、  $d < 4$  では揺らぎの寄与は温度依存性  $|T - T_c|^{-\frac{4-d}{2}}$  を持ち、これの方が平均場近似の結果  $|T - T_c|^0$  よりも特異性が強いので臨界指数の値が  $\alpha = \frac{4-d}{2}$  と変更を受けます。この様に  $d = 4$  を境にして平均場近似の結果がそのまま正しいか変更を受けるかが変わってきます。  $d = 4$  を  $O(n)$  線型  $\sigma$  模型の臨界次元 (critical dimension) と呼びます<sup>\*8</sup>。

### 3.3 Ginzburg の判定基準

#### この節のまとめ

- $T \neq T_c$  では 2 点相関関数  $G^{(2)}(\mathbf{x})$  は  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  で指数関数的に減衰する：

$$G^{(2)}(\mathbf{x}) \propto e^{-|\mathbf{x}|/\xi} \quad \text{as } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$$

指数関数の指数部分は無次元でなければならないから、必ず長さの次元を持った量  $\xi > 0$  が登場する。この  $\xi$  を相関長 (correlation length) と呼ぶ。  $T = T_c$  近傍では相関長は非常に大きくなり、次の幕則に従って発散する：

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu} \quad \text{as } T \rightarrow T_c$$

幕の指数  $\nu$  は臨界現象を特徴付ける新たな臨界指数で、自由場の理論の場合は  $\nu = 1/2$ 。

- $T = T_c$  直上では 2 点相関関数は次の幕関数の様に振る舞う：

$$G^{(2)}(\mathbf{x}) \sim \frac{1}{|\mathbf{x}|^{d-2+\eta}}$$

$\eta$  は新たな臨界指数で、自由場の理論の場合は  $\eta = 0$ 。

- 等温帯磁率  $\chi_T$  は秩序変数の連結 2 点相関関数を用いて次の様に表される：

$$\chi_T = \beta \int d^d \mathbf{x} G_c^{(2)}(\mathbf{x})$$

但し、連結 2 点相関関数  $G_c^{(2)}$  は次式で定義される：

$$G_c^{(2)}(\mathbf{x}) = \langle (\phi(\mathbf{x}) - \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle) (\phi(\mathbf{0}) - \langle \phi(\mathbf{0}) \rangle) \rangle = \langle \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{0}) \rangle - \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle \langle \phi(\mathbf{0}) \rangle$$

<sup>\*7</sup>  $x = p^2/\Lambda^2$  または  $x = p^2/m^2$  と変数変換すると、式(3.2.34)1 行目の積分は  $\Lambda^2/m^2 \gg 1$  の仮定の下で次の様に評価されます：

$$\int_0^\Lambda dp \frac{p^{d-1}}{(p^2 + m^2)^a} = \begin{cases} \frac{\Lambda^{d-2a}}{2} \int_0^1 dx \frac{x^{\frac{d}{2}-1}}{(x + \frac{m^2}{\Lambda^2})^a} \approx \frac{\Lambda^{d-2a}}{2} \int_0^1 dx x^{\frac{d}{2}-a-1} = \frac{\Lambda^{d-2a}}{d-2a} & \text{for } d > 2a \\ \frac{m^{d-2a}}{2} \int_0^{\frac{\Lambda^2}{m^2}} dx \frac{x^{\frac{d}{2}-1}}{(1+x)^a} \approx \frac{m^{d-2a}}{2} \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{d}{2}-1}}{(1+x)^a} = \frac{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(a-\frac{d}{2})}{2\Gamma(a)} m^{d-2a} & \text{for } d < 2a \end{cases}$$

$d < 2a$  での表式はベータ関数の積分表示  $B(p, q) = \int_0^\infty dx \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$  (但し、  $\text{Re } p > 0$  &  $\text{Re } q > 0$ ) から従います。

<sup>\*8</sup> 正確には上部臨界次元 (upper critical dimension) と呼びます。上部臨界次元より上の空間次元では臨界指数は平均場近似のものが厳密な結果を与えます。因みに下部臨界次元 (lower critical dimension) というのもあって、これはその次元以下では有限温度で相転移は起きない、という空間次元です。

- 臨界指数  $\{\gamma, \eta, \nu\}$  の間には次の関係式が成り立つ:

$$\gamma = \nu(2 - \eta)$$

- 平均場近似が無矛盾である為には、揺らぎ (期待値からのずれ) の寄与が期待値からの寄与に比べて無視出来る程小さければ良い。揺らぎの広がり (相関長程度) である事を考慮すると、秩序相で次の条件が成り立てば平均場近似が適用できる:

$$\left| \frac{\int_{|\mathbf{x}| < \xi} d^d \mathbf{x} \langle (\phi(\mathbf{x}) - \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle) (\phi(\mathbf{0}) - \langle \phi(\mathbf{0}) \rangle) \rangle}{\int_{|\mathbf{x}| < \xi} d^d \mathbf{x} \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle \langle \phi(\mathbf{0}) \rangle} \right| \ll 1 \quad \text{for } T < T_c$$

この左辺は統計学で言う所の相対標準偏差 (または変動係数) の 2 乗に対応する量で、標準偏差と期待値の比の 2 乗に対応する。上の条件を **Ginzburg の判定基準 (Ginzburg criterion)** と呼ぶ。左辺の積分を評価すると、空間次元  $d$  が次の条件を満たす時、平均場近似が無矛盾である事が分かる:

$$d > d_c = \frac{2\beta + \gamma}{\nu}$$

この  $d_c$  を (上部) 臨界次元と呼ぶ。平均場近似と自由場の理論の結果  $\{\beta, \gamma, \nu\} = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\}$  を使うと  $d_c = 4$ 。

前節で鞍点近似を用いて比熱を評価し、揺らぎの効果が臨界指数  $\alpha$  にどう影響するかを調べました。そして揺らぎの 2 次の近似では、 $d > 4$  では揺らぎの寄与は臨界指数  $\alpha$  に影響しないが、 $d < 4$  では揺らぎの寄与が無視できず臨界指数  $\alpha$  が変更を受けることを見ました。この節では、一般の与えられた系で平均場近似が適用可能かどうかを判定する **Ginzburg の判定基準 (Ginzburg criterion)** を紹介します。その為にまず新たな臨界指数  $\nu$  と  $\eta$  を導入しましょう。以下、簡単の為  $\mathbb{Z}_2$  不変な 1 成分スカラー場の理論を想定して議論をしていきます。

### 3.3.1 臨界指数 $\nu$ と $\eta$

#### 相関長と臨界指数 $\nu$

式(3.1.61)で見た様に、自由スカラー場の理論の Green 関数  $G(\mathbf{x})$  は、 $|\mathbf{x}| \gg 1/m$  で次の様に振る舞います:

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{2m} \left( \frac{m}{2\pi|\mathbf{x}|} \right)^{\frac{d-1}{2}} e^{-m|\mathbf{x}|} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{m|\mathbf{x}|}\right) \right] \quad \text{for } |\mathbf{x}| \gg \frac{1}{m} \quad (3.3.1)$$

一般に臨界点  $T = T_c$  から外れた場の理論の 2 点相関関数  $G^{(2)}(\mathbf{x}) = \langle \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{0}) \rangle$  は無限遠で指数関数的に減衰して次の様に振る舞います:<sup>\*9</sup>

$$G^{(2)}(\mathbf{x}) \sim e^{-|\mathbf{x}|/\xi} \quad \text{for } |\mathbf{x}| \gg \xi \quad (3.3.2)$$

指数関数の指数部分は無次元でなければならないので、必ず長さの次元を持った量  $\xi$  が登場します。この長さの次元を持った量  $\xi$  は 2 点相関関数の典型的な空間的広がりを表す量で、**相関長 (correlation length)** と呼びます。相関長は  $T = T_c$  近傍で次の冪則に従って発散します:<sup>\*10</sup>

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu} \quad (3.3.3)$$

特に臨界点  $T = T_c$  直上では  $\xi = \infty$  になります。この冪の指数  $\nu$  は臨界現象を特徴付ける新たな臨界指数です。自由場の理論の場合、式(3.3.1)から相関長は  $\xi = 1/m$  と読み取れます。また、式(3.2.19)に示した様に Ginzburg-Landau 理論では  $m \sim |T - T_c|^{1/2}$  なので、自由場の理論での臨界指数  $\nu$  は

$$\nu = \frac{1}{2} \quad (\text{自由場の理論}) \quad (3.3.4)$$

となります。

<sup>\*9</sup> 一般の相互作用がある場の理論の相関関数を  $G^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \langle \phi(\mathbf{x}_1) \dots \phi(\mathbf{x}_n) \rangle$  と書く事にして、自由場の理論の Green 関数を  $G(\mathbf{x})$  と書く事にします。

<sup>\*10</sup> 正確には空間次元が下部臨界次元よりも上の場合、冪則に従って発散します。(脚注\*8で触れた様に、下部臨界次元とはその次元より下では有限温度で相転移が起きないという次元です。) 但し、物理的に最も興味ある  $d = 3$  は下部臨界次元よりも上なので、この点はあまり気にしない事にします。

2点相関関数と臨界指数  $\eta$ 

式(3.1.61)で見た様に、自由スカラー場の理論の Green 関数  $G(\mathbf{x})$  は、 $|\mathbf{x}| \ll 1/m$  で次の様に振る舞います:

$$G(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{d-2}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{|\mathbf{x}|^{d-2}} [1 + O(m|\mathbf{x}|)] \quad \text{for } |\mathbf{x}| \ll \frac{1}{m} \quad (3.3.5)$$

一般に、 $|\mathbf{x}|$  が相関長  $\xi$  と比べてずっと小さい時、2点相関関数は次の冪関数の様に振る舞います:

$$G^{(2)}(\mathbf{x}) \sim \frac{1}{|\mathbf{x}|^{d-2+\eta}} \quad \text{for } |\mathbf{x}| \ll \xi \quad (3.3.6)$$

特に臨界点  $T = T_c$  直上では  $\xi = \infty$  なので全ての長さのスケールで2点相関関数はこの冪関数の様に振る舞います。この冪の指数  $\eta$  も臨界現象を特徴付ける新たな臨界指数です。自由場の理論の場合、式(3.3.5)から臨界指数  $\eta$  は次の様に読み取れます:

$$\eta = 0 \quad (\text{自由場の理論}) \quad (3.3.7)$$

因みに場の理論の文脈では、臨界指数  $\eta$  (の  $1/2$  倍) は秩序変数の異常次元 (anomalous dimension) と呼ばれ、通常  $\gamma$  と記します。 $\eta = 2\gamma$  です。

## 3.3.2 応答関数と連結2点相関関数

以上、新しく臨界指数  $\eta$  と  $\nu$  を導入しましたが、これらは今まで扱って来た臨界指数  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  と独立ではありません。これを見おきましょう。

まず今までも何度も登場して来ましたが、応答関数は相関関数で書けます。例えば Ising 模型の場合、等温帯磁率  $\chi_T$  は次の様に表せました:

$$\begin{aligned} \chi_T &= \frac{\beta}{N} \sum_i \sum_j \langle (S_i - \langle S_i \rangle)(S_j - \langle S_j \rangle) \rangle \\ &= \frac{\beta}{N} \sum_i \sum_j \langle (S_i S_j) - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle \rangle \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

この場の理論の対応物を考えましょう。場の理論では格子数  $N$  は体積  $V$  に置き換わり、和  $\sum_i$  は積分  $\int d^d \mathbf{x}$  に置き換わり、スピン変数  $S_i$  は場  $\phi(\mathbf{x})$  に置き換わります。結局、応答関数は次の相関関数の積分で与えられます:<sup>\*11</sup>

$$\chi_T = \frac{\beta}{V} \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} G_c^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3.3.9)$$

但し、 $G_c^{(2)}$  は連結2点相関関数 (connected two-point correlation function) と呼ばれる量で、次式で定義されます:

$$\begin{aligned} G_c^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \langle (\phi(\mathbf{x}) - \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle) (\phi(\mathbf{y}) - \langle \phi(\mathbf{y}) \rangle) \rangle \\ &= \langle \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{y}) \rangle - \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle \langle \phi(\mathbf{y}) \rangle \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

この右辺の表式からは明らかではありませんが、並進対称性がある系では  $G_c^{(2)}$  は差  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  にしか依りません。よって、 $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{y}$  と変数変換すると、式(3.3.9)の  $\mathbf{y}$  積分は単に系の体積  $\int d^d \mathbf{y} = V$  を与えるだけになって、結局次の様になります:

$$\begin{aligned} \chi_T &= \frac{\beta}{V} \int d^d \mathbf{x}' \left( \int d^d \mathbf{y} \right) G_c^{(2)}(\mathbf{x}') \\ &= \beta \int d^d \mathbf{x} G_c^{(2)}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

但し、最後の等号で  $\mathbf{x}'$  を  $\mathbf{x}$  と書き直しました。これで応答関数が連結2点相関関数の空間積分で与えられることが分かりました。但し、応用上は連結2点相関関数の運動量表示を用いた表式の方が便利です。 $G_c^{(2)}(\mathbf{x})$  の Fourier 積分表示

$$G_c^{(2)}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \tilde{G}_c^{(2)}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.3.12)$$

<sup>\*11</sup> 今は無限体積の系を考えているので、実際には  $V = \infty$  です。 $V = \infty$  なら(3.3.9)はゼロになるんじゃないかと思うかもしれませんが、うまいこと  $V$  がキャンセルして式(3.3.9)は有限量になります。いい加減な式変形だと思うかもしれませんが(実際、いい加減なのですが)、物理では頻繁にこういう議論をするので、こういう雑な議論にも慣れておきましょう。ちゃんとやるには有限体積の系から出発して熱力学極限及び連続極限を取るべきです。有限体積でも周期的境界条件が課されている場合は並進対称性があります。

を式(3.3.11)に代入すると次式を得ます:

$$\begin{aligned}\chi_T &= \beta \int d^d \mathbf{x} \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \tilde{G}_c^{(2)}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \\ &= \beta \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \tilde{G}_c^{(2)}(\mathbf{p}) (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p}) \\ &= \beta \tilde{G}_c^{(2)}(\mathbf{0})\end{aligned}\quad (3.3.13)$$

但し、2番目の等号で  $\mathbf{x}$  積分を先に実行してデルタ関数を出して、3番目の等号で  $\mathbf{p}$  積分を実行しました。結局、応答関数は運動量表示連結2点相関関数  $\tilde{G}_c^{(2)}(\mathbf{p})$  の  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$  での値で与えられる事が分かりました。ここで例を挙げておきましょう。前節3.2.1で議論した Ginzburg-Landau 理論の  $\varphi_n$  を考えます。この連結2点相関関数は普通の自由場の理論の2点相関関数と同じで次のようになります:

$$\tilde{G}_c^{(2)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\mathbf{p}^2 + M_{\parallel}^2} = \begin{cases} \frac{1}{\mathbf{p}^2 + m^2} & \text{for } m^2 > 0 \\ \frac{1}{\mathbf{p}^2 - 2m^2} & \text{for } m^2 < 0 \end{cases}\quad (3.3.14)$$

式(3.2.19)で示した様に Ginzburg-Landau 理論では  $m^2 = m_0^2(T - T_c)/T_c$  である事に注意すると、応答関数は次のようになります:

$$\chi_T = \beta \tilde{G}_c^{(2)}(\mathbf{0}) = \frac{\beta}{M_{\parallel}^2} = \begin{cases} \frac{\beta}{m^2} = \frac{1}{m_0^2(T - T_c)} + O(T - T_c)^0 & \text{for } T > T_c \\ \frac{\beta}{-2m^2} = \frac{1}{2m_0^2(T_c - T)} + O(T - T_c)^0 & \text{for } T < T_c \end{cases}\quad (3.3.15)$$

但し、 $T = T_c$  近傍では逆温度  $\beta = \frac{1}{T} = \frac{1}{T_c} \frac{1}{1 + (T - T_c)/T_c} = \frac{1}{T_c} + O(T - T_c)$  と振る舞うことを使いました。式(3.3.15)は平均場理論及び Landau 理論の結果(2.2.33)と(3.2.11)に(全体に掛かる定数倍を除いて)完全に一致している事に注意しましょう。

さて、連結2点相関関数は  $\langle \phi(\mathbf{x}) \rangle = 0$  の  $\mathbb{Z}_2$  対称性が破れていない相では普通の2点相関関数と全く同じです。また、 $\langle \phi(\mathbf{x}) \rangle \neq 0$  の  $\mathbb{Z}_2$  対称性が破れた相でも新たに  $\varphi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) - \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle$  と定義すれば、 $\phi$  の連結2点相関関数は  $\varphi$  の2点相関関数と同じになります。ですので、前節で議論した2点相関関数の  $|\mathbf{x}| \gg \xi$  と  $|\mathbf{x}| \ll \xi$  での振る舞いはそのまま連結2点相関関数にも適用されます。これを使って応答関数の温度依存性を見積もってみましょう。連結2点相関関数  $G_c^{(2)}(\mathbf{x})$  は  $|\mathbf{x}|$  が相関長  $\xi$  よりも長い領域では指数関数的に減少するので、積分(3.3.11)に主に寄与するのは  $|\mathbf{x}| < \xi$  の領域の寄与です。  $|\mathbf{x}| \ll \xi$  の領域では  $G_c^{(2)}(\mathbf{x})$  は冪関数の様に振る舞うので、応答関数は次の様に見積もる事ができます:<sup>\*12</sup>

$$\begin{aligned}\chi_T &\sim \beta \int_{|\mathbf{x}| < \xi} d^d \mathbf{x} G_c^{(2)}(\mathbf{x}) \\ &\sim \int_{|\mathbf{x}| < \xi} d^d \mathbf{x} |\mathbf{x}|^{-(d-2+\eta)} \\ &= \xi^{2-\eta} \int_{|\mathbf{u}| < 1} d^d \mathbf{u} |\mathbf{u}|^{-(d-2+\eta)} \\ &\sim \xi^{2-\eta} \\ &\sim |T - T_c|^{-\nu(2-\eta)}\end{aligned}\quad (3.3.16)$$

ところで、応答関数の臨界点近傍での温度依存性は  $\chi_T \sim |T - T_c|^{-\gamma}$  だったので、これより臨界指数の間に次の関係式が成り立つことが分かります:

$$\gamma = \nu(2 - \eta)\quad (3.3.17)$$

これは第2.3節で議論したスケーリング関係式の一種です。式(3.3.17)を特に Fisher の等式と呼んだりします。

### 3.3.3 平均場近似の適用限界と Ginzburg の判定基準

以上、臨界指数  $\nu$  と  $\eta$  を導入しましたが、これを用いて平均場近似が適用可能かどうかを判定する条件式を紹介して終わりにしましょう。

前節3.2.1で見たように、秩序変数  $\phi(\mathbf{x})$  の期待値  $\langle \phi(\mathbf{x}) \rangle$  からのずれ(揺らぎ)の寄与が無視出来なくなる時、平均場近似が破綻します。従って、平均場近似が適用出来る為には揺らぎ  $\phi(\mathbf{x}) - \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle$  の寄与が期待値  $\langle \phi(\mathbf{x}) \rangle$  の寄与に比べて十分小さければ良いです。秩

<sup>\*12</sup> 式(3.3.16)1行目の最右辺の積分は  $\eta \geq 2$  で無限大に発散してしましますが、表1.1に示した様に実際には  $\eta$  はとても小さい値なので気にしないで良いです。

序変数は  $T < T_c$  で期待値を持つ事、及び揺らぎの空間的広がりには相関長  $\xi$  程度である事を考慮すると、次の条件が成り立っていれば平均場近似が無矛盾であると言えます:

$$\left| \frac{\int_{|\mathbf{x}| < \xi} d^d \mathbf{x} \langle (\phi(\mathbf{x}) - \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle) (\phi(\mathbf{0}) - \langle \phi(\mathbf{0}) \rangle) \rangle}{\int_{|\mathbf{x}| < \xi} d^d \mathbf{x} \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle \langle \phi(\mathbf{0}) \rangle} \right| \ll 1 \quad \text{for } T < T_c \quad (3.3.18)$$

この条件を **Ginzburg の判定基準 (Ginzburg criterion)** と呼びます。この式の左辺は統計学で言う所の相対標準偏差 (**relative standard deviation**) の2乗に対応します。以下、この条件式を Landau 理論 (平均場理論) の結果を使った場合と臨界指数  $\nu$  を使った場合の2通りで評価してみましょう。

#### Landau 理論の結果を使った場合

まず Landau 理論の結果が自己矛盾を示さないかどうか、条件式(3.3.18)を吟味してみましょう。以下、第3.2.1節で扱った  $\phi_n = \langle \phi_n \rangle + \varphi_n$  を考えます。まず式(3.3.18)の左辺の分子は次の様に評価できます:

$$\begin{aligned} (\text{分子}) &= \int_{|\mathbf{x}| < \xi} d^d \mathbf{x} \langle (\phi_n(\mathbf{x}) - \langle \phi_n(\mathbf{x}) \rangle) (\phi_n(\mathbf{0}) - \langle \phi_n(\mathbf{0}) \rangle) \rangle \\ &= \int_{|\mathbf{x}| < \xi} d^d \mathbf{x} G_c^{(2)}(\mathbf{x}) \\ &\sim \frac{1}{\beta} \chi_T \\ &= \xi^2 \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

但し、途中で式(3.3.15)を使いました。また、 $\xi = \frac{1}{M_{\parallel}} = \frac{1}{\sqrt{-2m^2}}$  です。次に式(3.3.18)の左辺の分母を評価しましょう。まず式(3.2.24)で示した様に、Landau 理論では秩序変数の期待値は  $|\langle \phi_n(\mathbf{x}) \rangle|^2 = \frac{-6m^2}{\lambda} = \frac{3}{\lambda \xi^2}$  となります。ここで、式(3.2.33)から従う  $T = T_c$  での比熱のギャップ  $\Delta c_{\text{mean}} = \frac{3m_0^4}{\lambda} = \frac{3}{\lambda \xi_0^4}$  を用いると結合定数  $\lambda$  が消せて  $|\langle \phi_n(\mathbf{x}) \rangle|^2 = \frac{\xi_0^4 \Delta c_{\text{mean}}}{\xi^2}$  と書けます。但し、 $\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{2m_0}}$  は  $T = 0$  での相関長です。これを使うと左辺の分母は次の様に評価できます:

$$\begin{aligned} (\text{分母}) &= \int_{|\mathbf{x}| < \xi} d^d \mathbf{x} \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle \langle \phi(\mathbf{0}) \rangle \\ &\sim \xi^d \frac{\xi_0^4 \Delta c_{\text{mean}}}{\xi^2} \\ &= \xi^{d-2} \xi_0^4 \Delta c_{\text{mean}} \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

式(3.3.19)と(3.3.20)の比を取って整理すると、条件式(3.3.18)は次の様に書く事が出来ます:

$$\frac{\xi^2}{\xi^{d-2} \xi_0^4 \Delta c_{\text{mean}}} \ll 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right)^{4-d} \ll \xi_0^d \Delta c_{\text{mean}} \quad (3.3.21)$$

これは  $\xi/\xi_0 = |T - T_c|^{-1/2}$  を使うと次の様な温度  $T$  に対する条件となります:

$$\left| \frac{T - T_c}{T_c} \right|^{\frac{4-d}{2}} \gg \frac{1}{\xi_0^d \Delta c_{\text{mean}}} \quad (3.3.22)$$

式(2.1.29)の理想気体の場合で見た様に、比熱はおおよそ粒子数密度に比例するので、右辺の  $\xi_0^d \Delta c_{\text{mean}}$  は大体一辺の長さ  $\xi_0$  の立方体の中に入っている粒子数を表します。よって、 $\frac{1}{\xi_0^d \Delta c_{\text{mean}}}$  は常に1より小さいです。一方、温度  $T$  が  $0 < T < 2T_c$  の範囲にある時は  $|\frac{T - T_c}{T_c}| < 1$  なので、 $d > 4$  なら臨界点  $T = T_c$  近傍では  $|\frac{T - T_c}{T_c}|^{(4-d)/2} > 1$  となって条件式(3.3.22)は必ず満たされる事が分かります。一方、 $d < 4$  の時は一般に条件(3.3.22)が満たされず平均場近似が破綻してしまいます。但し、 $d < 4$  なら常に平均場近似が駄目なのかと言うとそうでは無くて、実は  $\xi_0$  の値によっては条件(3.3.22)を破る温度の範囲が非常に狭く、 $d < 4$  でも平均場近似が良い近似を与える事があります。その典型例が普通の超伝導相転移です。強磁性体の強磁性相転移や  $^4\text{He}$  の超流動相転移では  $\xi_0$  は大体  $1\text{\AA}$  程度なのですが、普通の超伝導相転移では  $\xi_0$  が大体  $10^3\text{\AA}$  程度で、 $T = T_c$  の極めて近傍以外では  $d = 3$  でも条件式(3.3.21)を満たす事が知られています。条件式(3.3.22)を破る  $T = T_c$  のごく近傍は通常の実験精度では到達できない領域で、実際、普通の超伝導相転移の臨界指数は平均場近似の値と非常に近い値が観測されているそうです。(但し、高温超伝導の場合は違います。)



臨界指数  $\nu$  を使った場合

次に、Landau 理論の結果を用いずに臨界指数の議論だけで条件式(3.3.18)を吟味してみましょう。まず(3.3.18)左辺の分子は次の様に評価できます:

$$\begin{aligned}
 (\text{分子}) &= \int_{|\mathbf{x}| < \xi} d^d \mathbf{x} \langle (\phi(\mathbf{x}) - \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle) (\phi(\mathbf{0}) - \langle \phi(\mathbf{0}) \rangle) \rangle \\
 &= \int_{|\mathbf{x}| < \xi} d^d \mathbf{x} G_c^{(2)}(\mathbf{x}) \\
 &\sim \chi_T \\
 &\sim |\tau|^{-\gamma}
 \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

但し、 $\tau = (T - T_c)/T_c$  です。一方、左辺の分母は次の様に評価できます:

$$\begin{aligned}
 (\text{分母}) &= \int_{|\mathbf{x}| < \xi} d^d \mathbf{x} \langle \phi(\mathbf{x}) \rangle \langle \phi(\mathbf{0}) \rangle \\
 &\sim \int_{|\mathbf{x}| < \xi} d^d \mathbf{x} |\tau|^{2\beta} \\
 &\sim \xi^d |\tau|^{2\beta} \\
 &\sim |\tau|^{-d\nu + 2\beta}
 \end{aligned} \tag{3.3.24}$$

これらの比を取ると、条件式(3.3.18)は次の様になります:

$$|\tau|^{-\gamma + d\nu - 2\beta} \ll 1 \tag{3.3.25}$$

臨界点近傍では  $|\tau| < 1$  なので、この式(3.3.25)が成り立つためには次の条件が成り立っていなければなりません:

$$-\gamma + d\nu - 2\beta > 0 \tag{3.3.26}$$

これは空間次元  $d$  に対して次の条件を与えます:

$$d > d_c := \frac{2\beta + \gamma}{\nu} \tag{3.3.27}$$

この  $d_c$  を (上部) 臨界次元と呼びます。以上で  $d > d_c$  なら平均場近似が適用出来る事が分かりました。平均場近似の結果  $\{\beta, \gamma, \nu\} = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\}$  を使うと  $d_c = 4$  となって、上の Landau 理論を使った結果と一致します。

## 参考文献

Ginzburg-Landau 理論について解説した教科書は沢山あります。私が参考にしたのは次の教科書です:

- [1] N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group* (Westview Press, 1992)
- [2] M. Kardar, *Statistical Physics of Fields* (Cambridge University Press, 2007)
- [3] P. Coleman, *Introduction to Many-Body Physics* (Cambridge University Press, 2015)

[1] の第 5 章及び第 6 章, [2] の第 2 章及び第 3 章, [3] の第 11 章が Ginzburg-Landau 理論の解説になっています。特に Coleman の教科書の第 11 章にとっても詳しい解説が載っています。Coleman の教科書は特に相転移・臨界現象の教科書ではありませんが、この講義ではちゃんと扱わなかった超流動相転移や超伝導相転移についても詳しく論じており、この辺の物理に興味がある人は読んでみると良いでしょう。



## 第 4 章

# Wilson の繰り込み群

臨界点近傍で成り立つスケーリング則，そして臨界現象の普遍性は繰り込み群変換の固定点でほぼ完全に決定されます．この章では 1971 年に Kenneth G. Wilson によって創始された繰り込み群の基礎について学びます．

### 4.1 繰り込み群変換

#### この節のまとめ

- 繰り込み群変換 (renormalization group transformation) は分配関数を不変に保つ 1 径数族の変換群．繰り込み群変換が作用する対象は，運動項が規格化されたカットオフ  $\Lambda$  の場の理論の作用汎関数全体から成る汎関数の集合．この集合を理論空間 (theory space) と呼び， $\mathcal{S}$  と記す．
- 繰り込み群変換  $R_t$  は正数  $t$  をパラメータとする連続変換で，或る作用汎関数  $S \in \mathcal{S}$  を別の作用汎関数  $S_t \in \mathcal{S}$  に写す：

$$\begin{array}{ccc} R_t : \mathcal{S} & \rightarrow & \mathcal{S} \\ \cup & & \cup \\ S & \mapsto & R_t(S) = S_t \end{array}$$

但し， $R_t$  は群の掛け算則  $R_t R_{t'} = R_{t+t'}$  を満たす様に構成される．特に微小変換は次の微分方程式になる：

$$\frac{dS_t}{dt} = G(S_t) \quad \text{with} \quad S_{t=0} = S$$

ここで， $G$  は極限  $G(S_t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{R_{\delta t}(S_t) - S_t}{\delta t}$  で定義される繰り込み群変換の無限小生成子で，一般には極めて非線型な変換．上の 1 階非線型常微分方程式を繰り込み群のフロー方程式 (renormalization group flow equation) と呼ぶ．フロー方程式に従う理論  $S_t$  は， $t = 0$  での初期値を  $S$  として理論空間の中で或る 1 次元の軌道を描く．この軌道を繰り込み群のフロー (renormalization group flow) と呼ぶ．

- 繰り込み群変換  $R_t : \mathcal{S} \ni S \mapsto S_t \in \mathcal{S}$  が分配関数を不変に保つ事の帰結として，理論  $S$  と  $S_t$  の運動量表示相関関数  $\langle \cdot \rangle_S$  と  $\langle \cdot \rangle_{S_t}$  の間には一般に次の等式が成り立つ：

$$\langle \tilde{\phi}(e^{-t}\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}(e^{-t}\mathbf{p}_n) \rangle_S = \exp\left(n \int_0^t d\tau (d - \Delta(S_\tau))\right) \langle \tilde{\phi}(\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}(\mathbf{p}_n) \rangle_{S_t}, \quad \forall |\mathbf{p}_i| \in (0, \Lambda)$$

ここで， $\Delta(S_\tau)$  は理論  $S_\tau = R_\tau(S)$  ( $\tau \in (0, t)$ ) で決まる或る定数である．この等式を運動量表示相関関数に対する繰り込み群方程式 (renormalization group equation) と呼ぶ．

- 上の繰り込み群方程式は，理論  $S$  の低運動量スケール  $e^{-t}|\mathbf{p}_i| \in (0, e^{-t}\Lambda)$  の相関関数は，理論  $S_t$  の運動量スケール  $|\mathbf{p}_i| \in (0, \Lambda)$  の相関関数と定数倍を除いて一致する，という事を意味する．この意味で，繰り込み群変換した理論  $R_t(S) = S_t$  は理論  $S$  の低エネルギー有効理論 (low energy effective theory) である．

今まで見て来たように，流体や強磁性体といった微視的には全く異なる系でも，2 次相転移の臨界点近傍では種々の応答関数が同じ冪則に従って振る舞い，臨界指数  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \nu\}$  が全て一致する場合があります．この様に，臨界指数が全て一致する事を臨界現象の普遍性 (universality) と呼び，臨界指数が全て等しい理論の集合を普遍類 (universality class) と呼びます．普遍類は空間次元  $d$  や系の対称性，秩序変数の成分数，相互作用の種類などで決まって，代表的なものとしては次の 3 つがあります (表 4.1 参照)：

臨界指数	平均場近似	3次元 Ising 普遍類			3次元 XY 普遍類	3次元 Heisenberg 普遍類	
		気液相転移	秩序・無秩序相転移		超流動相転移	強磁性相転移	
		Xe	2成分混合液体	$\beta$ 真鍮	$^4\text{He}$	Fe	Ni
$\alpha$	0	$< 0.2$	$0.113 \pm 0.005$	$0.05 \pm 0.06$	$-0.014 \pm 0.016$	$-0.03 \pm 0.12$	$0.04 \pm 0.12$
$\beta$	$\frac{1}{2}$	$0.35 \pm 0.015$	$0.322 \pm 0.002$	$0.305 \pm 0.005$	$0.34 \pm 0.01$	$0.37 \pm 0.01$	$0.358 \pm 0.003$
$\gamma$	1	$1.3^{+0.1}_{-0.2}$	$1.239 \pm 0.002$	$1.25 \pm 0.02$	$1.33 \pm 0.03$	$1.33 \pm 0.015$	$1.33 \pm 0.02$
$\delta$	3	$4.3^{+0.6}_{-0.3}$	$4.85 \pm 0.03$	–	$3.95 \pm 0.15$	$4.3 \pm 0.1$	$4.29 \pm 0.05$
$\eta$	0	$0.1 \pm 0.1$	$0.017 \pm 0.015$	$0.08 \pm 0.07$	$0.021 \pm 0.05$	$0.07 \pm 0.04$	$0.041 \pm 0.01$
$\nu$	$\frac{1}{2}$	$\approx 0.57$	$0.625 \pm 0.006$	$0.65 \pm 0.02$	$0.672 \pm 0.001$	$0.69 \pm 0.02$	$0.64 \pm 0.1$

表4.1: 普遍類と臨界指数. J. J. Binney *et al.*, *The Theory of Critical Phenomena* (Oxford University Press, 1992) の 22 ページ Table 1.2 から殆どそのまま引用しました. 2成分混合液体 (binary liquid mixture) や  $\beta$  真鍮 ( $\beta$ -brass) が何なのかは自分で調べましょう.

- **$d$ 次元 Ising 普遍類 ( $d$ -dimensional Ising universality class)**  
 $d$ 次元 Ising 模型 —  $\mathbb{Z}_2$  不変な最近接相互作用の模型 — と臨界指数が一致する理論の集合
- **$d$ 次元 XY 普遍類 ( $d$ -dimensional XY universality class)**  
 $d$ 次元 XY 模型 —  $O(2)$ (または  $U(1)$ ) 不変な最近接相互作用の模型 — と臨界指数が一致する理論の集合
- **$d$ 次元 Heisenberg 普遍類 ( $d$ -dimensional Heisenberg universality class)**  
 $d$ 次元 Heisenberg 模型 —  $O(3)$ (または  $SU(2)$ ) 不変な最近接相互作用の模型 — と臨界指数が一致する理論の集合

Ising 模型, XY 模型, Heisenberg 模型は全て格子模型ですが, これらと対称性が等しい局所相互作用の場の理論の模型としては, 例えば前章第3.2.1節で調べた  $O(n)$  線型  $\sigma$  模型の  $n = 1, 2, 3$  がそれぞれ対応します.

ところで第2.3節で見た様に, 臨界点  $T = T_c$  近傍で単位体積当たりの自由エネルギーが同じスケールリング則に従っていけば, 臨界指数は全て一致する事が言えます. 従って, 普遍類とは臨界点近傍で同じスケールリング則に従う理論の集合と換言出来ます. 第2.3節ではスケールリング則は完全に仮説として導入しましたが, Wilson の繰り込み群を用いると, 繰り込み群変換の固定点を共有する理論は全て同じスケールリング則に従う事が導き出せます. 即ち, 繰り込み群変換の固定点を共有する理論が普遍類を成すのです. 以下, まず繰り込み群変換とは一体何なのかを見ていきましょう.

#### 4.1.1 繰り込み群変換の抽象的構造

まず繰り込み群 (renormalization group) の抽象的な構造の話から始めましょう. 以下述べる事は抽象的過ぎて実用上は殆ど無力ですが, 繰り込み群の全体像を把握する為には是非とも知っておくべき事柄です.

まず繰り込み群はその名の通り群 (group) で<sup>\*1</sup>, 繰り込み群変換 (renormalization group transformation) と呼ばれる 1 つの実パラメータ  $t$  で記述される連続変換から成ります. この変換が作用する対象は,

- (i) カットオフ  $\Lambda$  の場の作用汎関数  $S$  で
- (ii) 運動項が正しく規格化されているもの

の全体からなる汎関数の集合です. この様な作用汎関数の集合を理論空間 (theory space) と呼びます<sup>\*2</sup>. 以下, この理論空間を  $\mathcal{S}$  と記しましょう:

$$\mathcal{S} = \{ \text{作用汎関数 } S : \text{カットオフ } \Lambda \text{ の場の汎関数 } \ \& \ \text{運動項は規格化されている} \} \quad (4.1.1)$$

繰り込み群変換  $R_t : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  とはこの理論空間上に作用する 1 径数族 (one-parameter family) の連続変換で, 或る作用汎関数  $S \in \mathcal{S}$

<sup>\*1</sup> この段階では分かりませんが, 次の節で具体的に構成する繰り込み群変換  $R_t$  は逆元  $R_t^{-1}$  に対応する操作が定義出来ない (少なくともどう定義すれば良いか分からない) ので, 正確に言うとは群ではなく半群 (semigroup) です. (逆元の存在と単位元の存在を必ずしも仮定しないのが半群です. 但し, 繰り込み群には単位元  $R_{t=0} = 1$  はあります.) しかしながら, ひとたび繰り込み群のフローが得られればそれを逆に辿る事はいつでも出来ます. 実際, 場の理論の連続極限  $\Lambda \rightarrow \infty$  を構成する時は繰り込み群のフローを逆に辿ります. 繰り込み群のフローを逆に辿って行った時, 或る極限值 (固定点)  $S_*$  に収束するか否か, という事が問題になるのです. 但し, 場の理論の連続極限 (連続空間上の場の理論の構成法) はとても難しい話題なのでこの講義では扱いません. 興味のある人は章末に参考文献を挙げるのでそれで自習しましょう.

<sup>\*2</sup> 理論空間と簡単に言っていますが, この空間は超巨大な得体の知れない無限次元空間です. 本当の所, 私にはこれが何なのか分かりません.

を別の作用汎関数  $S_t \in S$  に写します。これを次の様に書きましょう:

$$R_t : S \mapsto R_t(S) = S_t \quad (4.1.2)$$

但し、 $R_{t=0} = 1$  は恒等変換とします。この様に繰り込み群変換は或る理論  $S$  を別の理論  $S_t$  へ変換する訳ですが、この変換は何でも良い訳では無く、分配関数  $Z$  は不変に保つ様になります。理論  $S$  の分配関数を  $Z[S]$  と記す事にすると、任意の  $t$  に対して次が成り立つ様に構成して行きます:

$$Z[S] = Z[S_t] \quad \text{for any } t \quad (4.1.3)$$

また、繰り込み群変換の積  $R_{t_1} R_{t_2}$  を合成変換  $(R_{t_1} R_{t_2})(S) := R_{t_1}(R_{t_2}(S))$  で定めた時、次の群の掛け算則が成り立つ様に構成します:

$$R_t R_{t'} = R_{t+t'} \quad (4.1.4)$$

この様な分配関数を不変に保つ変換を用いて、興味ある理論  $S$  の臨界現象を、分配関数は等しい別の理論  $S_t$  を使って解析しよう (若しくは関係付けよう)、というのが繰り込み群の基本的な戦略です。そこで実際問題うえて述べた性質を満たす連続変換  $R_t$  をどうやって構成するのか、という事が問題になるのですが、これは次の節で取扱います。

さて、繰り込み群の代数的な構造は上で述べた通りなのですが、これだけでは殆ど何の役にも立ちません。応用上重要なのは、繰り込み群変換  $R_t(S) = S_t$  の微分形です。  $\delta t$  を微小量として、理論  $S_t$  を  $\delta t$  だけ繰り込み群変換したものを  $R_{\delta t}(S_t) = (R_{\delta t} R_t)(S) = R_{\delta t+t}(S) = S_{\delta t+t} = S_{t+\delta t}$  を考えましょう:

$$S_{t+\delta t} = R_{\delta t}(S_t) \quad (4.1.5)$$

この両辺から  $S_t$  を引いて、両辺を  $\delta t$  で割り、最後に  $\delta t \rightarrow 0$  の極限を取ると次の1階微分方程式になります:

$$\frac{dS_t}{dt} = G(S_t) \quad \text{with } S_{t=0} = S \quad (4.1.6)$$

但し、 $dS_t/dt$ ,  $G(S_t)$  はそれぞれ次の様に定義されます:

$$\frac{dS_t}{dt} := \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{S_{t+\delta t} - S_t}{\delta t} \quad (4.1.7a)$$

$$G(S_t) := \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{R_{\delta t}(S_t) - S_t}{\delta t} \quad (4.1.7b)$$

$G$  を繰り込み群変換の無限小生成子と呼びます。また、1階微分方程式(4.1.6)を繰り込み群方程式 (**renormalization group equation**) とか繰り込み群のフロー方程式 (**renormalization group flow equation**) と呼びます。このノートではフロー方程式と呼ぶことにします。フロー方程式(4.1.6)に従う理論  $S_t$  は、 $t$  を変化させて行くと  $t=0$  での初期値を  $S$  として理論空間  $S$  の中で或る1次元の軌道を描いて行きます。この軌道を繰り込み群のフロー (**renormalization group flow**) と呼び、これを摂動論的に求めるのが第5章の主題になります。

#### 量子力学とのアナロジー

以上、繰り込み群の構造について述べて来ましたが、抽象的過ぎてピンと来ないかもしれません。以下、馴染みのある量子力学の時間発展演算子  $U(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar} H)$  と比較して、繰り込み群変換との類似点を挙げておきます。

まず、繰り込み群変換が作用するのはあらゆる作用汎関数からなる理論空間  $S$  でしたが、一方、量子力学の時間発展演算子  $U(t)$  が作用するのはあらゆる状態ベクトルからなる Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  です。  $S$  と  $\mathcal{H}$  が対応します。また、理論  $S$  の繰り込み群変換は  $S_t = R_t(S)$  でしたが、一方、量子力学の状態ベクトル  $|\psi\rangle$  の時間発展は  $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi\rangle$  です。作用汎関数  $S$  が状態ベクトル  $|\psi\rangle$  に対応し、繰り込み群変換  $R_t$  が時間発展演算子  $U(t)$  に対応します。また、繰り込み群変換は分配関数を不変に保ちますが、一方、量子力学の時間発展演算子は状態ベクトルの内積を保存します。分配関数と内積が対応する訳です。更に、繰り込み群変換の微分形はフロー方程式  $\frac{d}{dt} S_t = G(S_t)$  でしたが、一方、量子力学の時間発展の微分形は Schrödinger 方程式  $\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H |\psi(t)\rangle$  です。繰り込み群変換の無限小生成子  $G$  が時間発展演算子の無限小生成子 (Hamiltonian)  $-\frac{i}{\hbar} H$  に対応します。これらの対応を表4.2にまとめました。

これで繰り込み群変換と量子力学の時間発展演算子がうまく対応付けられた様に思えますが、実は非常に重要な相違点があります。それは量子力学の  $U(t)$  と  $H$  は線型変換ですが、繰り込み群の  $R_t$  と  $G$  は一般には極めて非線型な変換である、という点です。これは重要です。しかしながら、繰り込み群変換の固定点が存在すると、その固定点周りでは  $G$  は線型近似が出来て、この時フロー方程式は Schrödinger 方程式と同様、線型の固有値方程式の問題に帰着されます。第4.2節で詳しく述べますが、この固有値方程式の固有値と固有ベクトルを求める事で、臨界点近傍で成り立つスケーリング則及び種々の臨界指数が求まるのです。この固有値・固有ベクトルを摂動論的に求めるのが第5章の主題になります。

	繰り込み群変換 $R_t$	量子力学の時間発展演算子 $U(t)$
変換が作用する空間	理論空間 $\mathcal{S}$	Hilbert 空間 $\mathcal{H}$
有限の変換	$S_t = R_t(S) \quad (S \in \mathcal{S})$	$ \psi(t)\rangle = U(t) \psi\rangle \quad ( \psi\rangle \in \mathcal{H})$
変換の下で不変なもの	分配関数	内積
フロー方程式	$\frac{d}{dt}S_t = G(S_t)$	$\frac{d}{dt} \psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}H \psi(t)\rangle$
無限小生成子	$G(S_t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{R_{\delta t}(S_t) - S_t}{\delta t}$	$-\frac{i}{\hbar}H \psi(t)\rangle = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{U(\delta t) \psi(t)\rangle -  \psi(t)\rangle}{\delta t}$
(非)線型性 <sup>a</sup>	$R_t(\alpha S_1 + \beta S_2) \neq \alpha R_t(S_1) + \beta R_t(S_2)$ $G(\alpha S_1 + \beta S_2) \neq \alpha G(S_1) + \beta G(S_2)$ ( $\forall S_1, S_2 \in \mathcal{S}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ )	$U(t)(\alpha \psi_1\rangle + \beta \psi_2\rangle) = \alpha U(t) \psi_1\rangle + \beta U(t) \psi_2\rangle$ $H(\alpha \psi_1\rangle + \beta \psi_2\rangle) = \alpha H \psi_1\rangle + \beta H \psi_2\rangle$ ( $\forall  \psi_1\rangle,  \psi_2\rangle \in \mathcal{H}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ )

<sup>a</sup> 任意の  $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$  に対して線型結合  $\alpha S_1 + \beta S_2$  を取ると一般に規格化がずれるので、理論空間はそもそも和やスカラー倍の下で閉じていません。ここでは運動項の規格化は一旦忘れて、適当な汎関数に対する線型結合だと理解しておきます。

**表4.2:** 繰り込み群変換  $R_t$  と量子力学の時間発展  $U(t)$  の類似点と非類似点。どちらも 1 径数族の変換群を成しますが、 $U(t)$  及びその生成子  $H$  は線型変換であるのに対して、 $R_t$  及びその生成子  $G$  は一般には極めて非線型な変換である点が大きく異なります。しかしながら、繰り込み群変換の固定点  $S_*$  が存在する場合、固定点周りでは  $G$  は線型近似が可能です。この時、フロー方程式は線型の固有値問題に帰着されます。

#### 4.1.2 繰り込み群変換の具体的構成

前節では繰り込み群変換  $R_t$  が存在したと仮定して、その代数的構造やフロー方程式について述べました。この節では実際にどうやって繰り込み群変換を構成するのか、その具体的構成法について説明します。

まず、繰り込み群変換は運動量空間で定義するのが最も簡単です。簡単な為、以下では 1 成分スカラー場  $\phi(\mathbf{x})$  を考えます。まずカットオフ  $\Lambda$  を持つ場  $\phi(\mathbf{x})$  の Fourier 積分表示は次のようになります：<sup>\*3</sup>

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{|\mathbf{p}| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \quad (4.1.8)$$

この表式は運動量  $\mathbf{p}$  の関数  $\tilde{\phi}(\mathbf{p})$  が与えられた時、 $\phi(\mathbf{x})$  がこの積分で定義されると読むべきです。

さて、繰り込み群変換ではあらゆる作用汎関数から成る理論空間  $\mathcal{S}$  を考える訳ですが、この空間の要素  $S \in \mathcal{S}$  は一般にどの様に書けるかをまず考えましょう。前章で調べた  $O(n)$  線型  $\sigma$  模型の  $n=1$  の場合 (つまり  $\phi^4$  模型の場合)、座標表示での作用汎関数は

$$S[\phi] = \int d^d \mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} (\nabla \phi(\mathbf{x}))^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2(\mathbf{x}) + \frac{\lambda}{4!} \phi^4(\mathbf{x}) \right] \quad (4.1.9)$$

ですが、これに式(4.1.8)を代入すると次の運動量空間での表示を得ます：

$$\begin{aligned} S[\tilde{\phi}] &= \frac{1}{2!} \int_{|\mathbf{p}| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} (\mathbf{p}^2 + m^2) \tilde{\phi}(\mathbf{p}) \tilde{\phi}(-\mathbf{p}) \\ &\quad + \frac{\lambda}{4!} \int_{|\mathbf{p}_1| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}_1}{(2\pi)^d} \cdots \int_{|\mathbf{p}_4| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}_4}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}(\mathbf{p}_4) (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p}_1 + \cdots + \mathbf{p}_4) \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

一般の作用汎関数はこれを  $\tilde{\phi}$  の冪級数に拡張したもので、例えば  $\mathbb{Z}_2$  変換  $\tilde{\phi} \mapsto -\tilde{\phi}$  の下で不変な理論の場合は次の偶数冪だけの級数

<sup>\*3</sup>  $\Lambda$  の逆数がだいたい格子間隔に対応します。実際、格子間隔  $a > 0$  の  $d$  次元立方格子上の Fourier 変換は、周期的境界条件の下で

$$\phi(\mathbf{x}) = \left[ \prod_{j=1}^d \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{dp_j}{2\pi} \right] \tilde{\phi}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \quad \text{但し } \mathbf{x} = a\mathbf{n} \quad (\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d)$$

となります。この積分の積分領域は 1 辺の長さが  $\pi/a$  の  $d$  次元立方体ですが、これを半径  $\Lambda$  の  $d$  次元球に置き換えたのが式(4.1.8)です。立方体を球に置き換えたのは計算の便宜の為で、それ以上の深い意味はありません。

になります:\*4

$$S[\tilde{\phi}] = \frac{1}{2!} \int_{|\mathbf{p}| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} S^{(2)}(\mathbf{p}^2) \tilde{\phi}(\mathbf{p}) \tilde{\phi}(-\mathbf{p}) \\ + \sum_{n=4,6,\dots} \frac{1}{n!} \int_{|\mathbf{p}_1| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}_1}{(2\pi)^d} \cdots \int_{|\mathbf{p}_n| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}_n}{(2\pi)^d} S^{(n)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \tilde{\phi}(\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}(\mathbf{p}_n) (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p}_1 + \cdots + \mathbf{p}_n) \quad (4.1.11)$$

ここで  $S^{(2)}(\mathbf{p}^2)$ ,  $S^{(n)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$  は回転対称性などの制限はありますが、それ以外には特に制限の無いかなり一般的な運動量の関数です。但し、一つだけ条件があって、それが次の運動項の規格化条件です:

$$\text{規格化条件: } \left. \frac{dS^{(2)}(x)}{dx} \right|_{x=0} = 1 \quad (4.1.12)$$

この条件は式(4.1.10)と同様、関数  $S^{(2)}(\mathbf{p}^2)$  を  $\mathbf{p}^2 = 0$  周りで Taylor 展開した時の  $\mathbf{p}^2$  の係数が 1 であれ、という要請です。

さて、作用汎関数(4.1.11)に対しては分配関数は (形式的には) 次の汎関数積分で与えられます:

$$Z[S] = \int \mathcal{D}\tilde{\phi} \exp(-S[\tilde{\phi}]) \quad \text{但し} \quad \int \mathcal{D}\tilde{\phi} := \prod_{|\mathbf{p}| \in (0, \Lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\phi}(\mathbf{p}) \quad (4.1.13)$$

繰り込み群変換はこの分配関数を不変に保つ変換で、次の 3 つの操作から成ります:

- 高運動量モードの積分 (**coarse graining**)

まず  $\tilde{\phi}(\mathbf{p})$  を次の様に高運動量モードと低運動量モードに分けます:

$$\tilde{\phi}(\mathbf{p}) = \begin{cases} \tilde{\phi}_h(\mathbf{p}) & \text{for } |\mathbf{p}| \in (e^{-t}\Lambda, \Lambda) \\ \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}) & \text{for } |\mathbf{p}| \in (0, e^{-t}\Lambda) \end{cases} \quad (4.1.14)$$

ここで、 $t \in (0, \infty)$  は正の実数で、これが繰り込み群変換のパラメータになります。この様に場を 2 つに分けると、作用汎関数は  $\tilde{\phi}_h$  と  $\tilde{\phi}_l$  の汎関数になります。これを単に  $S[\tilde{\phi}] = S[\tilde{\phi}_h, \tilde{\phi}_l]$  と書きましょう。繰り込み群変換の第 1 の操作は、式(4.1.13)の汎関数積分のうち、高運動量モード  $\tilde{\phi}_h$  の積分を先に実行して新たな汎関数  $S'_t[\tilde{\phi}_l]$  を作る、というものです:

$$Z[S] = \int \mathcal{D}\tilde{\phi} e^{-S[\tilde{\phi}]} = \int \mathcal{D}\tilde{\phi}_l \mathcal{D}\tilde{\phi}_h e^{-S[\tilde{\phi}_l, \tilde{\phi}_h]} = \int \mathcal{D}\tilde{\phi}_l e^{-S'_t[\tilde{\phi}_l]} = Z[S'_t] \quad (4.1.15)$$

ここで、 $S'_t[\tilde{\phi}_l]$  は  $t$  に依存する  $\tilde{\phi}_l$  だけの汎関数で、次式で定義されます:

$$e^{-S'_t[\tilde{\phi}_l]} := \int \mathcal{D}\tilde{\phi}_h e^{-S[\tilde{\phi}_l, \tilde{\phi}_h]} \quad (4.1.16)$$

但し、式(4.1.15)と(4.1.16)の  $\int \mathcal{D}\tilde{\phi}_h$  と  $\int \mathcal{D}\tilde{\phi}_l$  は次の汎関数積分の略記です:

$$\int \mathcal{D}\tilde{\phi}_h := \prod_{|\mathbf{p}| \in (e^{-t}\Lambda, \Lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\phi}_h(\mathbf{p}) \quad \text{and} \quad \int \mathcal{D}\tilde{\phi}_l := \prod_{|\mathbf{p}| \in (0, e^{-t}\Lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\phi}_l(\mathbf{p}) \quad (4.1.17)$$

構成から明らかですが、理論  $S$  の分配関数  $Z[S]$  と理論  $S'_t$  の分配関数  $Z[S'_t]$  は必ず一致します。

- スケール変換 (**rescaling**)

上の操作で作られた新たな汎関数  $S'_t[\tilde{\phi}_l]$  はカットオフが  $e^{-t}\Lambda$  の場の汎関数になってしまったので、次の様に  $\mathbf{p}$  を  $\mathbf{q}$  に変数変換することで運動量の上限 (カットオフ) を  $\Lambda$  に戻します:

$$\mathbf{p} = e^{-t}\mathbf{q}, \quad |\mathbf{q}| \in (0, \Lambda) \quad (4.1.18)$$

こうすると、 $|\mathbf{p}|$  の上限は  $e^{-t}\Lambda$  ですが  $|\mathbf{q}|$  の上限は  $\Lambda$  になります。

- 再規格化 (**renormalization**)

上の 2 つの操作をすると必ず運動項の規格化がずれて式(4.1.12)を満たさなくなります。(これは具体例をやればすぐに分かります。) そこで、場  $\tilde{\phi}(\mathbf{q})$  を新たに次の様に定義して規格化を元に戻します:

$$\tilde{\phi}(\mathbf{q}) := e^{-dt} \sqrt{Z(S_t)} \tilde{\phi}_l(e^{-t}\mathbf{q}), \quad |\mathbf{q}| \in (0, \Lambda) \quad (4.1.19)$$

\*4 式(4.1.11)には場に依存しない  $\tilde{\phi}$  の 0 次の項  $S^{(0)}$  を付け加えても良いです。実際、繰り込み群変換をすると必ず定数項が生じます。但し、定数項はあっても無くとも相関関数には何の影響も与えないので、慣例に従ってこのノートでは入れない事にします。

ここで  $\sqrt{Z(S_t)}$  は定数で、規格化条件(4.1.12)を満たす様にうまく選びます。(紛らわしいですが、この  $Z$  は分配関数ではありません。) 因子  $e^{-dt}$  や平方根  $\sqrt{\cdot}$  に深い意味は無く、後々便利なのでこの様に書きました。この様にして構成した作用汎関数  $S_t[\tilde{\phi}] = S'_t[e^{dt}Z^{-1/2}(S_t)\tilde{\phi}]$  はカットオフが  $\Lambda$  の場の汎関数で、且つ運動項が正しく規格化されたものになり、理論空間(4.1.1)に属する作用汎関数となります\*5。

以上の3ステップで構成された  $S_t$  が理論  $S$  を繰り込み群変換したもので、 $S$  から  $S_t$  を作る操作が繰り込み群変換  $R_t : S \mapsto R_t(S) = S_t$  になります。上の説明だけだと何をやっているのかいまいち分からないかもしれませんが、簡単な具体例をやればすぐに感覚が掴めます。また、証明はしませんが、この様に構成した  $R_t$  は群の掛け算則(4.1.4)を満たします。

### 4.1.3 繰り込み群方程式

さて、繰り込み群変換が分配関数を不変に保つことの帰結として、理論  $S$  と  $S_t$  の相関関数の間にはある関係式が成り立ちます。これを見て行きましょう。まず、元々の理論  $S$  の運動量表示での相関関数は

$$\langle \tilde{\phi}(\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}(\mathbf{p}_n) \rangle_S := \frac{1}{Z[S]} \int \mathcal{D}\tilde{\phi} \tilde{\phi}(\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}(\mathbf{p}_n) e^{-S[\tilde{\phi}]} \quad (4.1.20)$$

で定義されます。この運動量表示相関関数の全ての運動量  $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\}$  の大きさが  $e^{-t}\Lambda$  よりも小さい場合を考えましょう。この時、 $\tilde{\phi}(\mathbf{p}_i) = \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) なので次の等式が成り立ちます：

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\phi}(\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}(\mathbf{p}_n) \rangle_S &= \frac{1}{Z[S]} \int \mathcal{D}\tilde{\phi} \tilde{\phi}(\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}(\mathbf{p}_n) e^{-S[\tilde{\phi}]} \\ &= \frac{1}{Z[S]} \int \mathcal{D}\tilde{\phi}_l \mathcal{D}\tilde{\phi}_h \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_n) e^{-S[\tilde{\phi}_l, \tilde{\phi}_h]} \\ &= \frac{1}{Z[S'_t]} \int \mathcal{D}\tilde{\phi}_l \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_n) \int \mathcal{D}\tilde{\phi}_h e^{-S[\tilde{\phi}_l, \tilde{\phi}_h]} \\ &= \frac{1}{Z[S'_t]} \int \mathcal{D}\tilde{\phi}_l \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_n) e^{-S'_t[\tilde{\phi}_l]} \\ &= \langle \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_n) \rangle_{S'_t} \quad \text{for } |\mathbf{p}_i| \in (0, e^{-t}\Lambda) \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

但し、3番目の等号で  $Z[S] = Z[S'_t]$  を使い、4番目の等号で  $S'_t$  の定義(4.1.16)を使いました。次に相関関数の変数を  $\mathbf{p}_i = e^{-t}\mathbf{q}_i$  と置き換え、最後に再規格化の式(4.1.19)を使うと次の等式になります：

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\phi}(e^{-t}\mathbf{q}_1) \cdots \tilde{\phi}(e^{-t}\mathbf{q}_n) \rangle_S &= \langle \tilde{\phi}_l(e^{-t}\mathbf{q}_1) \cdots \tilde{\phi}_l(e^{-t}\mathbf{q}_n) \rangle_{S'_t} \\ &= e^{ndt} Z^{-\frac{n}{2}}(S_t) \langle \tilde{\phi}(\mathbf{q}_1) \cdots \tilde{\phi}(\mathbf{q}_n) \rangle_{S_t} \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

これで理論  $S$  の相関関数と繰り込み群変換した理論  $S_t$  の相関関数が関係付きました。実用上は因子  $e^{ndt} Z^{-\frac{n}{2}}(S_t)$  を次の様に積分を使って書き直しておく方が便利です：

$$\begin{aligned} e^{ndt} Z^{-\frac{n}{2}}(S_t) &= \exp\left(ndt - \frac{n}{2} \log Z(S_t)\right) \\ &= \exp\left(n \left[ dt - \frac{1}{2} (\log Z(S_t) - \log Z(S_{t=0})) \right]\right) \\ &= \exp\left(n \int_0^t d\tau \left( d - \frac{1}{2} \frac{d \log Z(S_\tau)}{d\tau} \right)\right) \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

ここで、2行目で  $Z(S_{t=0}) = 1$  を使いました。従って、等式(4.1.22)は次の様に書き表されます：

$$\langle \tilde{\phi}(e^{-t}\mathbf{q}_1) \cdots \tilde{\phi}(e^{-t}\mathbf{q}_n) \rangle_S = \exp\left(n \int_0^t d\tau (d - \Delta(S_\tau))\right) \langle \tilde{\phi}(\mathbf{q}_1) \cdots \tilde{\phi}(\mathbf{q}_n) \rangle_{S_t} \quad \text{for } |\mathbf{q}_i| \in (0, \Lambda) \quad (4.1.24)$$

\*5 正確には、 $Z[S] = Z[S'_t]$  は成り立ちますが  $Z[S'_t] = Z[S_t]$  は成り立ちません。これは式(4.1.19)で規格化を変えているので、汎関数積分の積分要素が定数倍だけずれるからです：

$$Z[S'_t] = \left[ \prod_{|\mathbf{q}| \in (0, \Lambda)} e^{\int_0^t d\tau (d - \Delta(S_\tau))} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\phi}(\mathbf{q}) \right] e^{-S_t[\tilde{\phi}]} \neq \left[ \prod_{|\mathbf{q}| \in (0, \Lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\phi}(\mathbf{q}) \right] e^{-S_t[\tilde{\phi}]} = Z[S_t]$$

ここで、因子  $e^{ndt} Z^{-1/2}(S_t)$  を式(4.1.23)と(4.1.24)を用いて  $e^{\int_0^t d\tau (d - \Delta(S_\tau))}$  と書き直しました。しかしながら、この定数倍だけのずれは  $S_t$  の定数項として追いやれる事が出来るので全く問題ではありません。実際、この定数項を含めたものを新たに  $S_t$  と定義し直せば  $Z[S_t] = Z[S'_t] = Z[S]$  が成り立ちます。実用上はこの定数項は殆ど気にしなくて良く、実際、定数項を入れようが入れまいが相関関数には全く影響を与えません。



但し,  $\Delta(S_t)$  は  $\phi$  のスケール次元 (scaling dimension) と呼ばれる量で次式で定義されます:

$$\Delta(S_t) := \frac{1}{2} \frac{d \log Z(S_t)}{dt} \quad (4.1.25)$$

式(4.1.24)が運動量表示相関関数に対する繰り込み群方程式 (renormalization group equation) です. この繰り込み群方程式の意味する所は殆ど明らかでしょう. 式(4.1.24)は, 運動量の大きさを  $e^{-t} (< 1)$  倍だけ一様に下げた理論  $S$  の低エネルギーの相関関数は, 理論  $S_t$  の相関関数と定数倍を除いて等しい, という事を意味します. この意味で, 繰り込み群変換した理論  $S_t = R_t(S)$  は理論  $S$  の低エネルギー有効理論 (low energy effective theory) である, と言ったりします.

## 4.2 繰り込み群変換の固定点と繰り込み群のフロー

### この節のまとめ

- 繰り込み群変換の下で不変な理論  $S_*$  を繰り込み群変換の固定点 (fixed point) と呼ぶ. その様な理論  $S_*$  は次を満たす:

$$R_t(S_*) = S_* \quad \stackrel{\text{同値}}{\iff} \quad G(S_*) = 0$$

- 繰り込み群のフロー方程式は 1 階非線型常微分方程式だが, 固定点近傍では線型近似が可能. 固定点近傍の理論を  $S = S_* + \delta S$ , この理論を繰り込み群変換した理論を  $S_t = S_* + \delta S_t$  と書くと,  $\delta S_t$  は次の線型化されたフロー方程式に従う:

$$\frac{d}{dt} \delta S_t = L_*(\delta S_t)$$

但し,  $L_*$  は固定点  $S_*$  に依存した或る線型変換.

- 固定点  $S_*$  近傍の繰り込み群のフローは線型変換  $L_*$  の固有値と固有ベクトルで完全に決まる.  $L_*$  の  $n$  番目の固有値を  $\lambda_n$ , 対応する固有ベクトル (固有汎関数) を  $\mathcal{O}_n$  とすると,  $S_t$  の  $t$  依存性は線型近似の範囲で次の様に定まる:

$$S_t = S_* + \sum_n g_n(t) \mathcal{O}_n \quad \text{with} \quad g_n(t) = g_n(0) e^{\lambda_n t}$$

但し,  $g_n(0)$  は  $t = 0$  での初期値  $S = S_* + \delta S$  で決まる理論のパラメータ. 固定点近傍の理論空間  $\mathcal{S}$  はパラメータ  $\{g_1, g_2, \dots\}$  を局所座標系として記述され,  $S_*$  近傍の繰り込み群のフローは  $g_n(t) = g_n(0) e^{\lambda_n t}$  で完全に決定される. 固有値が全て実数の時, これは  $\lambda_n$  の値によって次の 3 通りが有り得る:

–  $\lambda_n > 0$  の場合

この時  $g_n(t)$  は  $t$  が増えるにつれ急激に増加し,  $S_t$  は固定点  $S_*$  から速ざかって行く. この  $g_n(t)$  を **relevant** パラメータと呼び, この  $\lambda_n$  に対応する固有汎関数  $\mathcal{O}_n$  を **relevant** 演算子と呼ぶ.

–  $\lambda_n < 0$  の場合

この時  $g_n(t)$  は  $t$  が増えるにつれ急激に減少し,  $S_t$  は固定点  $S_*$  に収束して行く. この  $g_n(t)$  を **irrelevant** パラメータと呼び, この  $\lambda_n$  に対応する固有汎関数  $\mathcal{O}_n$  を **irrelevant** 演算子と呼ぶ.

–  $\lambda_n = 0$  の場合

この時  $g_n(t)$  は線型近似の範囲で初期値  $g_n(0)$  から変化しない. この  $g_n(t)$  を **marginal** パラメータと呼び, この  $\lambda_n$  に対応する固有汎関数  $\mathcal{O}_n$  を **marginal** 演算子と呼ぶ.

- 固定点  $S_*$  近傍の理論空間  $\mathcal{S}$  には 2 つの特別な部分空間が存在する. 1 つは relevant パラメータが全てゼロの部分空間で, これを **臨界面** (critical surface) と呼び,  $\mathcal{S}_{\text{cr}}$  と記す.  $\mathcal{S}_{\text{cr}}$  上の理論は全て繰り込み群変換の下で固定点  $S_*$  に収束する. もう 1 つは irrelevant パラメータが全てゼロの部分空間で, これを **renormalized trajectory** と呼び,  $\mathcal{S}_{\infty}$  と記す.  $\mathcal{S}_{\infty}$  上の理論は全て  $t \rightarrow -\infty$  の極限が存在し, 極限值は  $S_*$ .

- 理論  $S_t$  の相関長  $\xi[S_t]$  は一般に繰り込み群変換の下で単調減少し, 次を満たす:

$$\xi[S_t] = e^{-t} \xi[S], \quad \forall t \in (0, \infty)$$

特に固定点  $S_*$  では  $\xi[S_*] = e^{-t} \xi[S_*]$  を満たす. この方程式の解は  $\xi[S_*] = 0$  または  $\xi[S_*] = \infty$  の 2 つで, 臨界現象を支配するのは  $\xi[S_*] = \infty$  を満たす固定点  $S_*$ . この時, 臨界面  $\mathcal{S}_{\text{cr}}$  上の理論は全て  $\xi = \infty$  の臨界温度  $T = T_c$  直上の理論. また, relevant パラメータ (の 1 つ) が臨界温度からのずれ  $(T - T_c)/T_c$  に対応するパラメータを与える.

• 上の結果は全て「繰り込み群変換に固定点が存在し、そこでは  $L_*$  の固有値は全て実数」という仮定に基づく。しかし本当にこれが満たされているかどうかは方程式  $G(S_t) = 0$  を解かねば本来は分からない。1階非線型常微分方程式  $dS_t/dt = G(R_t)$  の解の観点からは、上に挙げた挙動以外にも様々な繰り込み群のフローが有り得る。その典型例は次の2つ:

- リミットサイクル (limit cycle)  
 $t$ が増加するにつれて或る閉軌道に収束し、最終的に閉軌道をぐるぐる回る繰り込み群のフロー
- カオス的フロー (chaotic flow)  
 $t$ が増加するにつれて初期値  $S$  の違いが指数関数的に増大し、実質予測不能な繰り込み群のフロー

前節で繰り込み群変換の一般的構造について述べましたが、臨界現象へ応用する為にはもう一つ準備をしなければなりません。それが繰り込み群変換の固定点 (fixed point) です。今から見て行く様に、2次相転移の臨界現象は繰り込み群変換の固定点の情報で完全に決定されます。以下重要なのは固定点周りで線型化された繰り込み群のフロー方程式です。この線型化されたフロー方程式を解析する事で臨界現象のほぼ全てが分かるのです。

#### 4.2.1 フロー方程式の線型化

まず固定点の定義から始めましょう。繰り込み群変換の固定点とは任意の繰り込み群変換の下で不変な理論の事で、任意の  $t$  に対して次が成り立つ理論  $S_*$  として定義されます:

$$R_t(S_*) = S_* \quad \text{for any } t \quad (4.2.1)$$

そしてこれは次の条件と等価です:

$$G(S_*) = 0 \quad (4.2.2)$$

実際、式(4.1.7b)より  $G(S_*)$  の定義は  $G(S_*) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{R_{\delta t}(S_*) - S_*}{\delta t}$  ですが、定義(4.2.1)より任意の  $\delta t$  に対して  $R_{\delta t}(S_*) - S_* = 0$  なのでこの極限はゼロになります。

次にこの固定点から僅かにずれた理論  $S$  を考えましょう:

$$S = S_* + \delta S \quad (4.2.3)$$

ここで  $\delta S$  は (何らかの意味で) 微小な汎関数で、運動項は含まないとします。今から調べたいのはこの固定点近傍の理論  $S$  が繰り込み群変換  $R_t$  の下でどの様に変換されて行くか、という事です。少なくとも  $t$  が微小量なら繰り込み群変換した理論  $R_t(S)$  も固定点  $S_*$  近傍に留まる筈です。そこで  $R_t(S) = S_t$  を次の様に書きましょう:

$$S_t = S_* + \delta S_t \quad (4.2.4)$$

ここで、 $\delta S_t$  は  $t$  に依存する汎関数で、これも (何らかの意味で) 微小だとします。知りたいのはこの  $\delta S_t$  の  $t$  依存性で、これを調べるには繰り込み群のフロー方程式(4.1.6)を使います。まず、フロー方程式  $\frac{d}{dt} S_t = G(S_t)$  の左辺は次の様になります:

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \frac{d}{dt} S_t \\ &= \frac{d}{dt} (S_* + \delta S_t) \\ &= \frac{d}{dt} \delta S_t \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

但し、最後の等号で  $S_*$  は  $t$  に依存しない事を使いました。次にフロー方程式の右辺を線型化しましょう。一般に関数  $f(x)$  を  $f(x_*) = 0$  を満たす  $x = x_*$  周りで Taylor 展開すると  $f(x) = f(x_*) + f'(x_*)(x - x_*) + O(x - x_*)^2 = f'(x_*)(x - x_*) + O(x - x_*)^2$  となる様に、 $G(S_t)$  を  $S_t = S_*$  周りで線型化すると次の様になります:

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= G(S_t) \\ &= G(S_* + \delta S_t) \\ &= G(S_*) + L_*(\delta S_t) + O(\delta S_t)^2 \\ &= L_*(\delta S_t) + O(\delta S_t)^2 \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

ここで、 $L_*$  は固定点  $S_*$  に依存した或る線型変換で、任意の汎関数  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  に対して次を満たします：<sup>\*6</sup>

$$L_*(\alpha\mathcal{O}_1 + \beta\mathcal{O}_2) = \alpha L_*(\mathcal{O}_1) + \beta L_*(\mathcal{O}_2), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (4.2.7)$$

式(4.2.5)と(4.2.6)を合わせると次の固定点周りで線型化されたフロー方程式を得ます：

$$\frac{d}{dt}\delta S_t = L_*(\delta S_t) \quad (4.2.8)$$

あとはこの方程式を解けば良いだけです。これが解ければ固定点  $S_*$  近傍の繰り込み群のフローが完全に分かります。

さて、前節でフロー方程式と Schrödinger 方程式の類似点について述べましたが、式(4.2.8)は正に Schrödinger 方程式と同じタイプの線型微分方程式です。なので、Schrödinger 方程式を解く時に使う手法がそのまま使えます。Schrödinger 方程式  $i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$  を解く時は、まず  $H$  の固有値・固有ベクトルを求めて、次に  $|\psi(t)\rangle$  を固有ベクトルで展開し、次に展開係数の  $t$  依存性を決定する、という風にすれば良かったので、それと同様にやります。まず、 $L_*$  の固有値を  $\lambda_n$ 、固有値  $\lambda_n$  に属する固有ベクトル (固有汎関数) を  $\mathcal{O}_n$  としましょう：

$$L_*(\mathcal{O}_n) = \lambda_n \mathcal{O}_n \quad (4.2.9)$$

次にこの固有値・固有汎関数が全て分かったと仮定します。すると、 $\delta S_t$  はこの固有汎関数で展開できます：

$$\delta S_t = \sum_n g_n(t) \mathcal{O}_n \quad (4.2.10)$$

ここで、 $g_n(t)$  は展開係数で、これの  $t$  依存性が分かれば  $S_t = S_* + \delta S_t$  の  $t$  依存性が分かります。この展開係数  $g_n(t)$  の  $t$  依存性は線型化されたフロー方程式(4.2.8)から決まります。式(4.2.10)を式(4.2.8)に代入すると次の様になります：

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\delta S_t - L_*(\delta S_t) \\ &= \sum_n \frac{dg_n(t)}{dt} \mathcal{O}_n - L_*\left(\sum_n g_n(t) \mathcal{O}_n\right) \\ &= \sum_n \frac{dg_n(t)}{dt} \mathcal{O}_n - \sum_n g_n(t) L_*(\mathcal{O}_n) \\ &= \sum_n \frac{dg_n(t)}{dt} \mathcal{O}_n - \sum_n g_n(t) \lambda_n \mathcal{O}_n \\ &= \sum_n \left(\frac{dg_n(t)}{dt} - \lambda_n g_n(t)\right) \mathcal{O}_n \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

但し、3行目で  $L_*$  の線型性(4.2.7)を使い、4行目で固有値方程式(4.2.9)を使いました。従って、フロー方程式が成り立つ為には展開係数は次の方程式の解でなければなりません：

$$\frac{dg_n(t)}{dt} - \lambda_n g_n(t) = 0 \quad (4.2.12)$$

<sup>\*6</sup>  $L_*$  が線型変換であるというのはいさ分り辛いかもしれませんが、実際に想定しているのは次の様な単純なものです。まず、実用上は繰り込み群のフロー方程式は理論のパラメータ  $\{g_1, g_2, \dots\}$  に対する次の様な連立1階非線型常微分方程式になります：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g_1(t) &= \beta_1(g_1(t), g_2(t), \dots) \\ \frac{d}{dt}g_2(t) &= \beta_2(g_1(t), g_2(t), \dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

ここで、 $\{\beta_1, \beta_2, \dots\}$  は繰り込み群の  $\beta$  関数と呼ばれる量で、一般には極めて非線型な関数です。(「非線型な」とは要するに1次関数では無いという事です。) 但し、任意の  $i \in \{1, 2, \dots\}$  に対して  $\beta_i(g_{1*}, g_{2*}, \dots) = 0$  となる固定点 ( $\beta$  関数の零点)  $(g_{1*}, g_{2*}, \dots)$  が存在すると、この固定点周りでは線形近似が出来て、Taylor 展開の1次の近似では次の様な連立1階線型常微分方程式の問題に帰着されます：

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} g_1(t) - g_{1*} \\ g_2(t) - g_{2*} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_1}{\partial g_1}(g_{1*}, g_{2*}, \dots) & \frac{\partial \beta_1}{\partial g_2}(g_{1*}, g_{2*}, \dots) & \cdots \\ \frac{\partial \beta_2}{\partial g_1}(g_{1*}, g_{2*}, \dots) & \frac{\partial \beta_2}{\partial g_2}(g_{1*}, g_{2*}, \dots) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(t) - g_{1*} \\ g_2(t) - g_{2*} \\ \vdots \end{pmatrix} + O(g_i(t) - g_{i*})^2$$

この右辺の行列が固定点  $S_*$  に依存する線型変換  $L_*$  に対応する訳です。また、式(4.2.6)の  $O(\delta S_t)^2$  は (記法がとも良くないですが) 上の  $O(g_i(t) - g_{i*})^2$  の事を指しています。因みに、上の右辺の行列を **stability matrix** と呼ぶ事があります。

これは簡単に解けて答えは次のようになります:

$$g_n(t) = g_n(0)e^{\lambda_n t} \quad (4.2.13)$$

ここで,  $g_n(0)$  は  $t=0$  での初期値で決まるパラメータです. 結局, 線型近似の範囲では, 固定点  $S_*$  近傍の理論  $S = S_* + \delta S$  を繰り込み群変換すると次のようになります:

$$S_t = S_* + \sum_n g_n(t) \mathcal{O}_n \quad \text{with} \quad g_n(t) = g_n(0)e^{\lambda_n t} \quad (4.2.14)$$

この表式から明らかですが, 固定点  $S_*$  近傍の理論はパラメータ  $\{g_1, g_2, \dots\}$  で完全に特徴付けられます. これは固定点近傍の理論空間  $\mathcal{S}$  は, パラメータ  $\{g_1, g_2, \dots\}$  を局所座標系として記述できることを意味します. また, 固定点近傍の繰り込み群のフローは  $\{g_1(t), g_2(t), \dots\}$  で完全に決定されます. 固有値  $\lambda_n$  は全て実数だと仮定すると\*7, 式(4.2.13)から  $g_n(t)$  の振る舞いは次の3通りに分類されます:

- $\lambda_n > 0$  の場合: **relevant** パラメータ  
この時,  $g_n(t) = g_n(0)e^{\lambda_n t}$  は  $t$  が増加するにつれ指数関数的に増加し, 理論空間の  $g_n$  方向に関しては固定点  $S_*$  から急速に遠ざかって行く. 正の固有値  $\lambda_n > 0$  に対応するパラメータ  $g_n(t)$  を **relevant** パラメータと呼び, この  $\lambda_n$  に属する固有汎関数  $\mathcal{O}_n$  を **relevant** 演算子と呼ぶ.
- $\lambda_n < 0$  の場合: **irrelevant** パラメータ  
この時,  $g_n(t) = g_n(0)e^{\lambda_n t}$  は  $t$  が増加するにつれ指数関数的に減少し, 理論空間の  $g_n$  方向に関しては固定点  $S_*$  へ向かって急速に収束して行く. 負の固有値  $\lambda_n < 0$  に対応するパラメータ  $g_n(t)$  を **irrelevant** パラメータと呼び, この  $\lambda_n$  に属する固有汎関数  $\mathcal{O}_n$  を **irrelevant** 演算子と呼ぶ.
- $\lambda_n = 0$  の場合: **marginal** パラメータ  
この時,  $g_n(t) = g_n(0)e^{\lambda_n t}$  は線型近似の範囲で初期値  $g_n(0)$  から変化しない. ゼロ固有値  $\lambda_n = 0$  に対応するパラメータ  $g_n(t)$  を **marginal** パラメータと呼び, この  $\lambda_n$  に属する固有汎関数  $\mathcal{O}_n$  を **marginal** 演算子と呼ぶ.

以上で, 線型変換  $L_*$  の固有値・固有ベクトルが分かれば, 固定点  $S_*$  近傍での繰り込み群のフローが完全に決定される事が分かりました\*8. 次の第4.3節でこの固有値から臨界指数が決定される事を見ます. また, 第5章ではこの固有値・固有ベクトルを摂動論で求めていきます.

## 4.2.2 臨界面と renormalized trajectory

前節で  $L_*$  の固有値が全て実数であるという仮定の下, 固定点近傍での繰り込み群のフローを分類しました. この分類から固定点近傍の理論空間には2つの特別な部分空間が存在することが分かります. 次にこの話をしましょう.

まず1つ目の部分空間は relevant パラメータが全てゼロの部分空間で, これを**臨界面 (critical surface)** とか**臨界部分空間 (critical subspace)** とか**臨界部分多様体 (critical submanifold)** と呼びます. このノートでは臨界面と呼ぶことにして,  $\mathcal{S}_{\text{cr}}$  と記すことにします. 臨界面  $\mathcal{S}_{\text{cr}} \subset \mathcal{S}$  は irrelevant パラメータだけから成る部分空間で, 次の様に定義されます:

$$\mathcal{S}_{\text{cr}} = \{(g_1, g_2, \dots) : \text{relevant パラメータが全てゼロ}\} \quad (4.2.15)$$

前節の議論から明らかですが, 臨界面上の理論は全て繰り込み群変換の下で固定点  $S_*$  に収束して行きます. 今の段階では分かりませんが, irrelevant パラメータは無数個あるので  $\mathcal{S}_{\text{cr}}$  は無限次元部分空間です.

2つ目の部分空間は irrelevant パラメータが全てゼロの部分空間で, これを **renormalized trajectory** と呼び,  $\mathcal{S}_{\infty}$  と記します. 以下, renormalized trajectory を略して RT と書くことにします. RT は relevant パラメータだけから成る部分空間で,  $\mathcal{S}_{\infty} \subset \mathcal{S}$  は次の様に定義されます:

$$\mathcal{S}_{\infty} = \{(g_1, g_2, \dots) : \text{irrelevant パラメータが全てゼロ}\} \quad (4.2.16)$$

これも前節の議論から明らかですが, RT は固定点  $S_*$  から湧き出す繰り込み群のフローの上に乗っている理論の集合です. 逆に言うと, 繰り込み群のフローを逆に辿って行った時に固定点  $S_*$  に収束する理論の集合が RT です. RT 上の理論は全て  $t \rightarrow -\infty$  の極限が存在し, 極限値は  $S_*$  になります.

\*7 これは全くの仮定です.  $L_*$  の固有値が全て実数であるという保証はどこにもありません. 実際, 次節で取り上げるリミットサイクルの例では固有値が複素数になります. 但し, よく知られている模型では固有値は全て実数になっているので, ここはあまり気にしないようにしましょう.

\*8 実は marginal パラメータは少々厄介で, 線型近似で marginal でも, 近似の次のオーダーを調べると往々として  $t$  依存性を持ちます. 簡単のため以下では marginal パラメータは無いと仮定して議論を進める事にします. 因みに厳密に  $t$  依存性が無い場合を exactly marginal と言います.

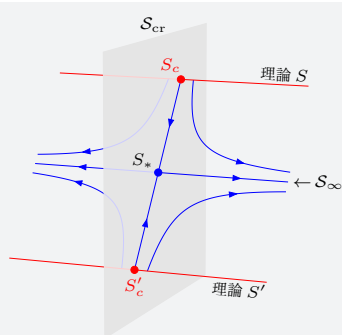


図4.1: 固定点  $S_*$  近傍の繰り込み群のフローの模式図. 赤色の線は理論  $S$  と  $S'$  の持っているパラメータを手で変えていった時に描く軌跡で, 一方, 青色の曲線は繰り込み群のフローを表します. 理論  $S$  と  $S'$  には温度  $T$  に対応するパラメータがあり, このパラメータを  $T = T_c$  にチューニングすると臨界面  $S_{cr}$  上の理論  $S_c$  と  $S'_c$  になります. この温度  $T$  に対応するパラメータが relevant パラメータ (の1つ) に他なりません.

2次相転移の臨界現象で興味あるのは特に臨界面  $S_{cr}$  近傍の理論のフローで, これは irrelevant パラメータ方向には固定点に収束し, relevant パラメータ方向には固定点から遠ざかって行きます. 図4.1に固定点近傍の理論空間と, 臨界面近傍にある2つの理論  $S$  と  $S'$  の繰り込み群のフローの模式図を示しました.

#### 相関長と繰り込み群のフロー

次に繰り込み群変換の下での相関長  $\xi$  の変換則を見ておきましょう. 理論  $S$  の相関長を  $\xi[S]$  と記すことにすると, 繰り込み群変換はスケール変換を含んでいたので次を満たします:

$$\xi[S_t] = e^{-t} \xi[S] \quad \text{for any } t \quad (4.2.17)$$

つまり, 相関長は繰り込み群変換の下で単調減少します. 特に  $S = S_*$  の時は任意の  $t$  に対して  $S_t = S_*$  が成り立つので, 式(4.2.17)は次のようになります:

$$\xi[S_*] = e^{-t} \xi[S_*] \quad \text{for any } t \quad (4.2.18)$$

この方程式の解は2通りあって, ゼロか無限大です:

$$\xi[S_*] = 0 \quad \text{or} \quad \xi[S_*] = \infty \quad (4.2.19)$$

前章第3.3.1節で議論したように, 臨界温度  $T = T_c$  直上では相関長は無限大になります. 従って, 2次相転移の臨界現象と関係するのは  $\xi[S_*] = \infty$  を満たす固定点  $S_*$  です. いま  $S_*$  を  $\xi[S_*] = \infty$  を満たす固定点としましょう. この時, 臨界面上の理論は全て相関長無限大の臨界温度  $T = T_c$  直上の理論を記述します. なぜなら, 繰り込み群変換の下で相関長は単調減少しますが,  $S_*$  での相関長が無限大なので,  $S_*$  に収束する理論の集合  $S_{cr}$  は全て相関長無限大でなければ式(4.2.17)と矛盾してしまうからです. 臨界面  $S_{cr}$  では  $T = T_c$  なので,  $S_{cr}$  に直交する方向のパラメータの1つが温度  $T$  と関係し, 臨界温度を基準にして測った温度  $(T - T_c)/T_c$  と同一視されます. つまり relevant パラメータの1つが  $(T - T_c)/T_c$  の役割を果たします. 今後は  $\xi[S_*] = 0$  となる固定点  $S_*$  は考えない事にします.

#### 4.2.3 色々な繰り込み群のフロー

以上, 繰り込み群変換の固定点が存在すると仮定して, 固定点近傍の理論の振る舞いを分類してきました. 今までの議論はフロー方程式の線型近似に基づいた解析なので, それでは線型近似を超えた領域での大局的な解の振舞いはどうなるのかが次に知りたい所です. しかしこれはかなり難しい問題で, 一般にはフロー方程式を厳密に解かなければ分かりません. また, これまでは  $L_*$  の固有値が全て実数と仮定してきましたが,  $L_*$  の固有値が常に実数である保証はどこにもありません. 固有値が複素数になる場合, 繰り込み群のフローはどうなるのかも知りたい所です. 脚注\*6でも述べた様に, 繰り込み群のフロー方程式は実際上は理論のパラメータ  $\{g_1, g_2, \dots\}$  に対する連立1階非線型常微分方程式になります. 1階非線型常微分方程式の解の観点からは, 図4.1に示した単純な振る舞いの他に, 実に様々な解の挙動が有り得ます\*9. 以下, 簡単な例を3つだけ挙げておきます\*10. これらを用いて繰り込み群のフローの大局的構造および  $L_*$  の固有値が複素数になる場合の雰囲気を含んでおきましょう.

\*9 但し,  $L_*$  の固有値が全て実数になるような固定点  $S_*$  近傍のフローは図4.1に示したもので尽きます. より一般の1階非線型常微分方程式の解の振る舞いは力学系 (dynamical system) の分野で詳しく調べられています. 興味のある人は適当な力学系の教科書を見てください.

\*10 ここで示す例は全ておもちゃのフロー方程式で, これらに従う場の理論が存在すると主張している訳ではありません. また, 2次相転移の臨界現象と直接関係している訳でもありません. 単にフロー方程式の解の挙動をより深く理解しようという為のものです.

- 固定点が複数ある場合のフロー

2つのパラメータ  $\{g_1, g_2\}$  で記述される次のフロー方程式 (連立1階非線型常微分方程式) を考えましょう:

$$\frac{dg_1}{dt} = g_1(g_2 - b) \quad (4.2.20a)$$

$$\frac{dg_2}{dt} = g_2(g_1 - a) \quad (4.2.20b)$$

但し,  $a, b$  は適当な実数です. このフロー方程式には固定点 (右辺がゼロになる点) が2つあって,  $(g_1, g_2) = (0, 0), (a, b)$  の2つです. それぞれの固定点周りでフロー方程式を線型化すると次のようになります:

$$(0, 0) \text{ 周り: } \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} g_1 - 0 \\ g_2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 - 0 \\ g_2 - 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.21a)$$

$$(a, b) \text{ 周り: } \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} g_1 - a \\ g_2 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 - a \\ g_2 - b \end{pmatrix} \quad (4.2.21b)$$

計算すれば簡単に分かるので計算過程は書きませんが, 右辺の2次正方行列の固定点  $(0, 0)$  での固有値は  $-b$  と  $-a$ , 対応する固有ベクトルは  $(1, 0)^T$  と  $(0, 1)^T$  です. 一方, 固定点  $(a, b)$  での固有値は  $\pm\sqrt{ab}$ , 対応する固有ベクトルは  $(\sqrt{a}, \pm\sqrt{b})^T$  となります. この場合,  $a, b$  どちらか一方が負の場合は固有値が虚数になる事に注意しましょう. 以下,  $a > 0$  且つ  $b > 0$  の場合と  $a > 0$  且つ  $b < 0$  の場合に分けて調べてみます.

- $a > 0$  且つ  $b > 0$  の場合

この時, 固定点  $(0, 0)$  での固有値  $-b$  と  $-a$  は共に負の実数. 従って, 固定点  $(0, 0)$  近傍ではこの点に流れ込むフローしかない. 一方, 固定点  $(a, b)$  での固有値  $\pm\sqrt{ab}$  は正と負の両方ある. 繰り込み群のフローは, 正の固有値  $\sqrt{ab}$  に属する固有ベクトル  $(\sqrt{a}, \sqrt{b})^T$  の方向に関しては固定点から湧き出し, 負の固有値  $-\sqrt{ab}$  に属する固有ベクトル  $(\sqrt{a}, -\sqrt{b})^T$  の方向に関しては固定点へ流れ込む. 繰り込み群のフローの大局的構造は図4.2aに示した通りで, 赤色の曲線が固定点  $(a, b)$  から見た時の臨界面と RT.

- $a > 0$  且つ  $b < 0$  の場合

この時, 固定点  $(0, 0)$  での固有値は  $-b = |b|$  が正で  $-a$  が負. 繰り込み群のフローは, 正の固有値  $|b|$  に属する固有ベクトル  $(1, 0)^T$  方向に関しては固定点から湧き出し, 負の固有値  $-a$  に属する固有ベクトル  $(0, 1)^T$  方向に関しては固定点へ流れ込む. 一方, 固定点  $(a, b)$  での固有値は  $\pm\sqrt{ab} = \pm i\sqrt{a|b|}$  と純虚数になる. この固定点周りのフローを調べると実は閉軌道 (closed orbit) になる. 繰り込み群のフローの大局的構造は図4.2bに示した通りで, 赤色の線が固定点  $(0, 0)$  から見た時の臨界面と RT を表す. 特筆すべきは第4象限でのフローで, 一般に線型近似の解析では臨界面近傍の点は RT に収束して行くという結果だが, フロー方程式を厳密に解くと RT に近づいては行くが或る所でまた離れて行って, 最終的に元の点に戻り周回軌道を描くという結果になっている. この振る舞いは固定点  $(0, 0)$  周りで線型化されたフロー方程式(4.2.21a)だけでは分からない<sup>\*11</sup>.

- リミットサイクル (limit cycle)

今度は次のフロー方程式を考えましょう:

$$\frac{dg_1}{dt} = ag_1 + bg_2 - g_1(g_1^2 + g_2^2) \quad (4.2.22a)$$

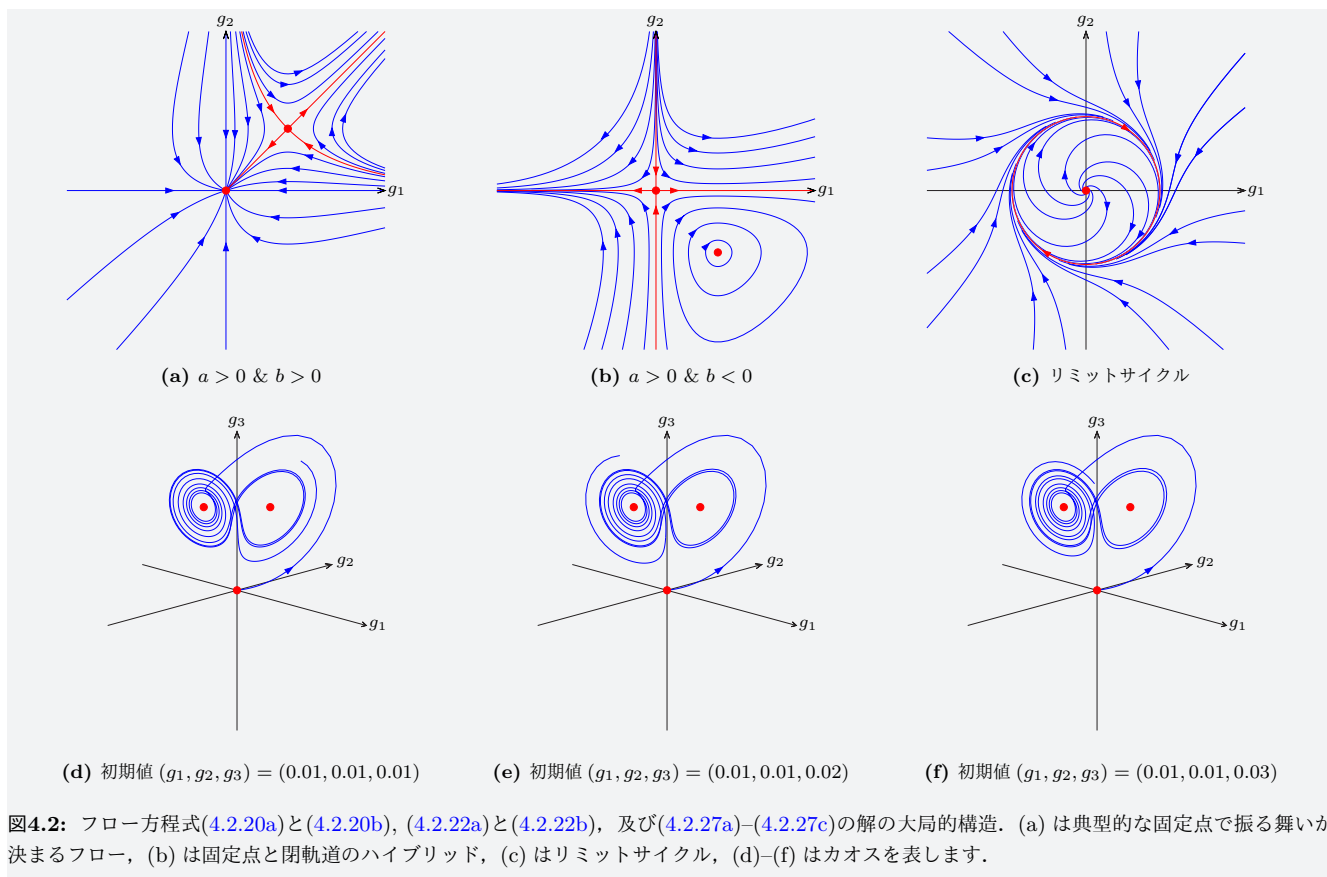
$$\frac{dg_2}{dt} = ag_2 - bg_1 - g_2(g_1^2 + g_2^2) \quad (4.2.22b)$$

但し,  $a$  は正の実数,  $b$  は正でも負でも良い実数とします. このフロー方程式には固定点が原点  $(g_1, g_2) = (0, 0)$  に1つだけあります. この固定点周りで線型化したフロー方程式は次のようになります:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} g_1 - 0 \\ g_2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 - 0 \\ g_2 - 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.23)$$

上の行列の固有値は  $a \pm ib$ , 対応する固有ベクトルは  $(1, \pm i)^T$  でどちらも複素数になります. このフロー方程式の解の大局的挙動は図4.2cに示した通りで, 初期値に依らず円軌道  $g_1^2 + g_2^2 = a$  に収束して行き, 最終的にこの円軌道をぐるぐる回ると言うフローになっています. この様なフローをリミットサイクル (limit cycle) と呼びます. リミットサイクルにも色々あって, この例では閉軌道に流れ込むリミットサイクルですが, 閉軌道から湧き出すリミットサイクルもあります. ここで, 閉軌道上の理論

<sup>\*11</sup> 前節までの線型近似の解析結果が破綻しているのではないかと思うかもしれませんが, 実際, 固定点から離れた所で破綻しているのですが, よく知られているモデルではこのような事は起きないのであまり気にしないで良いです. 但し, 1階非線型常微分方程式の観点からはこの様な振る舞いも十分有り得ると言う事は認識しておきましょう.



$S$  に対して成り立つ重要な事柄があるのでそれについて述べておきましょう. 繰り込み群のフローの閉軌道が成す部分空間を  $S_{\text{cycle}} \subset S$ , 閉軌道上のフローの周期を  $T$  とすると, 閉軌道上の理論  $S$  を周期  $T$  で繰り込み群変換すると自分自身に戻ります:

$$R_T(S) = S, \quad \forall S \in S_{\text{cycle}} \tag{4.2.24}$$

一方, 式(4.2.17)の所で議論した様に, 繰り込み群変換の下で相関長  $\xi$  は一般に単調減少して  $\xi[R_T(S)] = e^{-T}\xi[S]$  が成り立ちます. これと式(4.2.24)を合わせると, 閉軌道上の任意の理論に対して次が成り立つ事が分かります:

$$\xi[S] = e^{-T}\xi[S], \quad \forall S \in S_{\text{cycle}} \tag{4.2.25}$$

固定点の場合同様, この方程式の解はゼロか無限大です:

$$\xi[S] = 0 \quad \text{or} \quad \xi[S] = \infty \quad \text{for} \quad S \in S_{\text{cycle}} \tag{4.2.26}$$

相関長がゼロになるか無限大になるかは  $S_{\text{cycle}}$  の性質だけで決まります. 特に相関長が無限大となる  $S_{\text{cycle}}$  の場合, (固定点  $S^*$  の時と同じ論理で) 閉軌道上の理論は全て  $T = T_c$  の臨界温度直上の理論を記述する事が分かります\*12.

• カオス的フロー (chaotic flow)

最後に 3 つのパラメータ  $\{g_1, g_2, g_3\}$  で記述される次のフロー方程式を考えましょう:

$$\frac{dg_1}{dt} = a(g_2 - g_1) \tag{4.2.27a}$$

$$\frac{dg_2}{dt} = g_1(b - g_3) - g_2 \tag{4.2.27b}$$

$$\frac{dg_3}{dt} = g_1g_2 - cg_3 \tag{4.2.27c}$$

\*12 但し, 繰り込み群のリミットサイクルで支配される臨界現象は聞いた事がありません. 臨界現象への応用は不明ですが, リミットサイクルは Efimov 効果 (Efimov effect) で現れる事が知られています. Efimov 効果は非相対論的量子力学の 3 体問題に関するもので, 繰り込み群のリミットサイクルや連続的スケール不変性の離散的スケール不変性への破れ, 無限個の束縛状態など理論的にとても興味深い話題を内包しています. また, 実験的にも観測されています. 興味のある人は自分で調べてみましょう.

但し,  $a, b, c$  は適当な実数です. このフロー方程式には  $(g_1, g_2, g_3) = (0, 0, 0), (\pm\sqrt{c(b-1)}, \pm\sqrt{c(b-1)}, b-1)$  の3つの固定点があります. 解析が面倒なので線型化されたフロー方程式は調べませんが, 実はこの連立1階非線型微分方程式はカオス<sup>\*13</sup>を示す有名な系で, その解は Lorenz attractor と呼ばれています. 図4.2d-4.2fに  $(a, b, c) = (10, 28, 8/3)$  の場合で初期値を少しずつ変えていった時の  $t = 0$  から  $t = 10$  までのフローを示しました. 初期値をちょっと変えただけで  $t = 10$  での位置が大きく異なる事が見て取れると思います.

以上, 簡単な例を用いて繰り込み群のフローの大局的構造を調べてみました. まず上の例でも登場しましたが, 固定点  $S_*$  周りで線型化した繰り込み群変換の生成子  $L_*$  の固有値が複素数になる場合, 繰り込み群のフローは固定点周りでぐるぐると回ります. 特に固有値が純虚数の場合は閉じた軌道になり, 実数部分が非ゼロの複素数の場合は螺旋軌道になります. また, 実固有値の固定点と複素固有値の固定点が共存する場合, 臨界面  $S_{cr}$  近傍の理論は必ず RT に漸近して行く, という前節の線型近似の結果が破綻し得る事も見ました. また, 複素固有値の固定点の場合, 繰り込み群のフローが最終的に或る閉軌道に収束するリミットサイクルとなる場合も有り得ます. リミットサイクルが存在するか否かは固定点周りで線型化したフロー方程式だけでは分かりません. 更に, 繰り込み群のフローがカオスになる場合も有り得るという事も見ました. カオスになるか否かも線型近似だけでは分からない, 非線型性の産物です.

以上の結果を見ると, 前節までの線型近似の解析結果は全然信用出来ないと思うかもしれません. しかしながら, 実際上は線型近似の描像で殆どそのまま正しいです. なぜなら, 上の例からも明らかな様に, 繰り込み群のフローが珍妙な振る舞いをするのは基本的に複素固有値が現れる場合で, 良く知られている模型では複素固有値は出て来ないからです<sup>\*14</sup>. 通常の問題では, 閉軌道やリミットサイクル, カオスなどは全く気にしなくて良いと言っていいでしょう.

最後に1つだけ注意しておく, 繰り込み群のフローは途中で分岐や交差はしません. (但し, 固定点は除きます.) これは, 常微分方程式の解の一意性から, 初期値を決めればフロー方程式の解は一意的に定まるからです.

### 4.3 スケーリング則と臨界指数

#### この節のまとめ

- 理論  $S$  の単位体積当たりの自由エネルギーに逆温度  $\beta$  を掛けたものを  $(\beta f)[S]$  と記すと, 繰り込み群変換  $R_t : S \mapsto S_t$  が分配関数を変えずに保つ事の帰結として,  $(\beta f)[S]$  と  $(\beta f)[S_t]$  の間には一般に次の関係式が成り立つ:

$$(\beta f)[S] = e^{-dt}(\beta f)[S_t] \quad \text{for } \forall t \in (0, \infty)$$

特に固定点  $S_*$  近傍の理論  $S = S_* + \sum_n g_n(0)e^{\lambda_n t} \mathcal{O}_n$  に対してはこの等式は次のスケーリング則を意味する:

$$(\beta f)(g_1(0), g_2(0), g_3(0), \dots) = e^{-dt}(\beta f)(g_1(0)e^{\lambda_1 t}, g_2(0)e^{\lambda_2 t}, g_3(0)e^{\lambda_3 t}, \dots)$$

- 同様にして, 相関長に対する等式  $\xi[S] = e^t \xi[S_t]$  も固定点近傍の理論  $S$  に対しては次のスケーリング則を与える:

$$\xi(g_1(0), g_2(0), g_3(0), \dots) = e^t \xi(g_1(0)e^{\lambda_1 t}, g_2(0)e^{\lambda_2 t}, g_3(0)e^{\lambda_3 t}, \dots)$$

- 臨界現象を示す典型的格子模型では, 外部磁場が無い場合, 温度パラメータを  $T = T_c$  にチューニングするだけで臨界点に到達する. これは外部磁場が無い場合, 臨界現象を支配する固定点  $S_*$  近傍の relevant パラメータは1つだけである事を意味する. これを踏まえて,  $\lambda_1$  だけが正で, 残りの固有値  $\{\lambda_2, \lambda_3, \dots\}$  は全て負だとし, 更に relevant パラメータ  $g_1(0)$  を臨界温度を基準にして測った温度  $g_1(0) = (T - T_c)/T_c = \tau$  と同一視する. すると,  $t$  が十分大きい時, 上のスケーリング則は次の様になる:

$$\begin{aligned} (\beta f)(\tau, g_2(0), g_3(0), \dots) &\sim e^{-dt}(\beta f)(\tau e^{\lambda_1 t}, 0, 0, \dots) \\ \xi(\tau, g_2(0), g_3(0), \dots) &\sim e^t \xi(\tau e^{\lambda_1 t}, 0, 0, \dots) \end{aligned}$$

このスケーリング則から  $\beta f$  及び  $\xi$  の  $\tau$  依存性が決まり, 臨界指数  $\{\nu, \alpha\}$  が次の様に求まる:

$$\nu = \frac{1}{\lambda_1} \quad \& \quad \alpha = 2 - \frac{d}{\lambda_1}$$

- 繰り込み群方程式を使うと, 臨界面  $S_{cr}$  上の理論  $S$  の相関関数は,  $t \rightarrow \infty$  の低運動量極限で固定点  $S_*$  上の相関関数に (定数

<sup>\*13</sup> 私の知っている限り, 場の理論の繰り込み群のフローでカオスになる例は知られていないと思います. 知られていませんが, 1階非線型常微分方程式の解の観点からはカオス的フローが出て来ても何らおかしくありません.

<sup>\*14</sup> 多くの模型で複素固有値が出て来ないという事には何か深遠な理由があるかもしれませんが,  $L_*$  に対しては何か強い条件が掛かっているのかもしれませんが, これに関しては私は答えを知りません.



倍を除いて) 収束する事が言える:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \tilde{\phi}(e^{-t} \mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}(e^{-t} \mathbf{p}_n) \rangle_S = e^{\int_0^\infty dt (d - \Delta(S_t))} \langle \tilde{\phi}(\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}(\mathbf{p}_n) \rangle_{S_*}$$

特に  $n = 2$  の場合, 並進対称性と回転対称性を加味する事で臨界面上の理論  $S$  の 2 点相関関数の低運動量極限は完全に決定される. 規格化定数は除くと, 次の様になる:

$$\langle \tilde{\phi}(\mathbf{p}) \tilde{\phi}(\mathbf{p}') \rangle_S \propto |\mathbf{p}|^{2\Delta(S_*) - d} (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \quad \text{as } |\mathbf{p}|, |\mathbf{p}'| \rightarrow 0$$

これを Fourier 変換する事で座標表示 2 点相関関数の長距離極限が次の様に定まる:

$$\langle \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}') \rangle_S \propto |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-2\Delta(S_*)} \quad \text{for } |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \gg \Lambda^{-1}$$

これより臨界指数  $\eta$  が次の様に読み取れる:

$$\eta = 2\Delta(S_*) - d + 2$$

第2章2.3節でスケーリング仮説について述べ, 臨界指数の間に成り立つ関係式を調べました. この時はスケーリング則は完全に仮説でしたが, 繰り込み群を用いるとこのスケーリング則が導出出来ます. 以下, 固定点近傍の繰り込み群のフローを用いることで, このスケーリング則を導きましょう. このスケーリング則により臨界指数が  $L_*$  の固有値で書き表される事が分かります.

#### 4.3.1 単位体積当たりの自由エネルギーと相関長のスケーリング則

まず単位体積当たりの自由エネルギー  $f$  から始めましょう. 理論  $S$  の単位体積当たりの自由エネルギーに逆温度  $\beta$  を掛けたものを  $(\beta f)[S]$  と記す事にすると,  $(\beta f)[S]$  は次で定義されます:

$$(\beta f)[S] = -\frac{1}{V} \log Z[S] \quad (4.3.1)$$

ここで,  $V$  は系の体積です. 繰り込み群変換  $R_t: S \mapsto R_t(S) = S_t$  は分配関数を不変に保つ事, 及び繰り込み群変換はスケール変換を含んでいた事を考慮すると, 理論  $S$  と  $S_t$  の単位体積当たりの自由エネルギーの間に次の等式が成り立つ事が分かります:

$$(\beta f)[S] = e^{-dt} (\beta f)[S_t] \quad (4.3.2)$$

ここで,  $d$  は空間次元です. 以下,  $S$  として固定点  $S_*$  近傍の理論を考えましょう. この時, 式(4.2.14)より  $S$  を繰り込み群変換したものは  $S_t = S_* + \sum_n g_n(0) e^{\lambda_n t} \mathcal{O}_n$  と書けるので, 式(4.3.2)は次の等式を意味します:

$$(\beta f)(g_1(0), g_2(0), g_3(0), \dots) = e^{-dt} (\beta f)(g_1(0) e^{\lambda_1 t}, g_2(0) e^{\lambda_2 t}, g_3(0) e^{\lambda_3 t}, \dots) \quad (4.3.3)$$

これは第2.3節で調べたスケーリング則(2.3.2)を拡張したものに他なりません. 同様に, 式(4.2.17)の所で述べた相関長に対して成り立つ等式  $\xi[S] = e^t \xi[S]$  も固定点近傍の理論に対しては次のスケーリング則を与えます:

$$\xi(g_1(0), g_2(0), g_3(0), \dots) = e^t \xi(g_1(0) e^{\lambda_1 t}, g_2(0) e^{\lambda_2 t}, g_3(0) e^{\lambda_3 t}, \dots) \quad (4.3.4)$$

さて, Ising 模型やその他の格子模型 (XY 模型や Heisenberg 模型) の場合, 外部磁場が無い場合は実質温度  $T$  だけが理論のパラメータで, この温度を臨界温度  $T = T_c$  にチューニングすることで臨界点  $T = T_c$  に到達出来ます. これは Ising 模型等では 1 つのパラメータだけを操作すれば臨界面  $\mathcal{S}_{cr}$  に到達出来る事を意味しています. これを踏まえて, 以下,  $\lambda_1$  だけが正の固有値で, 他の固有値  $\{\lambda_2, \lambda_3, \dots\}$  は全て負の固有値だとしましょう. そして, relevant パラメータ  $g_1(0)$  を臨界温度を基準にして測った温度  $\tau$  と同一視します:

$$g_1(0) = \frac{T - T_c}{T_c} = \tau \quad (4.3.5)$$

すると, irrelevant パラメータ  $g_n(t) = g_n(0) e^{\lambda_n t}$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) は  $t$  が増えるにつれ急激にゼロに収束するので, ある程度大きい  $t > 0$  に対してはスケーリング則(4.3.3)及び(4.3.4)は実質次の等式を意味します:

$$(\beta f)(\tau, g_2(0), g_3(0), \dots) \sim e^{-dt} (\beta f)(\tau e^{\lambda_1 t}, 0, 0, \dots) \quad (4.3.6a)$$

$$\xi(\tau, g_2(0), g_3(0), \dots) \sim e^t \xi(\tau e^{\lambda_1 t}, 0, 0, \dots) \quad (4.3.6b)$$

ここで、 $t$  の任意性を利用して、 $t$  を次の等式を満たす様を選びましょう:

$$|\tau|e^{\lambda_1 t} = 1 \quad (4.3.7)$$

即ち、 $t$  を次の様を選びます:

$$t = -\frac{1}{\lambda_1} \log |\tau| \quad (4.3.8)$$

すると、式(4.3.6a)と(4.3.6b)は次の様になります:

$$(\beta f)(\tau, g_2(0), g_3(0), \dots) \sim |\tau|^{d/\lambda_1} (\beta f)(\text{sgn}(\tau), 0, 0, \dots) \quad (4.3.9a)$$

$$\xi(\tau, g_2(0), g_3(0), \dots) \sim |\tau|^{-1/\lambda_1} \xi(\text{sgn}(\tau), 0, 0, \dots) \quad (4.3.9b)$$

右辺の  $(\beta f)(\text{sgn}(\tau), 0, 0, \dots)$  や  $\xi(\text{sgn}(\tau), 0, 0, \dots)$  は臨界面から離れた RT 上の理論の量なので、ある有限な値<sup>\*15</sup>で、且つ  $\tau$  の符号のみに依存します。つまり、上の式で臨界面近傍の理論の  $\beta f$  や  $\xi$  の  $\tau$  依存性が決定出来た事になります。まず式(4.3.9b)より臨界指数  $\nu$  が次の様に読み取れます:

$$\nu = \frac{1}{\lambda_1} \quad (4.3.10)$$

また、比熱は  $c \sim -\frac{\partial^2(\beta f)}{\partial \tau^2} \sim |\tau|^{-2+d/\lambda_1}$  となるので、これより臨界指数  $\alpha$  が次の様に読み取れます:

$$\alpha = 2 - \frac{d}{\lambda_1} = 2 - d\nu \quad (4.3.11)$$

以上により、臨界指数  $\{\alpha, \nu\}$  が  $L_*$  の正の固有値  $\lambda_1$  で与えられる事が分かりました。関係式  $\alpha = 2 - d\nu$  を特に Josephson の等式と呼んだりします。

以上の議論は外部磁場がゼロの場合ですが、外部磁場が非ゼロの場合は relevant パラメータ  $g_2(0)$  がもう 1 つ加わって、これを外部磁場  $h$  と同一視します。この場合も同様に出来て、第2章2.3節のものと本質的に同じ結果が得られます。やり方は全く同じなので繰り返しません、特に式(2.3.18a)と(2.3.18b)で示したスケーリング関係式  $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$  と  $\gamma = \beta(\delta - 1)$  が得られます。

### 4.3.2 相関関数のスケーリング則

最後に相関関数のスケーリング則について調べて終わりにしましょう。用いるのは運動量表示相関関数に対する繰り込み群方程式(4.1.24)です。まず興味があるのは臨界面  $S_{\text{cr}}$  上の理論  $S$  です。先程と同じくこの理論  $S$  は固定点  $S_*$  近傍にあって、この固定点近傍では  $g_1$  だけが relevant パラメータで、残りは全て irrelevant パラメータだとしましょう。  $g_1(0) = \tau$  と同一視されます。すると、この臨界面上の理論  $S$  を繰り込み群変換したものの  $R_t(S) = S_t$  は次の様に書けます:

$$S_t = S_* + \sum_n g_n(0) e^{\lambda_n t} \mathcal{O}_n \quad \text{with} \quad g_1(0) = \tau = 0 \quad (4.3.12)$$

任意の  $t$  に対して  $S_t$  も臨界面上にある事に注意しましょう。いま固有値  $\{\lambda_2, \lambda_3, \dots\}$  は全て負なので、 $S_t$  は  $t$  が増えるにつれて急速に固定点  $S_*$  に近づき、 $t \rightarrow \infty$  で  $S_*$  に収束します。従って、 $t \rightarrow \infty$  の極限では理論  $S$  と  $S_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S_*$  の間の繰り込み群方程式(4.1.24)は次の様になります:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \tilde{\phi}(e^{-t} \mathbf{q}_1) \cdots \tilde{\phi}(e^{-t} \mathbf{q}_n) \rangle_S = \exp\left(n \int_0^\infty dt (d - \Delta(S_t))\right) \langle \tilde{\phi}(\mathbf{q}_1) \cdots \tilde{\phi}(\mathbf{q}_n) \rangle_{S_*}, \quad \forall |\mathbf{q}_i| \in (0, \Lambda) \quad (4.3.13)$$

さて、今からやりたいのはこの方程式の右辺を  $n = 2$  の場合で計算して、臨界面上の理論  $S$  の 2 点相関関数の低運動量極限を求める事です。そこで、まず固定点上の繰り込み群方程式を使って右辺を少し書き換えましょう。  $t = 0$  での初期値が固定点  $S_*$  だった場合、繰り込み群方程式(4.1.24)は次の様になります:

$$\langle \tilde{\phi}(e^{-t} \mathbf{q}_1) \cdots \tilde{\phi}(e^{-t} \mathbf{q}_n) \rangle_{S_*} = e^{nt(d - \Delta(S_*))} \langle \tilde{\phi}(\mathbf{q}_1) \cdots \tilde{\phi}(\mathbf{q}_n) \rangle_{S_*}, \quad \forall |\mathbf{q}_i| \in (0, \Lambda) \quad (4.3.14)$$

\*15 ここでは irrelevant パラメータ  $g_n(t)$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) を全てゼロにしていますが、実は irrelevant パラメータへの依存性が  $1/g_n(t)$  の様に逆冪の場合があって、この時は単純にゼロには出来ません。この様な irrelevant パラメータを危険な irrelevant パラメータ (dangerous irrelevant parameter) と呼びます。実は (上部) 臨界次元  $d_c$  より上の次元ではこれが現れるのですが、簡単の為ここでは  $d < d_c$  とします。

これを用いると式(4.3.13)は次の様に書き換えられます:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \tilde{\phi}(e^{-t} \mathbf{q}_1) \cdots \tilde{\phi}(e^{-t} \mathbf{q}_n) \rangle_S = \exp \left( n \int_0^\infty dt (\Delta(S_*) - \Delta(S_t)) \right) \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \tilde{\phi}(e^{-t} \mathbf{q}_1) \cdots \tilde{\phi}(e^{-t} \mathbf{q}_n) \rangle_{S_*}, \quad \forall |\mathbf{q}_i| \in (0, \Lambda) \quad (4.3.15)$$

ここで  $\mathbf{p}_i = e^{-t} \mathbf{q}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) と書くと, この式は大雑把には次の様にも書けます:

$$\langle \tilde{\phi}(\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}(\mathbf{p}_n) \rangle_S \rightarrow \exp \left( n \int_0^\infty dt (\Delta(S_*) - \Delta(S_t)) \right) \langle \tilde{\phi}(\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{\phi}(\mathbf{p}_n) \rangle_{S_*} \quad \text{as } |\mathbf{p}_i| \rightarrow 0 \quad (4.3.16)$$

これより理論  $S$  の相関関数の低運動量極限は, 定数倍を除いて固定点  $S_*$  の相関関数の低運動量極限と一致する事が分かりました. 以下,  $n = 2$  の場合の繰り込み群方程式(4.3.14)を解いて  $S_*$  の 2 点相関関数をまず求めて, 次にそれを使って  $S$  の座標表示 2 点相関関数  $\langle \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}') \rangle_S$  の長距離極限  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow \infty$  での漸近形を求め, それから臨界指数  $\eta$  を読み取って行きます.

まず固定点  $S_*$  上の理論に限らず, 理論  $S$  の運動量表示 2 点相関関数は, 並進対称性及び回転対称性より必ず次の形を取ります:

$$\langle \tilde{\phi}(\mathbf{q}) \tilde{\phi}(\mathbf{q}') \rangle_S = \tilde{G}_S^{(2)}(|\mathbf{q}|) (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \quad (4.3.17)$$

特に  $S = S_*$  の場合を繰り込み群方程式  $\langle \tilde{\phi}(e^{-t} \mathbf{q}) \tilde{\phi}(e^{-t} \mathbf{q}') \rangle_{S_*} = e^{2t(d-\Delta(S_*))} \langle \tilde{\phi}(\mathbf{q}) \tilde{\phi}(\mathbf{q}') \rangle_{S_*}$  に代入すると,  $\tilde{G}_{S_*}^{(2)}$  に対して次のスケーリング則が得られます:

$$\tilde{G}_{S_*}^{(2)}(e^{-t} |\mathbf{q}|) = e^{(d-2\Delta(S_*))t} \tilde{G}_{S_*}^{(2)}(|\mathbf{q}|) \quad \text{for any } t \quad (4.3.18)$$

但し,  $\delta^d(e^{-t} \mathbf{q} + e^{-t} \mathbf{q}') = e^{dt} \delta^d(\mathbf{q} + \mathbf{q}')$  を用いました. 前節同様, このスケーリング則は解く事が出来ます. まず  $t$  の任意性を利用して  $t = \log(|\mathbf{q}|/q_0)$  と選びましょう. ここで,  $q_0$  は適当な運動量スケールで, 対数の中身を無次元にする為だけに導入しました. すると,  $\tilde{G}_{S_*}^{(2)}$  の  $|\mathbf{q}|$  依存性は次の様に決まります:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{S_*}^{(2)}(|\mathbf{q}|) &= e^{(2\Delta(S_*)-d)t} \tilde{G}_{S_*}^{(2)}(e^{-t} |\mathbf{q}|) \\ &= \left( \frac{|\mathbf{q}|}{q_0} \right)^{2\Delta(S_*)-d} \tilde{G}_{S_*}^{(2)}(q_0) \\ &\propto |\mathbf{q}|^{2\Delta(S_*)-d} \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

これで固定点  $S_*$  での運動量表示 2 点相関関数が次の様に求まりました:

$$\langle \tilde{\phi}(\mathbf{p}) \tilde{\phi}(\mathbf{p}') \rangle_{S_*} = \mathcal{N} |\mathbf{p}|^{2\Delta(S_*)-d} (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \quad (4.3.20)$$

但し,  $\mathcal{N}$  は規格化因子です. 従って, 理論  $S$  の低運動量極限 2 点相関関数は,  $\tilde{G}_S^{(2)}(|\mathbf{p}|)$  で書くと次の様になります:

$$\tilde{G}_S^{(2)}(|\mathbf{p}|) \rightarrow \mathcal{N} \exp \left( 2 \int_0^\infty dt (\Delta(S_*) - \Delta(S_t)) \right) |\mathbf{p}|^{2\Delta(S_*)-d} \quad \text{as } |\mathbf{p}| \rightarrow 0 \quad (4.3.21)$$

臨界面上の理論  $S$  の座標表示 2 点相関関数はこれを Fourier 変換すれば良く, 次の様に書き表されます:

$$\begin{aligned} \langle \phi(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}') \rangle_S &= \int_{|\mathbf{p}| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \int_{|\mathbf{p}'| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}'}{(2\pi)^d} \langle \tilde{\phi}(\mathbf{p}) \tilde{\phi}(\mathbf{p}') \rangle_S e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}'} \\ &= \int_{|\mathbf{p}| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \int_{|\mathbf{p}'| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}'}{(2\pi)^d} \tilde{G}_S^{(2)}(|\mathbf{p}|) (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p} + \mathbf{p}') e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}'} \\ &= \int_{|\mathbf{p}| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \tilde{G}_S^{(2)}(|\mathbf{p}|) e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^d} \int_{|\mathbf{u}| < \Lambda |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{d^d \mathbf{u}}{(2\pi)^d} \tilde{G}_S^{(2)}\left(\frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\right) e^{i\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}} \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

但し, 2 行目で式(4.3.17)を用い, 3 行目で  $\mathbf{p}'$  積分を実行し, 最後の行で変数変換  $\mathbf{u} = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \mathbf{p}$  を行いました. また,  $\mathbf{n} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  は単位ベクトルです. 次に長距離極限  $\Lambda |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow \infty$  を考えましょう<sup>\*16</sup>. まず, 式(4.3.21)より次が成り立ちます:

$$\tilde{G}_S^{(2)}\left(\frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\right) \rightarrow \mathcal{N} \exp \left( 2 \int_0^\infty dt (\Delta(S_*) - \Delta(S_t)) \right) \frac{|\mathbf{u}|^{2\Delta(S_*)-d}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{2\Delta(S_*)-d}} \quad \text{as } \Lambda |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow \infty \quad (4.3.23)$$

<sup>\*16</sup> 長距離極限と呼んでいますが, これは 2 点間の距離  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  が無限大である必要は無く, 格子間隔  $\Lambda^{-1}$  よりもずっと大きければ良いです.

臨界指数	定義	場の理論での求め方
$\alpha$	$ \tau  \ll 1$ かつゼロ磁場での定積比熱 $c \sim  \tau ^{-\alpha}$	$\alpha = 2 - \frac{d}{\lambda_1} = 2 - d\nu$
$\beta$	$ \tau  \ll 1$ かつゼロ磁場での秩序変数 $\langle \phi \rangle \sim  \tau ^\beta$	$\beta = \frac{\Delta(S_*)}{\lambda_1} = \frac{1}{2}\nu(d-2+\eta)$
$\gamma$	$ \tau  \ll 1$ かつゼロ磁場での応答関数 $\chi \sim  \tau ^{-\gamma}$	$\gamma = \frac{d-2\Delta(S_*)}{\lambda_1} = \nu(2-\eta)$
$\delta$	$\tau = 0$ での秩序変数 $\langle \phi \rangle \sim h^{1/\delta}$	$\delta = \frac{d}{\Delta(S_*)} - 1 = \frac{d+2-\eta}{d-2+\eta}$
$\nu$	$ \tau  \ll 1$ での秩序変数の相関長 $\xi \sim  \tau ^{-\nu}$	$\nu = \frac{1}{\lambda_1}$
$\eta$	$\tau = 0$ での秩序変数の異常次元 $G^{(2)}(\mathbf{x}) \sim  \mathbf{x} ^{-d+2-\eta}$	$\eta = 2\Delta(S_*) - d + 2$

**表4.3:** 臨界指数と  $L_*$  の正固有値  $\lambda_1$  及びスケーリング次元  $\Delta(S_*)$  との関係.  $\tau = (T - T_c)/T_c$  は臨界温度を基準にして測った無次元化した温度を表します. 臨界指数は  $\lambda_1$  と  $\Delta(S_*)$  (若しくは  $\nu$  と  $\eta$ ) を求めれば全て決定できます. 但し, ここでは空間次元  $d$  は上部臨界次元  $d_c$  よりも下だと仮定しています.

これより理論  $S$  の座標表示 2 点相関関数の長距離極限が次の様に得られます:

$$\begin{aligned} \langle \phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}') \rangle_S &\rightarrow \frac{\mathcal{N}e^{2\int_0^\infty dt(\Delta(S_*)-\Delta(S_t))}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{2\Delta(S_*)}} \int_{|\mathbf{u}|<\infty} \frac{d^d\mathbf{u}}{(2\pi)^d} |\mathbf{u}|^{2\Delta(S_*)-d} e^{i\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}} \\ &\propto \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{2\Delta(S_*)}} \quad \text{as } \Lambda|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

これを式(3.3.6)と比較する事で臨界指数  $\nu$  が次の様に読み取れます:

$$\eta = 2\Delta(S_*) - d + 2 \quad (4.3.25)$$

以上, 計算が長くなりましたが, 臨界指数  $\eta$  は結局固定点  $S_*$  でのスケーリング次元  $\Delta(S_*)$  で決まる事が分かりました. ここまでで  $\nu, \alpha, \eta$  を求めた訳ですが, 残りの 3 つの臨界指数  $\{\beta, \gamma, \delta\}$  は 3 つのスケーリング関係式  $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$ ,  $\gamma = \beta(\delta - 1)$ ,  $\gamma = \nu(2 - \eta)$  を用いる事で全て  $\lambda_1$  と  $\Delta(S_*)$  で書き表せます. 結果は表4.3にまとめました.

## 参考文献

Wilson の繰り込み群について解説した教科書やレビュー論文, 講義録等は数多くあります. その中でも私が読んで勉強したことがあるものや参考にしたものを教科書を中心に幾つか挙げておきます.

まず教科書としては次の 5 冊を参考にしました:

- [1] J. J. Binney, N. J. Dowrick, A. J. Fisher, and M. E. J. Newman, *The Theory of Critical Phenomena* (Oxford University Press, 1992)
- [2] J. Cardy, *Scaling and Renormalization in Statistical Physics* (Cambridge University Press, 1996)
- [3] M. Kardar, *Statistical Physics of Fields* (Cambridge University Press, 2007)
- [4] I. Herbut, *A Modern Approach to Critical Phenomena* (Cambridge University Press, 2007)
- [5] R. Shankar, *Quantum Field Theory and Condensed Matter* (Cambridge University Press, 2017)

初学者におすすめなのは [3] の第 5 章までと, [5] の第 11 章から第 14 章までです. これらの内容が一通り理解出来ていれば取り敢えず十分でしょう. [1] は場の理論の摂動計算法に詳しいですが, この章で取り扱ったような繰り込み群の一般論は載っていません. 因みに表4.1は [1] の 21 ページから殆どそのまま引用しました. [2] と [4] はコンパクトな本なので一通りの話題を知るには良いと思います. また, 講義録としては Wilson 自身によるものと, 他には Steven Weinberg によるものが有名です:

- [6] K. G. Wilson and J. Kogut, "The renormalization group and the  $\epsilon$  expansion," *Phys. Rep.* **12** (1974) 75–200
- [7] S. Weinberg, Critical Phenomena for Field Theorists, in *Understanding the Fundamental Constituents of Matter* (Plenum Press, 1978), pp. 1–52

[6] は有名ですが、決して分かり易くはありません。但し、時間を掛けて読む価値は充分にあります。また、[7] のプレプリントは下の KEK ライブラリーからダウンロード可能です:

<https://lib-extopc.kek.jp/preprints/PDF/1976/7610/7610218.pdf>

因みに、この [7] で Steven Weinberg は漸近安全性 (**asymptotic safety**) なる語を導入しました。漸近安全な理論とは、繰り込み群のフローを逆に辿って行った時に或る極限值 (固定点)  $S_*$  に収束する理論の事で、要するに繰り込み可能な理論の事です。漸近安全性とは単に繰り込み可能性の事なのですが、特に量子重力理論の分野では漸近安全性という語が好まれて使われています。

さて、第 4.2.3 節で繰り込み群のリミットサイクルやカオスのフローについて述べましたが、この辺の話は聞いた事がない人も多いかもしれません。この箇所は次の David J. Gross の講義録の第 5.1 節から影響を受けて書いたものです:

[8] D. J. Gross, Applications of the Renormalization Group to High-energy Physics, in *Methods in Field Theory: Les Houches Session XXVIII* (World Scientific Publishing, 1981), pp. 141–250

この講義録もとても有名で、Wilson 流の繰り込み群の解説ではありませんが、素粒子物理に於ける繰り込み群の活用法について論じていて読むととても勉強になります。私は大学院生の時にこれで勉強しました。また、リミットサイクルやカオスについては力学系の教科書も参考にしました。大概どの力学系の教科書にも載っているのですが、ここでは敢えて文献は挙げません。

最後に、この講義では全く扱いませんが、Wilson の繰り込み群は場の理論の連続極限 (連続空間上の場の理論の非摂動的構成法) についても教えてくれます。これはかなり高級な話題なのですが、興味のある人は次の教科書で勉強すると良いでしょう:

[9] 江沢洋, 渡辺敬二, 鈴木増雄, 田崎晴明, 『くりこみ群の方法』(岩波書店, 2000 年)

[10] 園田英徳, 『今度こそわかるくりこみ理論』(講談社, 2014 年)

[9] は第 4 章, [10] は教科書丸ごとが連続極限の話題になっています。また, Shankar の教科書 [5] の第 14 章にも連続極限の解説があります。Wilson の講義録 [6] では第 12 章及び第 13 章が対応します。因みに園田さんは繰り込み群の講義ノートを幾つも書かれていて、私が大学院生の頃に読んで勉強していたのは次の 2 つです:

[11] 園田英徳, 『連続極限のとり方』(素粒子論研究 **109** no. 5 (2004) 35–89)

[12] H. Sonoda, “Wilson’s Renormalization Group and Its Applications in Perturbation Theory,”  
arXiv:hep-th/0603151

どちらもウェブ上で無料で入手出来ます。但し、とても難しいです。



## 第5章

### ε 展開

$d (< d_c = 4)$  次元  $\phi^4$  模型には Gauss 固定点の他に Wilson-Fisher 固定点が存在します。この章では上部臨界次元  $d_c$  からのずれ  $\epsilon = d_c - d$  に関する摂動論 —  $\epsilon$  展開 — を用いて  $4 - \epsilon$  次元  $\phi^4$  模型の臨界現象を調べます。

#### 5.1 繰り込み群変換とキュムラント展開

##### この節のまとめ

- 1 成分スカラー場の理論を考える。スカラー場  $\phi$  を高運動量モード  $\phi_h$  と低運動量モード  $\phi_l$  に分けると、 $\phi_h$  と  $\phi_l$  が直交する事から、理論空間  $S$  に属する作用汎関数  $S$  は必ず次の様に分解出来る:

$$S[\phi] = S_0[\phi_h] + S_0[\phi_l] + S_1[\phi_h, \phi_l]$$

但し、 $S_0$  は場の 2 次式だけから成る自由場の理論で、 $S_1$  は上の分解の残り。高運動量モード  $\phi_h$  を汎関数積分して得られる作用  $S'_l$  は次の様にキュムラント展開 (cumulant expansion) で書ける:

$$-S'_l[\phi_l] = \log Z_0 - S_0[\phi_l] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle S_1^n \rangle_c$$

但し、 $\langle S_1^n \rangle_c$  と  $Z_0$  は自由場の理論  $S_0[\phi_h]$  に関する  $n$  次のキュムラントと分配関数。キュムラントは自由場の理論  $S_0[\phi_h]$  に関する期待値  $\langle * \rangle$  を用いて書き下せて、例えば最初の 3 項は次の様に与えられる:

$$\langle S_1 \rangle_c = \langle S_1 \rangle, \quad \langle S_1^2 \rangle_c = \langle S_1^2 \rangle - \langle S_1 \rangle^2, \quad \langle S_1^3 \rangle_c = \langle S_1^3 \rangle - 3\langle S_1^2 \rangle \langle S_1 \rangle + 2\langle S_1 \rangle^3$$

- $d$  次元  $\phi^4$  模型

$$S[\phi] = \int d^d \mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{m_0 \Lambda^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda_0 \Lambda^{4-d}}{4!} \phi^4 \right]$$

を繰り込み群変換すると、キュムラント展開の 1 次の近似では、繰り込み群変換  $R_t : S \mapsto S_t$  の固定点は Gauss 固定点 (無質量自由場の理論)  $S_* = \frac{1}{2} \int d^d \mathbf{x} (\nabla \phi)^2$  のみ。この Gauss 固定点近傍の理論を繰り込み群変換したものは、線型近似の範囲で次の様に表される:

$$S_t[\phi] = S_* + \sum_{n=1,2} g_n(t) \int d^d \mathbf{x} \mathcal{O}_n(\mathbf{x}) \quad \text{with} \quad g_n(t) = g_n(0) e^{\lambda_n t}$$

但し、 $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 4 - d$  は Gauss 固定点周りで線型化された繰り込み群変換の生成子  $L_*$  の固有値。 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  は対応する固有ベクトル (固有場) で、次式で与えられる:

$$\mathcal{O}_1(\mathbf{x}) = \frac{\Lambda^2 \phi^2(\mathbf{x})}{2} \quad \text{and} \quad \mathcal{O}_2(\mathbf{x}) = -\frac{C}{d-2} \frac{\Lambda^2 \phi^2(\mathbf{x})}{2} + \frac{\Lambda^{4-d} \phi^4(\mathbf{x})}{4!}$$

但し、 $C = \frac{\Omega(d)}{2(2\pi)^d}$ 。また、 $g_1(0) = m_0^2 + \frac{C}{d-2} \lambda_0$ ,  $g_2(0) = \lambda_0$  で、 $d > 4$  では  $g_1$  のみが relevant パラメータ。

第4章で繰り込み群、繰り込み群のフロー方程式、固定点周りで線型化したフロー方程式、相関関数に対する繰り込み群方程式等の一般論について割りと詳しく述べました。これらは全て分配関数を不変に保つ繰り込み群変換  $R_t : S \mapsto S_t$  に基づいている訳ですが、

実はこの変換を実際に行うと  $S$  から  $S_t$  を構成するのは非常に困難です。第4.1.2節で見た様に、繰り込み群変換は  $t \in (0, \infty)$  を変換のパラメータ、 $\Lambda$  を理論のカットオフとした時、次の3つの操作から成っていました:

1. 高運動量モードの積分 — カットオフ理論の高運動量モード  $|p| \in (e^{-t}\Lambda, \Lambda)$  の自由度を積分する
2. スケール変換 — 理論のカットオフを  $e^{-t}\Lambda$  から  $\Lambda$  に戻す
3. 再規格化 — 場を再定義して運動項を正しく規格化し直す

しかしながら、実際には1の汎関数積分の操作を厳密に行うのは絶望的なほど困難です。一方、2と3の操作は1が出来れば比較的容易に行えます。通常、1の操作は適当な近似の下で摂動的に行うのですが、その際キュムラント展開 (cumulant expansion) が非常に有用です。このキュムラント展開を用いると、第3.1.3節で導入した Wick の定理だけを用いて繰り込み群変換が行えます。以下、まずキュムラント展開について簡単に学んだ後、 $\phi^4$  模型を例に繰り込み群変換をキュムラント展開の1次のオーダーで実行してみましよう。キュムラント展開の1次では有名な Wilson-Fisher 固定点は現れないのですが、最初にやる練習問題としては充分です。

### 5.1.1 キュムラント展開

汎用性を持たせる為に少し抽象的な話から始めます。まず  $V$  を適当な線型空間、 $\langle * \rangle : V \rightarrow \mathbb{C}$  を次の線型性を満たす演算 (期待値を取る操作) としましよ:

$$\langle \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle x \rangle + \beta \langle y \rangle, \quad \forall x, y \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (5.1.1)$$

後の繰り込み群変換で想定しているのは  $V$  として理論空間  $S$  を持って来た場合で、この時  $x \in V$  は適当な汎関数です\*1。さて、 $\langle * \rangle$  を上を満たす演算とした時、適当な  $x \in V$ 、 $J \in \mathbb{C}$  に対して次が成り立ちます:

$$\begin{aligned} \langle e^{Jx} \rangle &= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^n}{n!} x^n \right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^n}{n!} \langle x^n \rangle \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J^n}{n!} \langle x^n \rangle \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

ここで、2番目の等号は線型性の仮定(5.1.1)から従います。次に対数関数の Taylor 展開

$$\log(1+x) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} x^m \quad (5.1.3)$$

を用いて  $\log \langle e^{Jx} \rangle = \log \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J^n}{n!} \langle x^n \rangle \right)$  を展開して  $J$  の冪級数として書き直す事を考えましよう。この展開は必ず  $J$  の冪の次数毎にまとめることが出来て、必ず次の形に持って行けます:

$$\log \langle e^{Jx} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J^n}{n!} \langle x^n \rangle_c \quad (5.1.4)$$

ここで  $\langle x^n \rangle_c$  は  $\{\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle, \dots, \langle x^n \rangle\}$  から作られる  $J$  に依存しない多項式で、 $n$  次のキュムラント ( $n$ -th cumulant) と呼びます。実際に  $\log \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J^n}{n!} \langle x^n \rangle \right)$  を展開して  $J$  の冪で整理してみましよう。最初の数項なら次の様にして簡単に計算出来ます:

$$\begin{aligned} \log \langle e^{Jx} \rangle &= \log \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J^n}{n!} \langle x^n \rangle \right) \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J^n}{n!} \langle x^n \rangle \right)^m \\ &= \left( J \langle x \rangle + \frac{J^2}{2!} \langle x^2 \rangle + \frac{J^3}{3!} \langle x^3 \rangle + \frac{J^4}{4!} \langle x^4 \rangle + \dots \right) - \frac{1}{2} \left( J \langle x \rangle + \frac{J^2}{2!} \langle x^2 \rangle + \frac{J^3}{3!} \langle x^3 \rangle + \dots \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3} \left( J \langle x \rangle + \frac{J^2}{2!} \langle x^2 \rangle + \dots \right)^3 - \frac{1}{4} (J \langle x \rangle + \dots)^4 + \dots \end{aligned}$$

\*1 表4.2で述べた様に、厳密に言うると理論空間は和とスカラー倍の下で閉じていないので線型空間ではありません。しかし、これは規格化条件があるせいで、規格化については一旦忘れれば線型空間となります。実際、高運動量モードの積分の箇所では規格化は気にしなくて良いので、この議論がそのまま使えるのです。



$$\begin{aligned}
&= J\langle x \rangle + \frac{J^2}{2!} (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2) + \frac{J^3}{3!} (\langle x^3 \rangle - 3\langle x^2 \rangle \langle x \rangle + 2\langle x \rangle^3) \\
&\quad + \frac{J^4}{4!} (\langle x^4 \rangle - 4\langle x^3 \rangle \langle x \rangle - 3\langle x^2 \rangle^2 + 12\langle x^2 \rangle \langle x \rangle^2 - 6\langle x \rangle^4) + \dots
\end{aligned} \tag{5.1.5}$$

これより  $\langle x \rangle_c, \langle x^2 \rangle_c, \langle x^3 \rangle_c, \langle x^4 \rangle_c$  が次の様に読み取れます:

$$\langle x \rangle_c = \langle x \rangle \tag{5.1.6a}$$

$$\langle x^2 \rangle_c = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \tag{5.1.6b}$$

$$\langle x^3 \rangle_c = \langle x^3 \rangle - 3\langle x^2 \rangle \langle x \rangle + 2\langle x \rangle^3 = \langle (x - \langle x \rangle)^3 \rangle \tag{5.1.6c}$$

$$\langle x^4 \rangle_c = \langle x^4 \rangle - 4\langle x^3 \rangle \langle x \rangle - 3\langle x^2 \rangle^2 + 12\langle x^2 \rangle \langle x \rangle^2 - 6\langle x \rangle^4 = \langle (x - \langle x \rangle)^4 \rangle - 3\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle^2 \tag{5.1.6d}$$

式(5.1.4)で示した  $J$  の関数  $W(J) = \log \langle e^{Jx} \rangle$  をキュムラント母関数 (cumulant generating function) と呼びます. 式(5.1.4)は次式と等価であることに注意しましょう:

$$\langle e^{Jx} \rangle = \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J^n}{n!} \langle x^n \rangle_c \right) \tag{5.1.7}$$

実際, 両辺の対数を取ると式(5.1.4)になります. 以下の繰り込み群変換ではこの表式を用います.

### 5.1.2 繰り込み群変換とキュムラント展開

次に上のキュムラント展開を場の理論の繰り込み群変換に応用しましょう. 簡単の為, 1成分スカラー場  $\phi$  の理論を考えます. 式(4.1.14)でやった様に, 繰り込み群変換ではまず  $\phi$  を次の様に低運動量モードと高運動量モードに分けます:<sup>\*2</sup>

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi_l(\mathbf{x}) + \phi_h(\mathbf{x}) \tag{5.1.8}$$

但し,  $\phi_l$  と  $\phi_h$  は次の積分で定義されます:

$$\phi_l(\mathbf{x}) = \int_{|\mathbf{p}| \in (0, e^{-t}\Lambda)} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \quad \text{and} \quad \phi_h(\mathbf{x}) = \int_{|\mathbf{p}| \in (e^{-t}\Lambda, \Lambda)} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}_h(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \tag{5.1.9}$$

この様にスカラー場  $\phi$  を2つに分けた時, 理論空間  $S$  に属する作用汎関数  $S[\phi]$  は必ず次の様に分解できます:

$$S[\phi] = S_0[\phi_l] + S_0[\phi_h] + S_I[\phi_l, \phi_h] \tag{5.1.10}$$

ここで,  $S_0$  は場の2次式だけから成る作用汎関数で,  $S_I$  は場の3次以上の項から成る相互作用項です. 多くの場合,  $S_0$  は自由場の理論で, 簡単に確かめる事が出来る様に  $S_0[\phi] = S_0[\phi_l] + S_0[\phi_h]$  となります:

$$\begin{aligned}
S_0[\phi] &= \frac{1}{2} \int d^d \mathbf{x} [(\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2] \\
&= \frac{1}{2} \int_{|\mathbf{p}| \in (0, \Lambda)} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} (\mathbf{p}^2 + m^2) \tilde{\phi}(\mathbf{p}) \tilde{\phi}(-\mathbf{p}) \\
&= \frac{1}{2} \int_{|\mathbf{p}| \in (0, e^{-t}\Lambda)} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} (\mathbf{p}^2 + m^2) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}) \tilde{\phi}_l(-\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \int_{|\mathbf{p}| \in (e^{-t}\Lambda, \Lambda)} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} (\mathbf{p}^2 + m^2) \tilde{\phi}_h(\mathbf{p}) \tilde{\phi}_h(-\mathbf{p}) \\
&= \frac{1}{2} \int d^d \mathbf{x} [(\nabla \phi_l)^2 + m^2 \phi_l^2] + \frac{1}{2} \int d^d \mathbf{x} [(\nabla \phi_h)^2 + m^2 \phi_h^2] \\
&= S_0[\phi_l] + S_0[\phi_h]
\end{aligned} \tag{5.1.11}$$

この様に低運動量モード  $\phi_l$  と高運動量モード  $\phi_h$  は直交するので, 場の2次式の場合は  $\phi_l$  と  $\phi_h$  が混ざった項は現れません. しかし, 3次以上の項はこの様には行かず, 一般に  $\phi_l$  と  $\phi_h$  が混ざって式(5.1.10)の様になります.

さて, 第4.1.2節で見た様に, 繰り込み群変換の第1の操作は, 汎関数積分  $Z[S] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}$  のうち  $\phi_h$  に関する積分を先に実行して新たな汎関数  $S'_I[\phi_l]$  を作る, というものでした. 分解(5.1.10)を使うとこれは次の様に行われます:

$$Z[S] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}$$

<sup>\*2</sup> 第4.1.2節では運動量表示でやりましたが, ここでは座標表示で議論する事にします.

$$\begin{aligned}
&= \int \mathcal{D}\phi_l \mathcal{D}\phi_h e^{-S_0[\phi_l] - S_0[\phi_h] - S_l[\phi_l, \phi_h]} \\
&= \int \mathcal{D}\phi_l e^{-S_0[\phi_l]} \int \mathcal{D}\phi_h e^{-S_0[\phi_h] - S_l[\phi_l, \phi_h]} \\
&= \int \mathcal{D}\phi_l e^{-S'_l[\phi_l]} \tag{5.1.12}
\end{aligned}$$

但し、 $S'_l$  は次の様に書き表されます:

$$\begin{aligned}
e^{-S'_l[\phi_l]} &= e^{-S_0[\phi_l]} \int \mathcal{D}\phi_h e^{-S_0[\phi_h] - S_l[\phi_l, \phi_h]} \\
&= Z_0 e^{-S_0[\phi_l]} \cdot \frac{1}{Z_0} \int \mathcal{D}\phi_h e^{-S_l[\phi_l, \phi_h]} e^{-S_0[\phi_h]} \\
&= Z_0 e^{-S_0[\phi_l]} \langle e^{-S_l} \rangle \tag{5.1.13}
\end{aligned}$$

但し、 $Z_0 = \int \mathcal{D}\phi_h e^{-S_0[\phi_h]}$  です。期待値  $\langle \cdot \rangle$  は Boltzmann 因子  $e^{-S_0[\phi_h]}$  に関するもので、適当な  $\phi_h$  の汎関数  $\mathcal{O}[\phi_h]$  に対して次の様に定義されます:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z_0} \int \mathcal{D}\phi_h \mathcal{O}[\phi_h] e^{-S_0[\phi_h]} \tag{5.1.14}$$

$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  を適当な汎関数、 $\alpha, \beta$  を適当な数係数とすると、この様に定義された期待値は明らかに線型性  $\langle \alpha \mathcal{O}_1 + \beta \mathcal{O}_2 \rangle = \alpha \langle \mathcal{O}_1 \rangle + \beta \langle \mathcal{O}_2 \rangle$  を満たすので、式(5.1.7)と同様、 $\langle e^{-S_l} \rangle$  はキュムラントで書き表す事が出来て、次の様になります:

$$\langle e^{-S_l} \rangle = \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle S_l^n \rangle_c \right) \tag{5.1.15}$$

ここで、 $n$  次のキュムラント  $\langle S_l^n \rangle_c$  の具体的表式は前節と全く同じで、特に  $n = 1, 2, 3, 4$  の場合は次の様になります:

$$\langle S_l \rangle_c = \langle S_l \rangle \tag{5.1.16a}$$

$$\langle S_l^2 \rangle_c = \langle S_l^2 \rangle - \langle S_l \rangle^2 = \langle (S_l - \langle S_l \rangle)^2 \rangle \tag{5.1.16b}$$

$$\langle S_l^3 \rangle_c = \langle S_l^3 \rangle - 3\langle S_l^2 \rangle \langle S_l \rangle + 2\langle S_l \rangle^3 = \langle (S_l - \langle S_l \rangle)^3 \rangle \tag{5.1.16c}$$

$$\langle S_l^4 \rangle_c = \langle S_l^4 \rangle - 4\langle S_l^3 \rangle \langle S_l \rangle - 3\langle S_l^2 \rangle^2 + 12\langle S_l^2 \rangle \langle S_l \rangle^2 - 6\langle S_l \rangle^4 = \langle (S_l - \langle S_l \rangle)^4 \rangle - 3\langle (S_l - \langle S_l \rangle)^2 \rangle^2 \tag{5.1.16d}$$

式(5.1.15)を使って式(5.1.13)の両辺の対数を取ると、結局、 $S'_l$  は次の様なキュムラント展開で書けます:

$$-S'_l[\phi_l] = \log Z_0 - S_0[\phi_l] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle S_l^n \rangle_c \tag{5.1.17}$$

以下では  $\phi^4$  模型を例に、このキュムラント展開を使って繰り込み群変換を具体的に実行して行きます。

### 5.1.3 具体例: $\phi^4$ 模型の繰り込み群変換

$d$  次元の  $\phi^4$  模型を考えましょう。次の作用汎関数を考えます:

$$S[\phi] = \int d^d \mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right] \tag{5.1.18}$$

先に進む前にここで質量次元 (mass dimension) について述べておきましょう。質量次元とは今やっている統計場の理論の文脈では長さの次元の逆数の事で、例えば座標  $\mathbf{x}$  の質量次元は  $-1$ 、微分  $\nabla$  の質量次元は  $+1$  になります。以下、或る量  $X$  の質量次元を  $\dim[X]$  と表すことにしましょう。まず、作用汎関数  $S$  は指数関数の肩に載せるので無次元でなければならず、従って  $\dim[S] = 0$  でなければなりません。  $\dim[S] = 0$  であれ、と要請する事で場  $\phi$  やパラメータ  $m^2, \lambda$  の質量次元が決まって、次の様になります:

$$\dim[\phi] = \frac{d-2}{2}, \quad \dim[m^2] = 2, \quad \dim[\lambda] = 4-d \tag{5.1.19}$$

以下では質量次元を持ったパラメータは全てカットオフ  $\Lambda$  を単位として測ると便利です。  $m_0^2, \lambda_0$  を無次元のパラメータとして  $m^2 = m_0^2 \Lambda^2, \lambda = \lambda_0 \Lambda^{4-d}$  と書くと、式(5.1.18)は次の様になります:

$$S[\phi] = \int d^d \mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{m_0^2 \Lambda^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda_0 \Lambda^{4-d}}{4!} \phi^4 \right] \tag{5.1.20}$$

以下、キュムラント展開(5.1.17)を用いてこの理論を繰り込み群変換して行きます。

## 繰り込み群変換その 1: 高運動量モードの積分

まず作用汎関数(5.1.20)を式(5.1.10)の様に場の 2 次式とそれ以外に分解しましょう。式(5.1.20)に  $\phi = \phi_l + \phi_h$  を代入すると次の様になります:

$$S[\phi] = S_0[\phi_l] + S_0[\phi_h] + S_1[\phi_l, \phi_h] \quad (5.1.21)$$

但し,

$$S_0[\phi_l] = \int d^d \mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} (\nabla \phi_l)^2 + \frac{m_0^2 \Lambda^2}{2} \phi_l^2 \right] \quad (5.1.22a)$$

$$S_0[\phi_h] = \int d^d \mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} (\nabla \phi_h)^2 + \frac{m_0^2 \Lambda^2}{2} \phi_h^2 \right] \quad (5.1.22b)$$

$$\begin{aligned} S_1[\phi_l, \phi_h] &= \int d^d \mathbf{x} \frac{\lambda_0 \Lambda^{4-d}}{4!} (\phi_l + \phi_h)^4 \\ &= \int d^d \mathbf{x} \left[ \frac{\lambda_0 \Lambda^{4-d}}{4!} \phi_l^4 + \frac{\lambda_0 \Lambda^{4-d}}{3!} \phi_l^3 \phi_h + \frac{\lambda_0 \Lambda^{4-d}}{2!2!} \phi_l^2 \phi_h^2 + \frac{\lambda_0 \Lambda^{4-d}}{3!} \phi_l \phi_h^3 + \frac{\lambda_0 \Lambda^{4-d}}{4!} \phi_h^4 \right] \end{aligned} \quad (5.1.22c)$$

この  $S_1$  は  $\lambda_0$  に比例する事に注意しましょう。従って、キュムラント展開(5.1.17)は  $\lambda_0$  に関する冪級数展開と同じです。  $\lambda_0$  の 2 次のオーダーでは  $S'_t$  は次の様になります:

$$-S'_t[\phi_l] = \log Z_0 - S_0[\phi_l] - \langle S_1 \rangle_c + \frac{1}{2!} \langle S_1^2 \rangle_c + O(\lambda_0^3) \quad (5.1.23)$$

以下、まず 1 次のキュムラント  $\langle S_1 \rangle_c$  を計算して行きましょう。期待値  $\langle * \rangle$  は自由場の理論(5.1.22b)に関するものなので  $\phi_h$  の奇数冪の項は期待値を取ると消える事に注意すると、1 次のキュムラント  $\langle S_1 \rangle_c$  は次の様になります:

$$\begin{aligned} \langle S_1 \rangle_c &= \langle S_1 \rangle \\ &= \int d^d \mathbf{x} \left[ \frac{\lambda_0 \Lambda^{4-d}}{4!} \phi_l^4(\mathbf{x}) + \frac{\lambda_0 \Lambda^{4-d}}{2!2!} \phi_l^2(\mathbf{x}) \langle \phi_h^2(\mathbf{x}) \rangle + \frac{\lambda_0 \Lambda^{4-d}}{4!} \langle \phi_h^4(\mathbf{x}) \rangle \right] \end{aligned} \quad (5.1.24)$$

2 項目及び 3 項目の  $\langle \phi_h^2(\mathbf{x}) \rangle$  と  $\langle \phi_h^4(\mathbf{x}) \rangle$  は第 3.1.3 節でやった Wick の定理で計算出来て、次の様になります:

$$\begin{aligned} \langle \phi_h^2(\mathbf{x}) \rangle &= \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{x}) \rangle \\ &= \int_{|\mathbf{k}| \in (e^{-t}\Lambda, \Lambda)} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_0^2 \Lambda^2} \end{aligned} \quad (5.1.25a)$$

$$\begin{aligned} \langle \phi_h^4(\mathbf{x}) \rangle &= \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{x}) \rangle \\ &= \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{x}) \rangle \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{x}) \rangle + \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{x}) \rangle \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{x}) \rangle + \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{x}) \rangle \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{x}) \rangle \\ &= 3 \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{x}) \rangle \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{x}) \rangle \\ &= 3 \left[ \prod_{j=1}^2 \int_{|\mathbf{k}_j| \in (e^{-t}\Lambda, \Lambda)} \frac{d^d \mathbf{k}_j}{(2\pi)^d} \right] \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 + m_0^2 \Lambda^2} \frac{1}{\mathbf{k}_2^2 + m_0^2 \Lambda^2} \end{aligned} \quad (5.1.25b)$$

上の結果をまとめると、1 次のキュムラント(5.1.24)は運動量表示で次の様になります:

$$\begin{aligned} \langle S_1 \rangle_c &= V \frac{\lambda_0 \Lambda^{4-d}}{2^3} \left[ \prod_{j=1}^2 \int_{|\mathbf{k}_j| \in (e^{-t}\Lambda, \Lambda)} \frac{d^d \mathbf{k}_j}{(2\pi)^d} \right] \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 + m_0^2 \Lambda^2} \frac{1}{\mathbf{k}_2^2 + m_0^2 \Lambda^2} \\ &\quad + \frac{\lambda_0 \Lambda^{4-d}}{2!2!} \int_{|\mathbf{k}| \in (e^{-t}\Lambda, \Lambda)} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_0^2 \Lambda^2} \int_{|\mathbf{p}| \in (0, e^{-t}\Lambda)} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}) \tilde{\phi}_l(-\mathbf{p}) \\ &\quad + \frac{\lambda_0 \Lambda^{4-d}}{4!} \left[ \prod_{j=1}^4 \int_{|\mathbf{p}_j| \in (0, e^{-t}\Lambda)} \frac{d^d \mathbf{p}_j}{(2\pi)^d} \right] \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_1) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_2) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_3) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_4) (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) \end{aligned} \quad (5.1.26)$$

但し、 $V = \int d^d \mathbf{x}$  は系の体積です。これを式(5.1.23)に代入して整理すると、 $\lambda_0$  の 1 次のオーダーでは  $S'_t$  は次の様になります:

$$\begin{aligned} -S'_t[\phi_l] &= -V \beta f_h \\ &\quad - \frac{1}{2!} \int_{|\mathbf{p}| < e^{-t}\Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} S^{(2)}(\mathbf{p}^2) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}) \tilde{\phi}_l(-\mathbf{p}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4!} \left[ \prod_{j=1}^4 \int_{|\mathbf{p}_j| < e^{-t}\Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}_j}{(2\pi)^d} \right] S^{(4)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_1) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_2) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_3) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_4) (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) \\
& + O(\lambda_0^2)
\end{aligned} \tag{5.1.27}$$

但し,

$$-\beta f_h = \frac{1}{V} \log Z_0 + \frac{-\lambda_0 \Lambda^{4-d}}{2^3} \left[ \prod_{j=1}^2 \int_{|\mathbf{k}_j| \in (e^{-t}\Lambda, \Lambda)} \frac{d^d \mathbf{k}_j}{(2\pi)^d} \right] \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 + m_0^2 \Lambda^2} \frac{1}{\mathbf{k}_2^2 + m_0^2 \Lambda^2} \tag{5.1.28a}$$

$$-S^{(2)}(\mathbf{p}^2) = -(\mathbf{p}^2 + m_0^2 \Lambda^2) + \frac{-\lambda_0 \Lambda^{4-d}}{2} \int_{|\mathbf{k}| \in (e^{-t}\Lambda, \Lambda)} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_0^2 \Lambda^2} \tag{5.1.28b}$$

$$-S^{(4)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) = -\lambda_0 \Lambda^{4-d} \tag{5.1.28c}$$

これで  $\lambda_0$  の 1 次近似の範囲による繰り込み群変換の第 1 の操作が完了したことになります。第 4 章の脚注\*4 及び\*5 で述べた様に、繰り込み群変換をすると一般に場  $\phi_l$  に依存しない定数項が生成されて、式(5.1.28a)がこれに対応します。この定数項は単位体積当たりの自由エネルギーには効きますが、相関関数には一切影響を与えないので、通常は捨てます。このノートでも慣例に従って捨てる事にします。

### 繰り込み群変換その 2: スケール変換

高運動量モードの積分によって得られた新たな汎関数(5.1.27)は、カットオフ(運動量の上限)が  $e^{-t}\Lambda$  の場  $\phi_l$  の理論になってしまっ、理論空間  $S$  の要素とは看做せません。これを解消する為に、式(5.1.27)の積分変数  $\{\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$  を全て次の様に  $\{\mathbf{q}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4\}$  に変数変換(スケール変換)します:

$$\mathbf{p} = e^{-t}\mathbf{q} \quad \text{and} \quad \mathbf{p}_i = e^{-t}\mathbf{q}_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{5.1.29}$$

デルタ関数に対して成り立つ等式  $\delta^d(e^{-t}\mathbf{q}_1 + \dots + e^{-t}\mathbf{q}_4) = e^{dt} \delta^d(\mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{q}_4)$  に注意すると、この変数変換の下で式(5.1.27)(の定数項は捨てたもの)は次の様に書き換えられます:

$$\begin{aligned}
-S'_t[\phi_l] &= -\frac{1}{2!} \int_{|\mathbf{q}| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} e^{-dt} \left( e^{-2t}\mathbf{q}^2 + m_0^2 \Lambda^2 - \frac{-\lambda_0 \Lambda^{4-d}}{2} \int_{|\mathbf{k}| \in (e^{-t}\Lambda, \Lambda)} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_0^2 \Lambda^2} \right) \tilde{\phi}_l(e^{-t}\mathbf{q}) \tilde{\phi}_l(-e^{-t}\mathbf{q}) \\
& - \frac{\lambda_0 \Lambda^{4-d}}{4!} \left[ \prod_{j=1}^4 \int_{|\mathbf{q}_j| < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{q}_j}{(2\pi)^d} \right] e^{-3dt} \tilde{\phi}_l(e^{-t}\mathbf{q}_1) \dots \tilde{\phi}_l(e^{-t}\mathbf{q}_4) (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4) \\
& + O(\lambda_0^2)
\end{aligned} \tag{5.1.30}$$

### 繰り込み群変換その 3: 再規格化

式(5.1.29)のスケール変換を施すと、運動項の規格化が  $\frac{1}{2}\mathbf{p}^2 \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}) \tilde{\phi}_l(-\mathbf{p})$  から  $\frac{1}{2}e^{-(d+2)t} \mathbf{q}^2 \tilde{\phi}_l(e^{-t}\mathbf{q}) \tilde{\phi}_l(-e^{-t}\mathbf{q})$  にずれてしまうので、式(5.1.30)はまだ理論空間  $S$  の要素とは看做せません。これを解消する為に、新たにスカラー場  $\tilde{\phi}(\mathbf{q})$  を次の様に再定義(再規格化)します:

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}(\mathbf{q}) &:= e^{-\frac{d+2}{2}t} \tilde{\phi}_l(e^{-t}\mathbf{q}) \\
&= e^{-dt} e^{\frac{d-2}{2}t} \tilde{\phi}_l(e^{-t}\mathbf{q}) \\
&= e^{-dt} \sqrt{Z(S_t)} \tilde{\phi}_l(e^{-t}\mathbf{q})
\end{aligned} \tag{5.1.31}$$

但し、 $\sqrt{Z(S_t)} = e^{\frac{d-2}{2}t}$  で、これより  $\Delta(S_t)$  が次の様に計算されます:

$$\begin{aligned}
\Delta(S_t) &= \frac{1}{2} \frac{d \log Z(S_t)}{dt} \\
&= \frac{d \log \sqrt{Z(S_t)}}{dt} \\
&= \frac{d-2}{2}
\end{aligned} \tag{5.1.32}$$

この再規格化の下で得られる作用汎関数を改めて  $S_t[\phi] = S'_t[e^{\frac{d+2}{2}t}\phi] = S'_t[e^{dt}Z^{-1/2}(S_t)\phi]$  と書く事にします. この  $S_t$  がスカラー場の理論(5.1.20)を繰り込み群変換  $R_t: S \mapsto R_t(S) = S_t$  して得られる場の理論の作用汎関数です. 実際に  $\tilde{\phi}_l(e^{-t}\mathbf{q}) = e^{\frac{d+2}{2}t}\tilde{\phi}(\mathbf{q})$  を式(5.1.30)に代入すると  $S_t$  は次の様に得られます:

$$\begin{aligned} S_t[\phi] &= \frac{1}{2!} \int_{|\mathbf{q}| \in (0, \Lambda)} \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} (\mathbf{q}^2 + m^2(t)\Lambda^2) \tilde{\phi}(\mathbf{q}) \tilde{\phi}(-\mathbf{q}) \\ &+ \frac{\lambda(t)\Lambda^{4-d}}{4!} \left[ \prod_{j=1}^4 \int_{|\mathbf{q}_j| \in (0, \Lambda)} \frac{d^d \mathbf{q}_j}{(2\pi)^d} \right] \tilde{\phi}(\mathbf{q}_1) \tilde{\phi}(\mathbf{q}_2) \tilde{\phi}(\mathbf{q}_3) \tilde{\phi}(\mathbf{q}_4) (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4) \\ &+ O(\lambda_0^2) \end{aligned} \quad (5.1.33)$$

但し,  $m^2(t)$  と  $\lambda(t)$  は次式で与えられます:

$$m^2(t) = e^{2t} \left( m_0^2 + \frac{\lambda_0 \Lambda^{2-d}}{2} \int_{|\mathbf{k}| \in (e^{-t}\Lambda, \Lambda)} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_0^2 \Lambda^2} \right) + O(\lambda_0^2) \quad (5.1.34a)$$

$$\lambda(t) = e^{(4-d)t} \lambda_0 + O(\lambda_0^2) \quad (5.1.34b)$$

これでキュムラント展開の1次のオーダーでの繰り込み群変換が完了しました. 後で使うので(5.1.33)の座標表示も書いておきましょう.  $S_t$  の座標表示は次の様になります:

$$S_t[\phi] = \int d^d \mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{m^2(t)\Lambda^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda(t)\Lambda^{4-d}}{4!} \phi^4 \right] + O(\lambda_0^2) \quad (5.1.35)$$

#### 繰り込み群のフロー

最後にキュムラント展開の1次のオーダーでの繰り込み群のフローを調べておきましょう. この為にまず式(5.1.34a)2項目の積分を扱い易い様書き直しておきます. この積分は次の様に変形できます:

$$\begin{aligned} \int_{|\mathbf{k}| \in (e^{-t}\Lambda, \Lambda)} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_0^2 \Lambda^2} &= \frac{\Omega(d)}{(2\pi)^d} \int_{e^{-t}\Lambda}^{\Lambda} dk k^{d-1} \frac{1}{k^2 + m_0^2 \Lambda^2} \\ &= \frac{\Omega(d)}{(2\pi)^d} \Lambda^{d-2} \int_0^t dx \frac{e^{-(d-2)x}}{1 + m_0^2 e^{2x}} \end{aligned} \quad (5.1.36)$$

但し,  $\Omega(d) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$  は  $(d-1)$  次元単位球面の表面積で, 最後の等号は変数変換  $k = \Lambda e^{-x}$  から従います. これより

$$m^2(t) = e^{2t} \left( m_0^2 + \frac{\Omega(d)\lambda_0}{2(2\pi)^d} \int_0^t dx \frac{e^{-(d-2)x}}{1 + m_0^2 e^{2x}} \right) + O(\lambda_0^2) \quad (5.1.37a)$$

$$\lambda(t) = e^{(4-d)t} \lambda_0 + O(\lambda_0^2) \quad (5.1.37b)$$

を得ます. 両辺を  $t$  で微分すると次のフロー方程式を得ます:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m^2(t) &= 2e^{2t} \left( m_0^2 + \frac{\Omega(d)\lambda_0}{2(2\pi)^d} \int_0^t dx \frac{e^{-(d-2)x}}{1 + m_0^2 e^{2x}} \right) + \frac{\Omega(d)}{2(2\pi)^d} \frac{\lambda_0 e^{(4-d)t}}{1 + m_0^2 e^{2t}} + O(\lambda_0^2) \\ &= 2m^2(t) + \frac{\Omega(d)}{2(2\pi)^d} \frac{\lambda(t)}{1 + m^2(t)} + O(\lambda_0^2) \end{aligned} \quad (5.1.38a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \lambda(t) &= (4-d)e^{(4-d)t} \lambda_0 + O(\lambda_0^2) \\ &= (4-d)\lambda(t) + O(\lambda_0^2) \end{aligned} \quad (5.1.38b)$$

但し,  $\lambda_0$  の1次のオーダーでは  $\lambda_0 e^{(4-d)t} (1 + m^2(t))^{-1} = \lambda_0 e^{(4-d)t} (1 + m_0 e^{2t})^{-1} + O(\lambda_0^2)$  となることを使いました. 固定点は  $\frac{d}{dt} m^2(t) = 0$  かつ  $\frac{d}{dt} \lambda(t) = 0$  となる点で, これは明らかに  $(m^2, \lambda) = (0, 0)$  のみです.  $m^2 = \lambda = 0$  なので, この固定点での作用汎関数  $S_*$  は無質量自由場の理論です:

$$\begin{aligned} S_* &= \frac{1}{2} \int d^d \mathbf{x} (\nabla \phi)^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{|\mathbf{p}| \in (0, \Lambda)} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \mathbf{p}^2 \tilde{\phi}(\mathbf{p}) \tilde{\phi}(-\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (5.1.39)$$

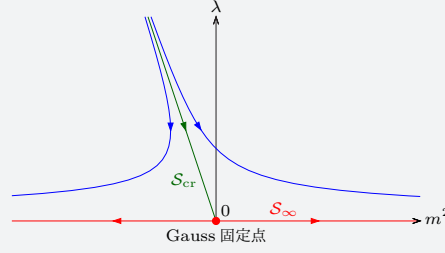


図5.1:  $d(> 4)$  次元  $\phi^4$  模型の繰り込み群のフローの概形. 赤色の1次元部分空間が renormalized trajectory  $\mathcal{S}_\infty$  で, 緑色の余次元1の部分空間が臨界面  $\mathcal{S}_{\text{cr}}$  を表します.  $\mathcal{S}_{\text{cr}}$  上の理論は全て臨界温度  $T = T_c$  直上の理論で,  $\mathcal{S}_{\text{cr}}$  近傍の理論は全て繰り込み群変換の下で  $\mathcal{S}_\infty$  に漸近します.

自由場の理論の分配関数は Gauss 型の汎関数積分なので, この固定点を **Gauss 固定点 (Gaussian fixed point)** と呼びます. この Gauss 固定点周りでフロー方程式を線型化すると次のようになります:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} m^2(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & C_d \\ 0 & 4-d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m^2(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix}, \quad C_d = \frac{\Omega(d)}{2(2\pi)^d} \quad (5.1.40)$$

右辺の正方行列の固有値  $\lambda_1, \lambda_2$  とそれらに属する固有ベクトル  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  は次のようになります:

$$\lambda_1 = 2, \quad \mathbf{v}_1 = (1, 0)^\top \quad (5.1.41a)$$

$$\lambda_2 = 4-d, \quad \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{C_d}{d-2}, 1\right)^\top \quad (5.1.41b)$$

$d > 4$  では  $\lambda_1$  だけが正の固有値で,  $\lambda_2$  は負の固有値になる事に注意しましょう. 従って,  $d > 4$  では固有ベクトル  $\mathbf{v}_1$  で張られる1次元部分空間が renormalized trajectory  $\mathcal{S}_\infty$  で, 固有ベクトル  $\mathbf{v}_2$  で張られる余次元1の部分空間が臨界面  $\mathcal{S}_{\text{cr}}$  となります. より明確に書くと, これらの部分空間は2次元  $(m^2, \lambda)$  平面の次の部分空間です:

$$\mathcal{S}_\infty = \{(m^2, \lambda) : \lambda = 0\} \quad \text{for } d > 4 \quad (5.1.42a)$$

$$\mathcal{S}_{\text{cr}} = \left\{ (m^2, \lambda) : m^2 + \frac{C_d}{d-2} \lambda = 0 \right\} \quad \text{for } d > 4 \quad (5.1.42b)$$

これらの部分空間と共に, Gauss 固定点周りで線型化された繰り込み群のフローを図5.1に示しました.

次に, 第4.2.1節で議論した固定点周りで線型化された  $S_t$  を明確に書いておきましょう. まず固有ベクトル  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  に対応する固有場  $\mathcal{O}_1(\mathbf{x}), \mathcal{O}_2(\mathbf{x})$  を次の様に導入します:<sup>\*3</sup>

$$\mathcal{O}_1(\mathbf{x}) = 1 \cdot \frac{\Lambda^2}{2} \phi^2(\mathbf{x}) + 0 \cdot \frac{\Lambda^{4-d}}{4!} \phi^4(\mathbf{x}) \quad (5.1.43a)$$

$$\mathcal{O}_2(\mathbf{x}) = -\frac{C_d}{d-2} \cdot \frac{\Lambda^2}{2} \phi^2(\mathbf{x}) + 1 \cdot \frac{\Lambda^{4-d}}{4!} \phi^4(\mathbf{x}) \quad (5.1.43b)$$

この様にして定義された場  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  を用いると, Gauss 固定点(5.1.39)近傍の理論  $S$  を繰り込み群変換したものは, 線型近似の範囲で次の様に書けます:

$$S_t[\phi] = S_* + \sum_{n=1,2} g_n(t) \int d^d \mathbf{x} \mathcal{O}_n(\mathbf{x}) \quad \text{with } g_n(t) = g_n(0) e^{\lambda_n t} \quad (5.1.44)$$

但し,  $\{g_1(0), g_2(0)\}$  は  $\{m_0^2, \lambda_0\}$  を用いて次の様に表されます:

$$g_1(0) = m_0^2 + \frac{C_d}{d-2} \lambda_0 \quad (5.1.45a)$$

$$g_2(0) = \lambda_0 \quad (5.1.45b)$$

$d > 4$  では  $g_1$  のみが relevant パラメータで, 実際,  $g_1 = 0$  の部分空間が臨界面(5.1.42b)となっています. 一方,  $g_2$  は  $d > 4$  では irrelevant パラメータで, 実際,  $g_2 = 0$  の部分空間が renormalized trajectory (5.1.42a) となっています. ここで, 式(5.1.44)がどこから出て来たのか不思議に思うかもしれないので, 簡単に導出しておきましょう. まず, 式(5.1.37a)と(5.1.37b)を  $(m_0^2, \lambda_0) = (0, 0)$  周りで線型化すると次のようになります:

$$m^2(t) = e^{2t} \left( m_0^2 + C_d \lambda_0 \int_0^t dx e^{-(d-2)x} \right)$$

<sup>\*3</sup> 第4.2.1節で固有汎関数と呼んでいたものは, ここで言う  $\int d^d \mathbf{x} \mathcal{O}_n(\mathbf{x})$  の事です.

$$\begin{aligned}
&= e^{2t} \left( m_0^2 + C_d \lambda_0 \left[ -\frac{e^{-(d-2)x}}{d-2} \right]_{x=0}^{x=t} \right) \\
&= \left( m_0^2 + \frac{C_d}{d-2} \lambda_0 \right) e^{2t} - \frac{C_d}{d-2} \lambda_0 e^{(4-d)t}
\end{aligned} \tag{5.1.46a}$$

$$\lambda(t) = \lambda_0 e^{(4-d)t} \tag{5.1.46b}$$

この Gauss 固定点周りで線型化した  $\{m^2(t), \lambda(t)\}$  を式(5.1.35)に代入して, 更に  $\frac{\Lambda^2}{2}\phi^2 = \mathcal{O}_1$ ,  $\frac{\Lambda^{4-d}}{4!}\phi^4 = \mathcal{O}_2 + \frac{C_d}{d-2}\mathcal{O}_1$  を代入すると, 繰り込み群変換した理論(5.1.35)は次の様に書けます:

$$\begin{aligned}
S_t[\phi] &= \int d^d \mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{m^2(t)\Lambda^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda(t)\Lambda^{4-d}}{4!} \phi^4 \right] \\
&= \int d^d \mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \left\{ \left( m_0^2 + \frac{C_d}{d-2} \lambda_0 \right) e^{2t} - \frac{C_d}{d-2} \lambda_0 e^{(4-d)t} \right\} \mathcal{O}_1 + \lambda_0 e^{(4-d)t} \left( \mathcal{O}_2 + \frac{C_d}{d-2} \mathcal{O}_1 \right) \right] \\
&= S_* + \left( m_0^2 + \frac{C_d}{d-2} \lambda_0 \right) e^{2t} \int d^d \mathbf{x} \mathcal{O}_1 + \lambda_0 e^{(4-d)t} \int d^d \mathbf{x} \mathcal{O}_2 \\
&= S_* + g_1(0) e^{2t} \int d^d \mathbf{x} \mathcal{O}_1 + g_2(0) e^{(4-d)t} \int d^d \mathbf{x} \mathcal{O}_2
\end{aligned} \tag{5.1.47}$$

これは式(5.1.44)に他なりません. この表式から明らかですが,  $d > 4$  では繰り込み群変換の下で  $S_t$  は  $S_\infty$  上の理論に漸近して行きます. また,  $d > 4$  では relevant パラメータ  $g_1$  が  $\tau = (T - T_c)/T_c$  と同一視されます.  $\tau \rightarrow 0$  と臨界温度にチューニングする事が,  $g_1 \rightarrow 0$  と理論を臨界面上にチューニングする事に対応している訳です.

### 臨界指数

最後に  $d > 4$  の臨界指数を繰り込み群から求めておきましょう. 第4.3節で見た様に, 臨界指数を求める為に必要なのは  $\lambda_1$  と  $\Delta(S_*)$  ですが, 式(5.1.41a)より  $\lambda_1 = 2$  で, 式(5.1.32)より  $\Delta(S_*) = \frac{d-2}{2}$  と既に求まっています. これらを表4.3にまとめた表式に代入すると, 臨界指数が次の様に求まります:

$$\alpha = 2 - \frac{d}{\lambda_1} = \frac{4-d}{2} \tag{5.1.48a}$$

$$\beta = \frac{\Delta(S_*)}{\lambda_1} = \frac{d-2}{4} \tag{5.1.48b}$$

$$\gamma = \frac{d - 2\Delta(S_*)}{\lambda_1} = 1 \tag{5.1.48c}$$

$$\delta = \frac{d}{\Delta(S_*)} - 1 = \frac{d+2}{d-2} \tag{5.1.48d}$$

$$\nu = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{2} \tag{5.1.48e}$$

$$\eta = 2\Delta(S_*) - d + 2 = 0 \tag{5.1.48f}$$

ここで,  $\{\gamma, \nu, \eta\}$  を除いて, これらは平均場近似の結果とずれていることに注意しましょう. 第3.3節で議論した様に,  $d > 4$  では平均場近似の結果が厳密な臨界指数を与える筈ですが, それとは食い違っています. これは前章脚注\*15で述べた様に,  $g_2$  が所謂 dangerous irrelevant parameter だからで, この場合, 実は第4.3.1の議論が破綻しています. 但し, この辺の議論は少し面倒なので, ここではこれ以上踏み込まない事にしましょう. 次節で扱う  $d < 4$  ではこの様な事は起きません.

以上, 主に  $d > 4$  の場合を調べてきましたが, 最後に  $d < 4$  の場合を簡単に述べてこの節を終わりにしましょう. キュムラント展開の1次の近似では,  $d < 4$  では relevant パラメータが2つで, 臨界面は  $(m^2, \lambda) = (0, 0)$  の固定点のみです. 従って, 理論を  $T = T_c$  に迫りやる為には2つの relevant パラメータをゼロにチューニングしないとイケないのですが, これは Ising 模型での経験と相容れませんが, Ising 模型では, 外部磁場がゼロの時は実質温度だけが理論のパラメータで, この温度パラメータ1つだけを  $T = T_c$  にチューニングすれば臨界温度の理論に迫りやる事が出来たからです. Ginzburg-Landau パラダイムの観点からは  $\phi^4$  模型も Ising 模型と同じ普遍類に属している筈ですが, キュムラント展開の1次近似の解析結果はこれと矛盾してしまっています. 実はこれは近似のせいで,  $\lambda_0$  の2次の寄与まで取り入れた時に  $\lambda(t)$  のフロー方程式が

$$\frac{d}{dt} \lambda(t) = (4-d)\lambda(t) - A\lambda^2(t) + O(\lambda_0^3) \tag{5.1.49}$$

となっていれば,  $\lambda = 0$  の固定点の他に  $\lambda = (4-d)/A$  の固定点があり得て, その固定点近傍での relevant パラメータは1つだけである可能性があります. 次節で  $\lambda_0$  の2次の項まで取り入れると確かにこれが起こっている事を見ます.

## 5.2 Wilson-Fisher 固定点

## この節のまとめ

- $\phi^4$  模型で高運動量モードの積分を実行すると、キュムラント展開の2次のオーダーでは  $S'_l$  は次のようになる:

$$\begin{aligned}
 -S'_l[\phi_l] &= -V\beta f_h \\
 &- \frac{1}{2!} \int_{|\mathbf{p}| < e^{-t}\Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} S^{(2)}(\mathbf{p}^2) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}) \tilde{\phi}_l(-\mathbf{p}) \\
 &- \frac{1}{4!} \left[ \prod_{j=1}^4 \int_{|\mathbf{p}_j| < e^{-t}\Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}_j}{(2\pi)^d} \right] S^{(4)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_1) \dots \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_4) (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_4) \\
 &- \frac{1}{6!} \left[ \prod_{j=1}^6 \int_{|\mathbf{p}_j| < e^{-t}\Lambda} \frac{d^d \mathbf{p}_j}{(2\pi)^d} \right] S^{(6)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_6) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_1) \dots \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_6) (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_6)
 \end{aligned}$$

ここで、 $\beta f_h$ ,  $S^{(2)}$ ,  $S^{(4)}$ ,  $S^{(6)}$  は結合定数の2次のオーダーでの連結ダイアグラム (connected diagram) の寄与から成り、Feynman 図を用いると次の様に表される:

$$\begin{aligned}
 -\beta f_h &= \frac{1}{V} \log Z_0 + \frac{1}{2^3} \text{[diagram]} + \frac{1}{2 \cdot 4!} \text{[diagram]} + \frac{1}{2^4} \text{[diagram]} \\
 -S^{(2)}(\mathbf{p}^2) &= -(\text{---})^{-1} + \frac{1}{2} \text{[diagram]} + \frac{1}{3!} \text{[diagram]} + \frac{1}{2^2} \text{[diagram]} \\
 -S^{(4)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4) &= \text{[diagram]} + \frac{1}{2} \left( \text{[diagram]} + \text{[diagram]} + \text{[diagram]} \right) \\
 -S^{(6)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_6) &= \text{[diagram]} + (\text{残り 9 項})
 \end{aligned}$$

この様に多くの項が出て来るが、繰り込み群のフローで考慮すれば良いのは1粒子既約なダイアグラム (one-particle irreducible diagram) のみ。これは今の例では下の6つだけ:



実際は2番目と3番目は2ループ図なので、1ループ近似の範囲で計算すべきは1, 4, 5, 6番目のFeynman図だけ。

- 1ループ近似での繰り込み群のフロー方程式は次の様になる:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} m^2(t) &= 2m(t) + \frac{C_d \lambda(t)}{1 + m^2(t)} \\
 \frac{d}{dt} \lambda(t) &= \epsilon \lambda(t) - \frac{3C_d \lambda^2(t)}{(1 + m^2(t))^2}
 \end{aligned}$$

但し、 $\epsilon = 4 - d$ ,  $C_d = \frac{\Omega(d)}{2(2\pi)^d} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)}$ . 左辺が共にゼロになる繰り込み群変換の固定点  $(m_*^2, \lambda_*)$  は2つあって、 $\epsilon$  の1次のオーダーで次の様に与えられる:

$$(m_*^2, \lambda_*) = \begin{cases} (0, 0) & \text{(Gauss 固定点)} \\ \left(-\frac{\epsilon}{6}, \frac{16\pi^2}{3}\epsilon\right) & \text{(Wilson-Fisher 固定点)} \end{cases}$$

- Wilson-Fisher 固定点周りで線型化したフロー方程式は、 $\epsilon$  の1次近似で次の様になる:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} m^2(t) - m_*^2 \\ \lambda(t) - \lambda_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{\epsilon}{3} & \frac{1}{16\pi^2}(1 + O(\epsilon)) \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m^2(t) - m_*^2 \\ \lambda(t) - \lambda_* \end{pmatrix}$$



右辺の正方行列の固有値は  $\lambda_1 = 2 - \frac{\epsilon}{3}$  と  $\lambda_2 = -\epsilon$  の2つで、これより臨界指数  $\nu$  が  $\epsilon$  の1次近似で次の様に求まる:

$$\nu = \frac{1}{2 - \frac{\epsilon}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} + O(\epsilon^2)$$



- 1 ループ近似では, Wilson-Fisher 固定点  $S_*$  での  $\phi$  のスケールリング次元は  $\Delta(S_*) = (d-2)/2$ . よって臨界指数  $\eta$  は平均場近似の結果と変わらず次の様になる:

$$\eta = 2\Delta(S_*) - d + 2 = 0 + O(\epsilon^2)$$

これは 1 ループ図  ではループ内に外線運動量が流れ込まない為で, 2 ループ図  まで考えると  $\eta$  は非ゼロの有限値を取る.

前節ではキュムラント展開の 1 次のオーダーで繰り込み群変換を実行し, パラメータ  $\{m^2, \lambda\}$  に対するフロー方程式を得ました. キュムラント展開は  $\lambda_0$  に関する冪級数展開と同じだったので,  $m^2$  に対するフロー方程式は  $\lambda$  の補正項が入っていましたが,  $\lambda$  に対するフロー方程式は  $\lambda$  自身が  $\lambda$  の 1 次のオーダーなので, その補正項は 1 次のキュムラント展開には含まれていません. 補正項は  $\lambda^2$  のオーダーから現れます. この節ではキュムラント展開の 2 次のオーダー\*4まで計算して,  $d(< 4)$  次元の  $\phi^4$  模型の臨界現象を調べます. 記法の簡単化の為, 以下ではカットオフ  $\Lambda$  が 1 になる単位系で議論します:

$$\Lambda = 1 \tag{5.2.1}$$

次の第5.2.1節はほぼ計算のみなので, Feynman 則を知っている人や自分で計算出来る人は読み飛ばして良いです.

### 5.2.1 2 次のキュムラント

第5.1.3節と同じ問題設定で,  $\phi^4$  模型の高運動量モードの積分を 2 次のキュムラント  $\langle S_1^2 \rangle_c = \langle S_1^2 \rangle - \langle S_1 \rangle^2$  のオーダーまで計算しましょう.  $\phi_h$  の奇数乗は期待値を取るとゼロになる事に注意すると, まず  $\langle S_1^2 \rangle$  は次の様に計算されます:

$$\begin{aligned} \langle S_1^2 \rangle &= \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \frac{\lambda_0}{4!} \frac{\lambda_0}{4!} \langle (\phi_l(\mathbf{x}) + \phi_h(\mathbf{x}))^4 (\phi_l(\mathbf{y}) + \phi_h(\mathbf{y}))^4 \rangle \\ &= \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \frac{\lambda_0^2}{4!4!} \langle \phi_h^4(\mathbf{x}) \phi_h^4(\mathbf{y}) \rangle \\ &\quad + \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \frac{\lambda_0^2}{3!3!} \langle \phi_h^3(\mathbf{x}) \phi_h^3(\mathbf{y}) \rangle \phi_l(\mathbf{x}) \phi_l(\mathbf{y}) \\ &\quad + \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \frac{2\lambda_0^2}{4!2!2!} \langle \phi_h^2(\mathbf{x}) \phi_h^4(\mathbf{y}) \rangle \phi_l^2(\mathbf{x}) \\ &\quad + \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \frac{\lambda_0^2}{2!2!2!2!} \langle \phi_h^2(\mathbf{x}) \phi_h^2(\mathbf{y}) \rangle \phi_l^2(\mathbf{x}) \phi_l^2(\mathbf{y}) \\ &\quad + \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \frac{2\lambda_0^2}{3!3!} \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h^3(\mathbf{y}) \rangle \phi_l^3(\mathbf{x}) \phi_l(\mathbf{y}) \\ &\quad + \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \frac{2\lambda_0^2}{4!4!} \langle \phi_h^4(\mathbf{x}) \rangle \phi_l^4(\mathbf{y}) \\ &\quad + \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \frac{\lambda_0^2}{3!3!} \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{y}) \rangle \phi_l^3(\mathbf{x}) \phi_l^3(\mathbf{y}) \\ &\quad + \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \frac{2\lambda_0^2}{4!2!2!} \langle \phi_h^2(\mathbf{x}) \rangle \phi_l^2(\mathbf{x}) \phi_l^4(\mathbf{y}) \\ &\quad + \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \frac{\lambda_0^2}{4!4!} \phi_l^4(\mathbf{x}) \phi_l^4(\mathbf{y}) \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

これから式(5.1.24)を使って  $\langle S_1 \rangle^2$  を差引くと 2 次のキュムラントが次の様に得られます:

$$\begin{aligned} \langle S_1^2 \rangle_c &= \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \frac{\lambda_0^2}{4!4!} (\langle \phi_h^4(\mathbf{x}) \phi_h^4(\mathbf{y}) \rangle - \langle \phi_h^4(\mathbf{x}) \rangle \langle \phi_h^4(\mathbf{y}) \rangle) \\ &\quad + \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \frac{\lambda_0^2}{3!3!} \langle \phi_h^3(\mathbf{x}) \phi_h^3(\mathbf{y}) \rangle \phi_l(\mathbf{x}) \phi_l(\mathbf{y}) \\ &\quad + \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \frac{2\lambda_0^2}{4!2!2!} (\langle \phi_h^2(\mathbf{x}) \phi_h^4(\mathbf{y}) \rangle - \langle \phi_h^2(\mathbf{x}) \rangle \langle \phi_h^4(\mathbf{y}) \rangle) \phi_l^2(\mathbf{x}) \\ &\quad + \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \frac{\lambda_0^2}{2!2!2!2!} (\langle \phi_h^2(\mathbf{x}) \phi_h^2(\mathbf{y}) \rangle - \langle \phi_h^2(\mathbf{x}) \rangle \langle \phi_h^2(\mathbf{y}) \rangle) \phi_l^2(\mathbf{x}) \phi_l^2(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

\*4 実際は 2 次のキュムラントを全て計算する必要はありませんが, 何を計算すれば良いのか判断するにはある程度経験が必要なので, 最初は愚直に全て計算した方が良いでしょう. 因みに上のまとめでは Feynman 図を用いて表しましたが, 本文では Feynman 則については一切説明しません.

$$\begin{aligned}
& + \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \frac{2\lambda_0^2}{3!3!} \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h^3(\mathbf{y}) \rangle \phi_l^3(\mathbf{x}) \phi_l(\mathbf{y}) \\
& + \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \frac{\lambda_0^2}{3!3!} \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{y}) \rangle \phi_l^3(\mathbf{x}) \phi_l^3(\mathbf{y})
\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

後は Wick の定理を使って各行に登場する相関関数を評価していけば良いだけです。これはやれば出来る問題なので詳細は書きませんが、計算すると次の様に全て 2 点相関関数の積で書けます：

$$\langle \phi_h^4(\mathbf{x}) \phi_h^4(\mathbf{y}) \rangle - \langle \phi_h^4(\mathbf{x}) \rangle \langle \phi_h^4(\mathbf{y}) \rangle = 4! \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{y}) \rangle^4 + 72 \langle \phi_h^2(\mathbf{x}) \rangle \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{y}) \rangle^2 \langle \phi_h^2(\mathbf{y}) \rangle \tag{5.2.4a}$$

$$\langle \phi_h^3(\mathbf{x}) \phi_h^3(\mathbf{y}) \rangle = 6 \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{y}) \rangle^3 + 9 \langle \phi_h^2(\mathbf{x}) \rangle \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{y}) \rangle \langle \phi_h^2(\mathbf{y}) \rangle \tag{5.2.4b}$$

$$\langle \phi_h^2(\mathbf{x}) \phi_h^4(\mathbf{y}) \rangle - \langle \phi_h^2(\mathbf{x}) \rangle \langle \phi_h^4(\mathbf{y}) \rangle = 12 \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{y}) \rangle^2 \langle \phi_h^2(\mathbf{y}) \rangle \tag{5.2.4c}$$

$$\langle \phi_h^2(\mathbf{x}) \phi_h^2(\mathbf{y}) \rangle - \langle \phi_h^2(\mathbf{x}) \rangle \langle \phi_h^2(\mathbf{y}) \rangle = 2 \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{y}) \rangle^2 \tag{5.2.4d}$$

$$\langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h^3(\mathbf{y}) \rangle = 3 \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{y}) \rangle \langle \phi_h^2(\mathbf{y}) \rangle \tag{5.2.4e}$$

これらを式(5.2.3)に代入すると次の様になります：

$$\begin{aligned}
\langle S_1^2 \rangle_c &= \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \left( \frac{\lambda_0^2}{4!} \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{y}) \rangle^4 + \frac{\lambda_0^2}{2^3} \langle \phi_h^2(\mathbf{x}) \rangle \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{y}) \rangle^2 \langle \phi_h^2(\mathbf{y}) \rangle \right) \\
& + \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \left( \frac{\lambda_0^2}{3} \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{y}) \rangle^3 + \frac{\lambda_0^2}{2^2} \langle \phi_h^2(\mathbf{x}) \rangle \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{y}) \rangle \langle \phi_h^2(\mathbf{y}) \rangle \right) \phi_l(\mathbf{x}) \phi_l(\mathbf{y}) \\
& + \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \frac{\lambda_0^2}{2^2} \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{y}) \rangle^2 \langle \phi_h^2(\mathbf{y}) \rangle \phi_l^2(\mathbf{x}) \\
& + \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \frac{\lambda_0^2}{2^3} \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{y}) \rangle^2 \phi_l^2(\mathbf{x}) \phi_l^2(\mathbf{y}) \\
& + \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \frac{\lambda_0^2}{3!} \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{y}) \rangle \langle \phi_h^2(\mathbf{y}) \rangle \phi_l^3(\mathbf{x}) \phi_l(\mathbf{y}) \\
& + \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \frac{\lambda_0^2}{3!3!} \langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{y}) \rangle \phi_l^3(\mathbf{x}) \phi_l^3(\mathbf{y})
\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

次にこれを運動量空間での表式に書き換えましょう。2 点相関関数  $\langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{y}) \rangle$  及び低運動量モード  $\phi_l(\mathbf{x})$  の積分表示

$$\langle \phi_h(\mathbf{x}) \phi_h(\mathbf{y}) \rangle = \int_{|\mathbf{k}| \in (e^{-t}, 1)} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{\mathbf{k}^2 + m_0^2} \tag{5.2.6a}$$

$$\phi_l(\mathbf{x}) = \int_{|\mathbf{p}| \in (0, e^{-t})} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \tag{5.2.6b}$$

を代入して  $\mathbf{x}$  積分と  $\mathbf{y}$  積分を実行すると、式(5.2.5)の各項は次の様に書き換えられます：<sup>\*5</sup>

$$\begin{aligned}
(1 \text{ 行目第 1 項}) &= \frac{\lambda_0^2}{4!} \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \left[ \prod_{j=1}^4 \int_{|\mathbf{k}_j| \in (e^{-t}, 1)} \frac{d^d \mathbf{k}_j}{(2\pi)^d} \right] \frac{e^{i\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{\mathbf{k}_1^2 + m_0^2} \frac{e^{i\mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{\mathbf{k}_2^2 + m_0^2} \frac{e^{i\mathbf{k}_3 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{\mathbf{k}_3^2 + m_0^2} \frac{e^{i\mathbf{k}_4 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{\mathbf{k}_4^2 + m_0^2} \\
&= V \frac{\lambda_0^2}{4!} \left[ \prod_{j=1}^4 \int_{|\mathbf{k}_j| \in (e^{-t}, 1)} \frac{d^d \mathbf{k}_j}{(2\pi)^d} \right] \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 + m_0^2} \frac{1}{\mathbf{k}_2^2 + m_0^2} \frac{1}{\mathbf{k}_3^2 + m_0^2} \frac{1}{\mathbf{k}_4^2 + m_0^2} (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \\
&= V \frac{\lambda_0^2}{4!} \left[ \prod_{j=1}^3 \int_{|\mathbf{k}_j| \in (e^{-t}, 1)} \frac{d^d \mathbf{k}_j}{(2\pi)^d} \right] \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 + m_0^2} \frac{1}{\mathbf{k}_2^2 + m_0^2} \frac{1}{\mathbf{k}_3^2 + m_0^2} \frac{1}{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)^2 + m_0^2}
\end{aligned} \tag{5.2.7a}$$

$$\begin{aligned}
(1 \text{ 行目第 2 項}) &= \frac{\lambda_0^2}{2^3} \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \left[ \prod_{j=1}^4 \int_{|\mathbf{k}_j| \in (e^{-t}, 1)} \frac{d^d \mathbf{k}_j}{(2\pi)^d} \right] \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 + m_0^2} \frac{e^{i\mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{\mathbf{k}_2^2 + m_0^2} \frac{e^{i\mathbf{k}_3 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{\mathbf{k}_3^2 + m_0^2} \frac{1}{\mathbf{k}_4^2 + m_0^2} \\
&= V \frac{\lambda_0^2}{2^3} \left[ \prod_{j=1}^4 \int_{|\mathbf{k}_j| \in (e^{-t}, 1)} \frac{d^d \mathbf{k}_j}{(2\pi)^d} \right] \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 + m_0^2} \frac{1}{\mathbf{k}_2^2 + m_0^2} \frac{1}{\mathbf{k}_3^2 + m_0^2} \frac{1}{\mathbf{k}_4^2 + m_0^2} (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)
\end{aligned}$$

<sup>\*5</sup> 以下の計算ではデルタ関数の積分を少し悪い加減にやっています。例えば式(5.2.7a)ではデルタ関数  $\delta^d(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$  を使って  $\mathbf{k}_4$  積分を実行し、 $\mathbf{k}_4$  と書いていたものを単に  $-(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)$  に置き換えています。元々  $\mathbf{k}_4$  の積分範囲は  $|\mathbf{k}_4| \in (e^{-t}, 1)$  だったので、式(5.2.7a)最後の  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$  積分の積分範囲は正確には  $|\mathbf{k}_j| \in (e^{-t}, 1)$  かつ  $|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3| \in (e^{-t}, 1)$  となります。他の積分についても同様ですが、この辺をちゃんとやっても最終的な結果は(5.2.12a)と(5.2.12b)になるので、ここでは記法の簡略化の為に悪い加減にやっています。



$$\begin{aligned}
(5 \text{ 行目}) &= \frac{\lambda_0^2}{3!} \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \left[ \prod_{j=1}^2 \int_{|\mathbf{k}_j| \in (e^{-t}, 1)} \frac{d^d \mathbf{k}_j}{(2\pi)^d} \right] \left[ \prod_{n=1}^4 \int_{|\mathbf{p}_n| \in (0, e^{-t})} \frac{d^d \mathbf{p}_n}{(2\pi)^d} \right] \frac{e^{i\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{\mathbf{k}_1^2 + m_0^2} \frac{1}{\mathbf{k}_2^2 + m_0^2} \\
&\quad \times \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_1) e^{i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}} \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_2) e^{i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}} \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_3) e^{i\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{x}} \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_4) e^{i\mathbf{p}_4 \cdot \mathbf{y}} \\
&= \frac{\lambda_0^2}{3!} \left[ \prod_{j=1}^2 \int_{|\mathbf{k}_j| \in (e^{-t}, 1)} \frac{d^d \mathbf{k}_j}{(2\pi)^d} \right] \left[ \prod_{n=1}^4 \int_{|\mathbf{p}_n| \in (0, e^{-t})} \frac{d^d \mathbf{p}_n}{(2\pi)^d} \right] \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 + m_0^2} \frac{1}{\mathbf{k}_2^2 + m_0^2} \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_1) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_2) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_3) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_4) \\
&\quad \times (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{k}_1) (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p}_4 - \mathbf{k}_1) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.2.7g}$$

$$\begin{aligned}
(6 \text{ 行目}) &= \frac{\lambda_0^2}{3!3!} \int d^d \mathbf{x} \int d^d \mathbf{y} \int_{|\mathbf{k}| \in (e^{-t}, 1)} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \left[ \prod_{n=1}^6 \int_{|\mathbf{p}_n| \in (0, e^{-t})} \frac{d^d \mathbf{p}_n}{(2\pi)^d} \right] \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{\mathbf{k}^2 + m_0^2} \\
&\quad \times \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_1) e^{i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}} \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_2) e^{i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}} \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_3) e^{i\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{x}} \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_4) e^{i\mathbf{p}_4 \cdot \mathbf{y}} \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_5) e^{i\mathbf{p}_5 \cdot \mathbf{y}} \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_6) e^{i\mathbf{p}_6 \cdot \mathbf{y}} \\
&= \frac{\lambda_0^2}{3!3!} \int_{|\mathbf{k}| \in (e^{-t}, 1)} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \left[ \prod_{n=1}^6 \int_{|\mathbf{p}_n| \in (0, e^{-t})} \frac{d^d \mathbf{p}_n}{(2\pi)^d} \right] \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_0^2} \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_1) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_2) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_3) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_4) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_5) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_6) \\
&\quad \times (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{k}) (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_5 + \mathbf{p}_6 - \mathbf{k}) \\
&= \frac{\lambda_0^2}{3!3!} \left[ \prod_{n=1}^6 \int_{|\mathbf{p}_n| \in (0, e^{-t})} \frac{d^d \mathbf{p}_n}{(2\pi)^d} \right] \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)^2 + m_0^2} \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_1) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_2) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_3) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_4) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_5) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_6) \\
&\quad \times (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_5 + \mathbf{p}_6) \\
&= \frac{\lambda_0^2}{10 \cdot 3!3!} \left[ \prod_{n=1}^6 \int_{|\mathbf{p}_n| \in (0, e^{-t})} \frac{d^d \mathbf{p}_n}{(2\pi)^d} \right] \left[ \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)^2 + m_0^2} + \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4)^2 + m_0^2} \right. \\
&\quad + \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_5)^2 + m_0^2} + \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_6)^2 + m_0^2} + \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4)^2 + m_0^2} \\
&\quad + \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_5)^2 + m_0^2} + \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_6)^2 + m_0^2} + \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_5)^2 + m_0^2} \\
&\quad \left. + \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_6)^2 + m_0^2} + \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_5 + \mathbf{p}_6)^2 + m_0^2} \right] \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_1) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_2) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_3) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_4) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_5) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_6) \\
&\quad \times (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_5 + \mathbf{p}_6)
\end{aligned} \tag{5.2.7h}$$

但し、式(5.2.7a)と(5.2.7b)の  $V = \int d^d \mathbf{x}$  は系の体積です。また、式(5.2.7d)と(5.2.7g)では、上限が  $e^{-t}$  の運動量  $\mathbf{p}$  と下限が  $e^{-t}$  の運動量  $\mathbf{k}$  が等しくなる事は無いので、 $\delta^d(\mathbf{p} - \mathbf{k}) = 0$  が成り立つ事を使いました。また、式(5.2.7f)と(5.2.7h)では、積分変数  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots\}$  について対称化を行いました<sup>\*6</sup>。以上の結果(5.2.7a)–(5.2.7h)と、前節のキュムラント展開の1次の結果(5.1.28a)–(5.1.28c)を使ってまとめると、 $\lambda_0$  の2次のオーダーでは  $S'_t$  は次の様になります：

$$\begin{aligned}
-S'_t[\phi_l] &= \log Z_0 - S_0[\phi_l] - \langle S_1 \rangle_c + \frac{1}{2!} \langle S_1^2 \rangle_c + O(\lambda_0^3) \\
&= -V\beta f_h \\
&\quad - \frac{1}{2!} \int_{|\mathbf{p}| \in (0, e^{-t})} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} S^{(2)}(\mathbf{p}^2) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}) \tilde{\phi}_l(-\mathbf{p}) \\
&\quad - \frac{1}{4!} \left[ \prod_{j=1}^4 \int_{|\mathbf{p}_j| \in (0, e^{-t})} \frac{d^d \mathbf{p}_j}{(2\pi)^d} \right] S^{(4)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_1) \dots \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_4) (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_4) \\
&\quad - \frac{1}{6!} \left[ \prod_{j=1}^6 \int_{|\mathbf{p}_j| \in (0, e^{-t})} \frac{d^d \mathbf{p}_j}{(2\pi)^d} \right] S^{(6)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_6) \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_1) \dots \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_6) (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_6) \\
&\quad + O(\lambda_0^3)
\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

<sup>\*6</sup> 任意の  $0 \leq i, j \leq n$  に対して等式  $\tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_1) \dots \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_i) \dots \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_j) \dots \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_n) = \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_1) \dots \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_j) \dots \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_i) \dots \tilde{\phi}_l(\mathbf{p}_n)$  が成り立つので、係数もこの対称性  $S^{(n)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{p}_n) = S^{(n)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_n)$  を持っていなければなりません。デルタ関数  $\delta^d(\mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_n)$  による運動量保存則も加味して、この変数の入れ替えの下での対称性が明白になる様に式(5.2.7f)では全体の積分としては同じものを3つ足して3で割り、式(5.2.7h)では全体の積分としては同じものを10個足して10で割っています。

但し、

$$\begin{aligned}
-\beta f_h &= \frac{1}{V} \log Z_0 \\
&+ \frac{-\lambda_0}{2^3} \left[ \prod_{j=1}^2 \int_{|\mathbf{k}_j| \in (e^{-t}, 1)} \frac{d^d \mathbf{k}_j}{(2\pi)^d} \right] \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 + m_0^2} \frac{1}{\mathbf{k}_2^2 + m_0^2} \\
&+ \frac{(-\lambda_0)^2}{2 \cdot 4!} \left[ \prod_{j=1}^3 \int_{|\mathbf{k}_j| \in (e^{-t}, 1)} \frac{d^d \mathbf{k}_j}{(2\pi)^d} \right] \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 + m_0^2} \frac{1}{\mathbf{k}_2^2 + m_0^2} \frac{1}{\mathbf{k}_3^2 + m_0^2} \frac{1}{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)^2 + m_0^2} \\
&+ \frac{(-\lambda_0)^2}{2^4} \left[ \prod_{j=1}^3 \int_{|\mathbf{k}_j| \in (e^{-t}, 1)} \frac{d^d \mathbf{k}_j}{(2\pi)^d} \right] \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 + m_0^2} \frac{1}{(\mathbf{k}_2^2 + m_0^2)^2} \frac{1}{\mathbf{k}_3^2 + m_0^2} + O(\lambda_0^3)
\end{aligned} \tag{5.2.9a}$$

$$\begin{aligned}
-S^{(2)}(\mathbf{p}^2) &= -(\mathbf{p}^2 + m_0^2) \\
&+ \frac{-\lambda_0}{2} \int_{|\mathbf{k}| \in (e^{-t}, 1)} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_0^2} \\
&+ \frac{(-\lambda_0)^2}{3!} \left[ \prod_{j=1}^2 \int_{|\mathbf{k}_j| \in (e^{-t}, 1)} \frac{d^d \mathbf{k}_j}{(2\pi)^d} \right] \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 + m_0^2} \frac{1}{\mathbf{k}_2^2 + m_0^2} \frac{1}{(\mathbf{p} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2 + m_0^2} \\
&+ \frac{(-\lambda_0)^2}{2^2} \left[ \prod_{j=1}^2 \int_{|\mathbf{k}_j| \in (e^{-t}, 1)} \frac{d^d \mathbf{k}_j}{(2\pi)^d} \right] \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 + m_0^2} \frac{1}{(\mathbf{k}_2^2 + m_0^2)^2} + O(\lambda_0^3)
\end{aligned} \tag{5.2.9b}$$

$$\begin{aligned}
-S^{(4)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4) &= -\lambda_0 \\
&+ \frac{(-\lambda_0)^2}{2} \int_{|\mathbf{k}| \in (e^{-t}, 1)} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_0^2} \frac{1}{(\mathbf{k} + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 + m_0^2} \\
&+ \frac{(-\lambda_0)^2}{2} \int_{|\mathbf{k}| \in (e^{-t}, 1)} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_0^2} \frac{1}{(\mathbf{k} + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3)^2 + m_0^2} \\
&+ \frac{(-\lambda_0)^2}{2} \int_{|\mathbf{k}| \in (e^{-t}, 1)} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_0^2} \frac{1}{(\mathbf{k} + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_4)^2 + m_0^2} + O(\lambda_0^3)
\end{aligned} \tag{5.2.9c}$$

$$\begin{aligned}
-S^{(6)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_6) &= (-\lambda_0)^2 \left[ \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)^2 + m_0^2} + \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4)^2 + m_0^2} + \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_5)^2 + m_0^2} \right. \\
&+ \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_6)^2 + m_0^2} + \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4)^2 + m_0^2} + \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_5)^2 + m_0^2} \\
&+ \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_6)^2 + m_0^2} + \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_5)^2 + m_0^2} + \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_6)^2 + m_0^2} \\
&\left. + \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_5 + \mathbf{p}_6)^2 + m_0^2} \right] + O(\lambda_0^3)
\end{aligned} \tag{5.2.9d}$$

以上で繰り込み群変換の第1のステップがキュムラント展開の2次のオーダーで完了しました。但し、以下ではこれらの項を全て使う訳ではありません。結果を少し吟味しましょう。

まず、式(5.2.9a)の場合  $\tilde{\phi}_l$  に依らない定数項は(単位体積当たりの自由エネルギーには効きますが)繰り込み群のフローには影響を与えないので以下では捨てます。また、式(5.2.9b)の  $S^{(2)}(x)$  を  $x = \mathbf{p}^2 = 0$  周りで Taylor 展開した表式

$$\begin{aligned}
S^{(2)}(x) &= S^{(2)}(0) + \frac{dS^{(2)}(0)}{dx} x + O(x^2) \\
&= \frac{dS^{(2)}(0)}{dx} \left( \frac{S^{(2)}(0)}{\frac{dS^{(2)}(0)}{dx}} + x + O(x^2) \right)
\end{aligned} \tag{5.2.10}$$

からも分かりますが、微係数  $\frac{dS^{(2)}(0)}{dx}$  が場の再規格化に影響を及ぼし、比  $S^{(2)}(0)/\frac{dS^{(2)}(0)}{dx}$  が  $m_0^2$  に対する補正を与えます。しかし、 $S^{(2)}(\mathbf{p}^2)$  の  $\mathbf{p}$  依存性は(5.2.9b)の1行目と3行目から来るのみで、3行目の寄与は  $O(\lambda_0^2)$  なので今考えている近似の範囲では無視して良いです。従って、場の再規格化は式(5.1.31)と全く一緒で、従って  $m^2(t)$  も前節と同じで式(5.1.37a)で与えられます。次に式(5.2.9c)ですが、これの  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_4 = \mathbf{0}$  での値が定数項  $\lambda_0$  への補正を与えます。スケール変換(5.1.29)及び場の再規格化(5.1.31)も考慮すると、 $\lambda(t)$  は次の様に与えられます:

$$\lambda(t) = e^{(4-d)t} \left( \lambda_0 - \frac{3\lambda_0^2}{2} \int_{|\mathbf{k}| \in (e^{-t}, 1)} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\mathbf{k}^2 + m_0^2)^2} \right) + O(\lambda_0^3)$$

$$\begin{aligned}
&= e^{(4-d)t} \left( \lambda_0 - \frac{3\lambda_0^2}{2} \frac{\Omega(d)}{(2\pi)^d} \int_{e^{-t}}^1 dk k^{d-1} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2} \right) + O(\lambda_0^3) \\
&= e^{(4-d)t} \left( \lambda_0 - \frac{3\Omega(d)\lambda_0^2}{2(2\pi)^d} \int_0^t dx \frac{e^{(4-d)x}}{(1 + m_0^2 e^{2x})^2} \right) + O(\lambda_0^3)
\end{aligned} \tag{5.2.11}$$

但し、3行目で変数変換  $k = e^{-x}$  を行いました。最後に(5.2.9d)ですが、これは  $\phi^6$  の項に対応します。この  $\phi^6$  の項は元々の理論には含まれていませんでしたが、繰り込み群変換をして新たに生成されました。一般に、対称性などの特別な理由がない限り、繰り込み群変換をすると元々の理論には無くても対称性で許される項は全て生成されます。例えば  $\phi^4$  模型は  $\mathbb{Z}_2$  変換  $\phi \mapsto -\phi$  の下で不変な理論で、 $\phi$  の奇数乗は  $\mathbb{Z}_2$  不変性から許されません。繰り込み群変換をすると、この  $\phi$  の奇数乗以外の項は基本的に全て現れます。しかしながら、高次乗の項に対応するパラメータは、入れたとしても Wilson-Fisher 固定点での値は  $\epsilon = d - 4$  の高次の項になるので次節で扱う  $\epsilon$  展開には効きません。従って、(5.2.9d)は考慮しなくて良いです。(詳細は章末に挙げた Kardar の教科書の第5.8節を見てください。)

まとめると、 $\{m^2(t), \lambda(t)\}$  は次のようになります:

$$m^2(t) = e^{2t} \left( m_0^2 + C_d \lambda_0 \int_0^t dx \frac{e^{(2-d)x}}{1 + m_0^2 e^{2x}} \right) + O(\lambda_0^2) \tag{5.2.12a}$$

$$\lambda(t) = e^{(4-d)t} \left( \lambda_0 - 3C_d \lambda_0^2 \int_0^t dx \frac{e^{(4-d)x}}{(1 + m_0^2 e^{2x})^2} \right) + O(\lambda_0^3) \tag{5.2.12b}$$

但し、 $C_d$  は定数で次式で与えられます:

$$C_d = \frac{\Omega(d)}{2(2\pi)^d} = \frac{1}{2(2\pi)^d} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \tag{5.2.13}$$

これらの両辺を微分することで、次の様にフロー方程式が得られます:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} m^2(t) &= 2e^{2t} \left( m_0^2 + C_d \lambda_0 \int_0^t dx \frac{e^{(2-d)x}}{1 + m_0^2 e^{2x}} \right) + \frac{C_d \lambda_0 e^{(4-d)t}}{1 + m_0^2 e^{2t}} + O(\lambda_0^2) \\
&= 2m^2(t) + \frac{C_d \lambda(t)}{1 + m^2(t)} + O(\lambda_0^2)
\end{aligned} \tag{5.2.14a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \lambda(t) &= (4-d)e^{(4-d)t} \left( \lambda_0 - 3C_d \lambda_0^2 \int_0^t dx \frac{e^{(4-d)x}}{(1 + m_0^2 e^{2x})^2} \right) - \frac{3C_d \lambda_0^2 e^{2(4-d)t}}{(1 + m_0^2 e^{2t})^2} + O(\lambda_0^3) \\
&= (4-d)\lambda(t) - \frac{3C_d \lambda^2(t)}{(1 + m^2(t))^2} + O(\lambda_0^3)
\end{aligned} \tag{5.2.14b}$$

但し、 $m^2(t) = e^{2t} m_0^2 + O(\lambda_0)$ 、 $\lambda(t) = e^{(4-d)t} \lambda_0 + O(\lambda_0^2)$  に注意して、(5.2.14a)の最後の等号では  $\lambda(t)(1 + m^2(t))^{-1} = \lambda_0 e^{(4-d)t} (1 + m_0^2 e^{2t})^{-1} + O(\lambda_0^2)$  を使い、(5.2.14b)の最後の等号では  $\lambda^2(t)(1 + m^2(t))^{-2} = \lambda_0^2 e^{2(4-d)t} (1 + m_0^2 e^{2t})^{-2} + O(\lambda_0^3)$  を使いました。

## 5.2.2 $\epsilon$ 展開

さて、いよいよ繰り込み群変換の固定点を探しましょう。以下ではまずフロー方程式(5.2.14a)と(5.2.14b)の固定点を求め、次に固定点周りでフロー方程式を線型化し、最後に線型化された繰り込み群変換の生成子  $L_*$  の固有値・固有ベクトルを計算して繰り込み群のフロー及び臨界指数を求めます。

まず第4章の脚注\*6でも述べましたが、フロー方程式の右辺に現れる関数を繰り込み群の  $\beta$  関数 (beta function) と呼びます。今の場合、 $\beta$  関数は式(5.2.14a)と(5.2.14b)から次の様に読み取れます:

$$\beta_{m^2}(m^2, \lambda) = 2m^2 + \frac{C_{4-\epsilon} \lambda}{1 + m^2} \tag{5.2.15a}$$

$$\beta_\lambda(m^2, \lambda) = \epsilon \lambda - \frac{3C_{4-\epsilon} \lambda^2}{(1 + m^2)^2} \tag{5.2.15b}$$

但し、 $\epsilon$  は上部臨界次元  $d_c = 4$  からのずれで次式で定義されます:

$$\epsilon = 4 - d \tag{5.2.16}$$

繰り込み群変換の固定点は上の  $\beta$  関数の零点です。この  $\beta$  関数の零点を求めましょう。まず、 $\beta_\lambda$  の零点は次の方程式の解として与えられます:

$$\beta_\lambda = -\frac{3C_{4-\epsilon} \lambda}{(1 + m^2)^2} \left( \lambda - \frac{(1 + m^2)^2}{3C_{4-\epsilon}} \epsilon \right) = 0 \tag{5.2.17}$$

この方程式の解は  $\lambda = 0$  と  $\lambda = \frac{(1+m^2)^2}{3C_{4-\epsilon}}\epsilon$  の 2 つです。  $\lambda = 0$  の時の  $\beta_{m^2} = 0$  の解は  $m^2 = 0$  なので、まず Gauss 固定点  $(m^2, \lambda) = (0, 0)$  がある事が分かります。興味があるのは  $\lambda = \frac{(1+m^2)^2}{3C_{4-\epsilon}}\epsilon$  の時の固定点で、これを式(5.2.15a)に代入すると次を得ます:

$$\beta_{m^2} = 2m^2 + \frac{C_{4-\epsilon}}{1+m^2} \frac{(1+m^2)^2}{3C_{4-\epsilon}}\epsilon = \left(2 + \frac{\epsilon}{3}\right)m^2 + \frac{\epsilon}{3} = 0 \quad (5.2.18)$$

$|\epsilon| \ll 1$  としてこの方程式を  $m^2$  について解くと、 $\epsilon$  の 1 次のオーダーでまず  $m^2$  の固定点での値が次の様に得られます:

$$m^2 = -\frac{\epsilon/3}{2 + \epsilon/3} = -\frac{\epsilon}{6} \frac{1}{1 + \epsilon/6} = -\frac{\epsilon}{6} (1 + O(\epsilon)) = -\frac{\epsilon}{6} + O(\epsilon^2) \quad (5.2.19)$$

次にこれを  $\lambda = \frac{(1+m^2)^2}{3C_{4-\epsilon}}\epsilon$  に代入すると固定点での  $\lambda$  の値が  $\epsilon$  の 1 次のオーダーで次の様になります:\*7

$$\lambda = \frac{(1 + O(\epsilon))^2}{3C_{4-\epsilon}}\epsilon = \frac{(1 + O(\epsilon))^2}{3 \cdot \frac{1}{(4\pi)^2} (1 + O(\epsilon))}\epsilon = \frac{16\pi^2}{3}\epsilon + O(\epsilon^2) \quad (5.2.20)$$

式(5.2.19)と(5.2.20)で与えられる繰り込み群変換の固定点を **Wilson-Fisher 固定点 (Wilson-Fisher fixed point)** と呼びます。以上の結果をまとめると、 $d = 4 - \epsilon$  次元の  $\phi^4$  模型には次の 2 つの固定点が存在する事が分かりました:

$$(m_*^2, \lambda_*) = \begin{cases} (0, 0) & \text{(Gauss 固定点)} \\ (-\frac{1}{6}\epsilon, \frac{16\pi^2}{3}\epsilon) + O(\epsilon^2) & \text{(Wilson-Fisher 固定点)} \end{cases} \quad (5.2.21)$$

次に固定点周りで線型化したフロー方程式を解析しましょう。  $\beta$  関数(5.2.15a)と(5.2.15b)を固定点周りで Taylor 展開すると、Taylor 展開の 1 次近似でフロー方程式は次の様になります:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} m^2(t) - m_*^2 \\ \lambda(t) - \lambda_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_{m^2}}{\partial m^2}(m_*^2, \lambda_*) & \frac{\partial \beta_{m^2}}{\partial \lambda}(m_*^2, \lambda_*) \\ \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial m^2}(m_*^2, \lambda_*) & \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial \lambda}(m_*^2, \lambda_*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m^2(t) - m_*^2 \\ \lambda(t) - \lambda_* \end{pmatrix} \quad (5.2.22)$$

ここで、右辺の 2 次正方行列は  $\epsilon$  の 1 次のオーダーで次の様に与えられます:\*8

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_{m^2}}{\partial m^2}(m_*^2, \lambda_*) & \frac{\partial \beta_{m^2}}{\partial \lambda}(m_*^2, \lambda_*) \\ \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial m^2}(m_*^2, \lambda_*) & \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial \lambda}(m_*^2, \lambda_*) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{16\pi^2}(1 + A\epsilon) \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} & \text{(Gauss 固定点)} \\ \begin{pmatrix} 2 - \frac{\epsilon}{3} & \frac{1}{16\pi^2}(1 + B\epsilon) \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix} + O(\epsilon^2) & \text{(Wilson-Fisher 固定点)} \end{cases} \quad (5.2.23)$$

但し、 $A = \frac{1}{2}(1 + \gamma + \log 4\pi)$ 、 $B = A + \frac{16\pi^2}{3}$  です。どちらの固定点でも ( $O(\epsilon)$  では) 左下の非対角成分がゼロなので、固有値  $\lambda_1, \lambda_2$  は単に対角成分で与えられます。対応する固有ベクトル  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  も簡単に計算できて、 $\epsilon$  の 1 次のオーダーでは次の様になります:

$$\text{Gauss 固定点: } \begin{cases} \lambda_1 = 2; & \mathbf{v}_1 = (1, 0)^\top \\ \lambda_2 = \epsilon; & \mathbf{v}_2 = (-\frac{1}{32\pi^2}(1 + (A + \frac{1}{2})\epsilon), 1)^\top \end{cases} \quad (5.2.24a)$$

$$\text{Wilson-Fisher 固定点: } \begin{cases} \lambda_1 = 2 - \frac{\epsilon}{2}; & \mathbf{v}_1 = (1, 0)^\top \\ \lambda_2 = -\epsilon; & \mathbf{v}_2 = (-\frac{1}{32\pi^2}(1 + (B - \frac{1}{3})\epsilon), 1)^\top \end{cases} \quad (5.2.24b)$$

いま  $\epsilon$  は正の微小量なので、Gauss 固定点ではどちらの固有値も正になります。従って Gauss 固定点からは湧き出す繰り込み群のフローしかありません。一方、Wilson-Fisher 固定点では  $\lambda_1$  は正ですが、 $\lambda_2$  は負になります。従って、Wilson-Fisher 固定点近傍の繰り込み群のフローは、固有ベクトル  $\mathbf{v}_1$  方向には湧き出すフローで、固有ベクトル  $\mathbf{v}_2$  方向には吸い込まれるフローになります。従って、

\*7  $|\epsilon| \ll 1$  の時、 $C_{4-\epsilon}$  は次の様に  $\epsilon$  の幂で展開されます:

$$C_{4-\epsilon} = \frac{1}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}} \Gamma(2-\frac{\epsilon}{2})} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{e^{\frac{\epsilon}{2} \log 4\pi}}{\Gamma(2-\frac{\epsilon}{2})} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1 + \frac{\epsilon}{2} \log 4\pi + O(\epsilon^2)}{1 - \frac{1+\gamma}{2}\epsilon + O(\epsilon^2)} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ 1 + \frac{1}{2}(1 + \gamma + \log 4\pi)\epsilon + O(\epsilon^2) \right]$$

但し、 $\gamma = 0.57721\dots$  は Euler の定数です。(臨界指数の  $\gamma$  ではありません。)

\*8 まず  $\beta$  関数の 1 階偏導関数は次の様になります:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_{m^2}}{\partial m^2} &= 2 - \frac{C_{4-\epsilon}\lambda}{(1+m^2)^2}, & \frac{\partial \beta_{m^2}}{\partial \lambda} &= \frac{C_{4-\epsilon}}{1+m^2} \\ \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial m^2} &= \frac{6C_{4-\epsilon}\lambda^2}{(1+m^2)^3}, & \frac{\partial \beta_\lambda}{\partial \lambda^2} &= \epsilon - \frac{6C_{4-\epsilon}\lambda}{(1+m^2)^2} \end{aligned}$$

これらに固定点の値(5.2.21)を代入して  $\epsilon$  の 1 次までで評価すると式(5.2.23)が得られます。

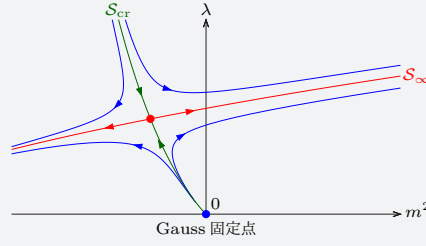


図5.2:  $d = 4 - \epsilon$  次元  $\phi^4$  模型の繰り込み群のフロー. 青色の丸が Gauss 固定点で, 赤色の丸が Wilson-Fisher 固定点です. また, 赤色の 1 次元部分空間  $S_\infty$  が Wilson-Fisher 固定点から見た時の renormalized trajectory で, 緑色の余次元 1 の部分空間  $S_{cr}$  が Wilson-Fisher 固定点から見た時の臨界面です.  $S_{cr}$  上の理論は全て臨界温度  $T = T_c$  直上の理論で, 繰り込み群変換の下で Wilson-Fisher 固定点に収束します. 一方,  $S_{cr}$  近傍の理論は全て  $T = T_c$  近傍の理論で, 繰り込み群変換の下で  $S_\infty$  に漸近します.

式(5.2.21)で与えられる Wilson-Fisher 固定点  $(m_*^2, \lambda_*)$  を原点とした時, 固有ベクトル  $\mathbf{v}_1$  で張られる 1 次元部分空間が Wilson-Fisher 固定点から見た時の renormalized trajectory  $S_\infty$  で, 固有ベクトル  $\mathbf{v}_2$  で張られる余次元 1 の部分空間が Wilson-Fisher 固定点から見た時の臨界面  $S_{cr}$  になります. より明確に書くと, これらの部分空間は次の様に与えられます:

$$S_\infty = \{(m^2, \lambda) : \lambda = \lambda_*\} \quad (5.2.25a)$$

$$S_{cr} = \left\{ (m^2, \lambda) : m^2 - m_*^2 + \frac{1 + (B - \frac{1}{3})\epsilon}{32\pi^2} (\lambda - \lambda_*) = 0 \right\} \quad (5.2.25b)$$

以上の結果は  $\beta$  関数(5.2.15a)と(5.2.15b)の固定点周りでの線型近似および  $\epsilon$  の 1 次近似に基づいた結果である, という事を強調しておきましょう. 但し, フロー方程式(5.2.14a)と(5.2.14b)自身は特に近似をしなくても計算機を使えば数値的には解く事が出来ます. 計算機を使って繰り込み群のフローをプロットしたものを図5.2に示しました. 線型近似の範囲では renormalized trajectory は  $m^2$  軸と平行ですが, 数値解では右肩上がりになっているのが見て取れます.

最後に臨界面  $S_{cr}$  近傍の理論の臨界指数を計算しましょう. これは Wilson-Fisher 固定点の情報だけで決まり, 表4.3にまとめた様に, 臨界指数は正固有値  $\lambda_1$  と固定点  $S_*$  でのスケーリング次元  $\Delta(S_*)$  だけで決まります. 今の場合, 正固有値は  $\lambda_1 = 2 - \epsilon/3$  です. 一方, スケーリング次元は式(5.1.32)と同じで次式で与えられます:

$$\Delta(S_*) = \frac{d-2}{2} = \frac{4-\epsilon-2}{2} = 1 - \frac{\epsilon}{2} \quad (5.2.26)$$

これらを用いると, 臨界指数は  $\epsilon$  の 1 次のオーダーで次の様に求まります:

$$\alpha = 2 - \frac{d}{\lambda_1} = 2 - \frac{4-\epsilon}{2-\frac{\epsilon}{3}} = \frac{\epsilon}{6} + O(\epsilon^2) \quad (5.2.27a)$$

$$\beta = \frac{\Delta(S_*)}{\lambda_1} = \frac{1-\frac{\epsilon}{2}}{2-\frac{\epsilon}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{6} + O(\epsilon^2) \quad (5.2.27b)$$

$$\gamma = \frac{d-2\Delta(S_*)}{\lambda_1} = \frac{4-\epsilon-2(1-\frac{\epsilon}{2})}{2-\frac{\epsilon}{3}} = 1 + \frac{\epsilon}{6} + O(\epsilon^2) \quad (5.2.27c)$$

$$\delta = \frac{d}{\Delta(S_*)} - 1 = \frac{4-\epsilon}{1-\frac{\epsilon}{2}} - 1 = 3 + \epsilon + O(\epsilon^2) \quad (5.2.27d)$$

$$\nu = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{2-\frac{\epsilon}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} + O(\epsilon^2) \quad (5.2.27e)$$

$$\eta = 2\Delta(S_*) - d + 2 = 2\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) - (4-\epsilon) + 2 = 0 + O(\epsilon^2) \quad (5.2.27f)$$

この様に上部臨界次元  $d_c = 4$  からのずれ  $\epsilon = 4 - d$  を微小量として扱い,  $\epsilon$  の冪の次数で種々の量を展開していく事を  $\epsilon$  展開 (epsilon expansion) と呼びます.  $\epsilon$  展開は系統的に出来て良いのですが, 物理的に最も興味がある  $\epsilon = 1$  の場合がどうなのかが少し謎です. 最後にこれについて簡単に述べてこの節を終わりにしましょう. 素朴には  $\epsilon$  の冪の次数をどんどん上げていけば精度が向上するので適当な所で  $\epsilon = 1$  と置けるだろうと思いたくなります. しかし実際は  $\epsilon$  展開は収束半径ゼロの漸近級数である事が知られていて, 或る冪の次数を超えると収束せずに振動し始めて逆に精度が悪くなります.  $\epsilon$  展開から信頼できる 3 次元の結果を得るには Borel 総和法を使うのですが, 詳細については章末の文献を見てください.



## 参考文献

まず原論文を挙げておきましょう。 $\epsilon$  展開による臨界現象の研究は、1972 年の Wilson と Fisher の共著論文及びそのすぐ後の Wilson の論文から始まりました:

- [1] K. G. Wilson and M. E. Fisher, “Critical Exponents in 3.99 Dimensions,” *Phys. Rev. Lett.* **28** (1972) 240–243
- [2] K. G. Wilson, “Feynman-Graph Expansion for Critical Exponents,” *Phys. Rev. Lett.* **28** (1972) 548–551

Wilson が彼の繰り込み群を導入したのは 1971 年ですが、その時は最終的に計算機を用いて臨界指数を求めていました。(Wilson は計算機の扱いに長けていたそうです。)しかし上の論文で誰もが頑張れば解析的に計算出来る手法が開発されて、その後の爆発的な発展へと繋がって行きました。Wilson と Fisher が  $\epsilon$  展開を思い付くに至った経緯を知りたい人は、Wilson の Nobel 賞受賞講演録の第 3 節および Fisher の講義録の第 11 節に当時の回想が載っているので読んでみると良いでしょう:

- [3] K. G. Wilson, “The renormalization group and critical phenomena,” *Rev. Mod. Phys.* **55** (1983) 583–600
- [4] M. E. Fisher, “Renormalization group theory: Its basis and formulation in statistical physics,” *Rev. Mod. Phys.* **70** (1998) 653–681

この 2 つは単なる回顧録では無く、当時の状況と共に繰り込み群のアイデアも上手にまとめられているので初学者にもお勧めです。さて、 $\epsilon$  展開について解説した教科書は沢山ありますが、初学者には次の 3 つが良いと思います:

- [5] J. J. Binney, N. J. Dowrick, A. J. Fisher, and M. E. J. Newman, *The Theory of Critical Phenomena* (Oxford University Press, 1992)
- [6] M. Kardar, *Statistical Physics of Fields* (Cambridge University Press, 2007)
- [7] R. Shankar, *Quantum Field Theory and Condensed Matter* (Cambridge University Press, 2017)

特に [6] と [7] が良いと思います。[6] の第 5 章の章末には  $\epsilon$  展開の Borel 総和法についても簡単な説明が載っています。また、この講義ではキュムラント展開を使って繰り込み群変換をゴリゴリ計算しましたが、通常の場合の理論の摂動計算でも臨界指数を求めることは出来ます。これについて学びたい人は [5] で勉強すると良いでしょう。相対論的場の量子論を勉強したことがある人は、Peskin-Schroeder の教科書

- [8] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Westview Press, 1995)

の第 13 章にも臨界指数の計算法が載っているので、それで勉強しても良いと思います。