2019年度 日本大学大学院理工学研究科 量子理工学専攻 統計力学I レポート4

提出締め切り: 2019年8月1日(木) 23:59:59 JST
提出先: `ohya@phys.cst.nihon-u.ac.jp`
または駿河台校舎8号館2階823D室

問題. $d(>4)$ 次元 ϕ^4 模型の繰り込み群のフロー

次の作用汎関数で記述される d 次元 ϕ^4 模型を考える:

$$S[\phi] = \int d^d\boldsymbol{x}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 + \frac{m_0^2\Lambda^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda_0\Lambda^{4-d}}{4!}\phi^4\right], \quad \phi(\boldsymbol{x}) = \int_{|\boldsymbol{p}|\in(0,\Lambda)}\frac{d^d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^d}\,\tilde{\phi}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{1}$$

但し，$\Lambda(>0)$ はカットオフで，m_0^2 と $\lambda_0(>0)$ は無次元の実数パラメータである．この理論を繰り込み群変換すると，λ_0 の1次のオーダーで次の作用汎関数が得られる:

$$S_t[\phi] = \int d^d\boldsymbol{x}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 + \frac{m^2(t)\Lambda^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda(t)\Lambda^{4-d}}{4!}\phi^4\right] + O(\lambda_0^2) \tag{2}$$

但し，$m^2(t)$ と $\lambda(t)$ は次式で与えられる:

$$m^2(t) = \mathrm{e}^{2t}\left(m_0^2 + C\lambda_0\int_0^t d\tau\,\frac{\mathrm{e}^{-(d-2)\tau}}{1+m_0^2\mathrm{e}^{2\tau}}\right) + O(\lambda_0^2), \quad C = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}\Gamma(\frac{d}{2})} \tag{3a}$$

$$\lambda(t) = \mathrm{e}^{(4-d)t}\lambda_0 + O(\lambda_0^2) \tag{3b}$$

以下，上の結果を認めて，$d>4$ の時の ϕ^4 模型の繰り込み群のフローを求めてみよう．以下の問いに答えよ．

(i) 式(2)(3a)(3b)で定まる繰り込み群変換 $R_t : S \mapsto S_t$ の固定点は，$(m^2,\lambda)=(0,0)$ の Gauss 固定点(無質量自由場の理論)のみである．この固定点周りで繰り込み群のフロー方程式を線型化すると，次の連立微分方程式になる:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} m^2(t) \\ \lambda(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & C \\ 0 & 4-d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m^2(t) \\ \lambda(t)\end{pmatrix} \tag{4}$$

右辺の2次正方行列の固有値 λ_1,λ_2 と対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ を求めよ．答えは次の様になる:

$$\lambda_1 = 2, \qquad \boldsymbol{v}_1 = (1,0)^\intercal \tag{5a}$$

$$\lambda_2 = 4-d, \quad \boldsymbol{v}_2 = (-\tfrac{C}{d-2},1)^\intercal \tag{5b}$$

但し，$^\intercal$ は転置を表す．$d>4$ では λ_1 が正で，λ_2 が負になる事に注意.

(ii) 線型近似(4)の範囲で Gauss 固定点近傍の繰り込み群のフローの概形を図示せよ．また，臨界面 $\mathcal{S}_{\mathrm{cr}}$ と renormalized trajectory $\mathcal{S}_\infty$ は2次元 (m^2,λ) 平面の次の部分空間で与えられることを示せ:[*1]

$$\mathcal{S}_{\mathrm{cr}} = \left\{(m^2,\lambda) : m^2 + \frac{C}{d-2}\lambda = 0\right\} \tag{6a}$$

$$\mathcal{S}_\infty = \left\{(m^2,\lambda) : \lambda = 0\right\} \tag{6b}$$

(iii) 固有ベクトル(5a)(5b)に対応する固有汎関数 $\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2$ を次の様に定める:

$$\mathcal{O}_1 = \int d^d\boldsymbol{x}\left[1\cdot\frac{\Lambda^2\phi^2(\boldsymbol{x})}{2} + 0\cdot\frac{\Lambda^{4-d}\phi^4(\boldsymbol{x})}{4!}\right] \tag{7a}$$

$$\mathcal{O}_2 = \int d^d\boldsymbol{x}\left[-\frac{C}{d-2}\cdot\frac{\Lambda^2\phi^2(\boldsymbol{x})}{2} + 1\cdot\frac{\Lambda^{4-d}\phi^4(\boldsymbol{x})}{4!}\right] \tag{7b}$$

[*1] ヒント: 今の場合，臨界面は $\boldsymbol{v}_2$ で張られる1次元空間，renormalized trajectory は $\boldsymbol{v}_1$ で張られる1次元空間である．

このようにして定義された $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ を用いると，繰り込み群変換した理論(2)は Gauss 固定点近傍では次の様に書ける事を示せ:[*2]

$$S_t[\phi] = S_*[\phi] + \sum_{n=1}^{2} g_n(t)\mathcal{O}_n \quad \text{with} \quad g_n(t) = g_n(0)\mathrm{e}^{\lambda_n t} \tag{8}$$

但し， $S_*[\phi] = \frac{1}{2}\int d^d\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2$ は Gauss 固定点での作用で，$g_n(0)$ は次式で与えられる:[*3]

$$g_1(0) = m_0^2 + \frac{C}{d-2}\lambda_0 \tag{9a}$$

$$g_2(0) = \lambda_0 \tag{9b}$$

[*2] ヒント: 式(2)を $(m_0^2, \lambda_0) = (0,0)$ 周りで線型近似した表式と式(8)が一致することを示せば良い．式(3a)を $(m_0^2, \lambda_0) = (0,0)$ 周りで線形化すると次の様になることを使う:

$$m^2(t) = \mathrm{e}^{2t}\left(m_0^2 + C\lambda_0\int_0^t d\tau\ \mathrm{e}^{-(d-2)\tau}\right) = \left(m_0^2 + \frac{C}{d-2}\lambda_0\right)\mathrm{e}^{2t} - \frac{C}{d-2}\lambda_0\,\mathrm{e}^{(4-d)t}$$

[*3] $d > 4$ では g_1 が relevant パラメータで，g_2 が irrelevant パラメータである．従って，この g_1 が臨界温度 T_c を基準にして測った無次元化した温度 $\tau = (T - T_c)/T_c$ と同一視される．(Ginzburg-Landau 理論での温度の導入の仕方とは異なることに注意．) 実際，条件 $g_1 = 0$ は臨界面の条件(6a)に他ならないことに注意しよう．臨界面上の理論は全て臨界温度 $T = T_c$ 直上の理論である．