

2019年度 日本大学大学院理工学研究科 量子理工学専攻 統計力学I レポート3

提出締め切り: 2019年7月11日(木) 23:59:59 JST

提出先: ohya@phys.cst.nihon-u.ac.jp

または駿河台校舎8号館2階823D室

問題1. 鞍点近似

区間 (a, b) で最小値を持つ適当な関数 $g(x)$ に対して次の積分を考える:

$$Z(\alpha) = \int_a^b dx f(x) e^{-\alpha g(x)}, \quad \alpha > 0 \quad (1)$$

ここで $f(x)$ は適当な関数である. この積分の $\alpha \gg 1$ での振る舞いが知りたい. 以下の問いに答えよ.

- (i) 関数 $g(x)$ は $x = x_0 \in (a, b)$ で最小値を取るとする. $\alpha \gg 1$ では, この $x = x_0$ 近傍が積分(1)に最も寄与する. この寄与を評価しよう. まず, 関数 $f(x)$ と $g(x)$ は $x = x_0$ 周りで次の様にTaylor展開可能だとする:

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots \quad (2a)$$

$$g(x) = g(x_0) + \frac{1}{2!}g^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}g^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots \quad (2b)$$

但し, $g^{(1)}(x_0) = 0$ を使った. また, $g^{(2)}(x_0) > 0$ である. $f(x_0) \neq 0$ の時, 上のTaylor展開を代入し, $y = \sqrt{\alpha}(x - x_0)$ と変数変換すると, 積分(1)は次の様に表せることを示せ:

$$Z(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} f(x_0) e^{-\alpha g(x_0)} \int_{-\sqrt{\alpha}(x_0-a)}^{\sqrt{\alpha}(b-x_0)} dy e^{-\frac{1}{2}g^{(2)}(x_0)y^2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}P_1(y) + \frac{1}{\alpha}P_2(y) + O(\alpha^{-3/2}) \right) \quad (3)$$

但し, $P_1(y)$ と $P_2(y)$ は y の多項式で次式で与えられる:

$$P_1(y) = \frac{f^{(1)}(x_0)}{f(x_0)}y - \frac{1}{3!}g^{(3)}(x_0)y^3 \quad (4a)$$

$$P_2(y) = \frac{1}{2!} \frac{f^{(2)}(x_0)}{f(x_0)}y^2 - \left(\frac{1}{3!} \frac{f^{(1)}(x_0)}{f(x_0)}g^{(3)}(x_0) + \frac{1}{4!}g^{(4)}(x_0) \right)y^4 + \frac{1}{2!(3!)^2}(g^{(3)}(x_0))^2y^6 \quad (4b)$$

- (ii) $\alpha \gg 1$ の時, 式(3)の積分範囲は $(-\infty, \infty)$ とみなせる. この時, 式(3)は次の様に近似できる:

$$Z(\alpha) \approx \frac{1}{\sqrt{\alpha}} f(x_0) e^{-\alpha g(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{1}{2}g^{(2)}(x_0)y^2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}P_1(y) + \frac{1}{\alpha}P_2(y) + O(\alpha^{-3/2}) \right) \quad (5)$$

この積分を計算すると次の様になることを示せ:

$$Z(\alpha) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha g^{(2)}(x_0)}} f(x_0) e^{-\alpha g(x_0)} (1 + O(\alpha^{-1})) \quad (6)$$

これが鞍点近似である.

問題2. d 次元Green関数

$d \geq 1$ 次元Green関数は次の微分方程式の解として与えられる:

$$(-\nabla_x^2 + m^2) G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7)$$

ここで ∇_x^2 は変数 $\mathbf{x}$ に作用する d 次元Laplacianである. この微分方程式を解こう. 以下の問いに答えよ.

- (i) 微分方程式(7)の解は次のFourier積分で与えられることを示せ:

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (8)$$

(ii) 次の等式が成り立つ事を示せ:^{*1}

$$\frac{1}{\mathbf{p}^2 + m^2} = \int_0^\infty d\tau e^{-\tau(\mathbf{p}^2 + m^2)} \quad (9)$$

(iii) 式(9)を式(8)に代入すると次の様になる:

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int_0^\infty d\tau \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} e^{-\tau(\mathbf{p}^2 + m^2) + i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \quad (10)$$

被積分関数の指数部分を $\mathbf{p}$ について平方完成して $\mathbf{p}$ 積分を先に実行すると, 式(10)は次の様になることを示せ:

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int_0^\infty d\tau \frac{e^{-m^2 \tau - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{4\tau}}}{(4\pi\tau)^{\frac{d}{2}}} \quad (11)$$

(iv) 積分変数を $\tau = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{2m} s$ ($0 < s < \infty$) と変数変換すると, 式(11)は次の様になる:^{*2}

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{m}{2\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{\frac{d-2}{2}} \int_0^\infty ds s^{-\frac{d}{2}} \exp \left[-\frac{m|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right) \right] \quad (12)$$

この表式を用いて, $m|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \gg 1$ ではGreen関数は次の様に振る舞う事を示せ:^{*3}

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \approx \frac{1}{2m} \left(\frac{m}{2\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{\frac{d-1}{2}} e^{-m|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad \text{for } m|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \gg 1 \quad (13)$$

この漸近形より相関長は $\xi = 1/m$ と読み取れる.

(v) 積分変数を $\tau = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{4s}$ ($0 < s < \infty$) と変数変換すると, 式(11)は次の様になる:

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d-2}} \int_0^\infty ds s^{\frac{d}{2}-2} \exp \left(-s - \frac{m^2|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{4s} \right) \quad (14)$$

この表式を用いて, $m|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \ll 1$ ではGreen関数は次の様に振る舞う事を示せ:^{*4}

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \approx \frac{\Gamma(\frac{d-2}{2})}{4\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d-2}} \quad \text{for } m|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \ll 1 \quad (15)$$

^{*1} ヒント: 右辺の積分を計算して左辺に一致することを示せば良い.

^{*2} 式(12)の積分は第2種変形Bessel関数 $K_{\frac{d-2}{2}}(m|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ の積分表示(の2倍)に他ならない. 従って d 次元Green関数は次の様に書ける:

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m}{2\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{\frac{d-2}{2}} K_{\frac{d-2}{2}}(m|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$$

^{*3} ヒント: 鞍点近似を用いる. $\alpha = m|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, $g(s) = \frac{1}{2}(s + \frac{1}{s})$, $f(s) = s^{-\frac{d}{2}}$ として問題1の結果(6)を積分(12)に適用すれば良い.

^{*4} ヒント: 被積分関数を $m|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ の関数だと思って, $m|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 0$ まわりでTaylor展開したときの最初の項だけを使えば良い. ガンマ関数の次の積分表示を用いる:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty ds s^{z-1} e^{-s}$$