**2019年度 日本大学大学院理工学研究科 量子理工学専攻 統計力学I レポート2**

提出締め切り: 2019年6月6日(木) 23:59:59 JST
提出先: ohya@phys.cst.nihon-u.ac.jp
または駿河台校舎8号館2階823D室

## 問題. 1次元Ising模型の厳密解

格子間隔$a$，格子点$N+1$個の線分上のIsing模型を考えよう．外部磁場が無い場合，Hamiltonianは次式で与えられる:

$$H = -J\sum_{i=0}^{N-1} S_i S_{i+1} = -J\left(S_0S_1 + S_1S_2 + \cdots + S_{N-1}S_N\right), \quad J>0 \tag{1}$$

但し，$S_i$ $(i=0,1,\cdots,N)$ は±1の値を取る古典的な(可換な)スピン変数である．この1次元Ising模型は厳密に解ける[*1]．特に分配関数と相関関数が有限の$N$で厳密に求まる．以下，これらを求めてみよう．以下の問いに答えよ．

(i) 1次元Ising模型(1)の分配関数は次式で定義される:

$$Z(T) = \sum_{S_0=\pm1}\cdots\sum_{S_N=\pm1} \mathrm{e}^{-\beta H} = \sum_{S_0=\pm1}\cdots\sum_{S_N=\pm1} \mathrm{e}^{\beta J S_0S_1}\mathrm{e}^{\beta J S_1S_2}\cdots\mathrm{e}^{\beta J S_{N-1}S_N} \tag{2}$$

但し，$\beta = 1/T$である．この和を計算し，分配関数(2)が次式で与えられる事を示せ:[*2]

$$Z(T) = 2\left(2\cosh(\beta J)\right)^N \tag{3}$$

(ii) 単位格子当たりの自由エネルギー$f(T)$を，熱力学極限$N\to\infty$の下で次の様に定義する:

$$f(T) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}F(T) \tag{4}$$

但し，$F(T) = -\frac{1}{\beta}\log Z(T)$である．この$f(T)$を求めよ．

(iii) 単位格子当たりの自由エネルギー$f(T)$を用いると，比熱$c$は

$$c = -T\frac{\partial^2 f(T)}{\partial T^2} \tag{5}$$

で与えられる．前問(ii)の結果を用いて比熱$c$を求めよ．

(iv) 2点相関関数$\langle S_iS_j\rangle$は次式で定義される:

$$\langle S_iS_j\rangle = \frac{1}{Z(T)}\sum_{S_0\pm1}\cdots\sum_{S_N=\pm1} S_iS_j\mathrm{e}^{-\beta H} \tag{6}$$

---

[*1] 但し，残念ながら1次元Ising模型は有限温度では相転移が起きない．

[*2] ヒント: 初めに$S_N$について和を取ると，分配関数(2)は次の様になる:

$$\begin{aligned} Z(T) &= \sum_{S_0=\pm1}\cdots\sum_{S_{N-1}=\pm1} \mathrm{e}^{\beta J S_0S_1}\cdots\mathrm{e}^{\beta J S_{N-2}S_{N-1}}\left(\mathrm{e}^{\beta J S_{N-1}} + \mathrm{e}^{-\beta J S_{N-1}}\right) \\ &= \sum_{S_0=\pm1}\cdots\sum_{S_{N-1}=\pm1} \mathrm{e}^{\beta J S_0S_1}\cdots\mathrm{e}^{\beta J S_{N-2}S_{N-1}}\left(2\cosh(\beta J)\right) \end{aligned}$$

但し，2行目で$S_{N-1}$が+1であろうが−1であろうが$\mathrm{e}^{\beta J S_{N-1}} + \mathrm{e}^{-\beta J S_{N-1}} = 2\cosh(\beta J)$となる事を使った．次に$S_{N-1}$について和を取ると次の様になる:

$$\begin{aligned} Z(T) &= \sum_{S_0=\pm1}\cdots\sum_{S_{N-2}=\pm1} \mathrm{e}^{\beta J S_0S_1}\cdots\mathrm{e}^{\beta J S_{N-3}S_{N-2}}\left(\mathrm{e}^{\beta J S_{N-2}} + \mathrm{e}^{-\beta J S_{N-2}}\right)\left(2\cosh(\beta J)\right) \\ &= \sum_{S_0=\pm1}\cdots\sum_{S_{N-2}=\pm1} \mathrm{e}^{\beta J S_0S_1}\cdots\mathrm{e}^{\beta J S_{N-3}S_{N-2}}\left(2\cosh(\beta J)\right)^2 \end{aligned}$$

この操作を繰り返して全ての$S_i$について和を取ると，分配関数は式(3)の様になる．

この和を計算し，2点相関関数(6)が次式で与えられる事を示せ:[*3]

$$\langle S_i S_j \rangle = (\tanh(\beta J))^{|i-j|} = \exp\left(-\frac{|i-j|}{\xi(T)}\right) \quad \text{但し} \quad \xi(T) = -\frac{1}{\log\tanh(\beta J)} \tag{7}$$

$\xi(T)$は2点相関関数の典型的な広がりを表す量で，**相関長(correlation length)**と呼ばれる．

(v) $n$点相関関数$\langle S_{i_1}\cdots S_{i_n}\rangle$は次式で定義される:

$$\langle S_{i_1}\cdots S_{i_n}\rangle = \frac{1}{Z(T)}\sum_{S_1=\pm1}\cdots\sum_{S_N=\pm1} S_{i_1}\cdots S_{i_n}\mathrm{e}^{-\beta H} \tag{8}$$

$n$が奇数の時は式(8)はゼロである事を示せ[*4]．

(vi) 等温帯磁率$\chi_T$は磁化の揺らぎの2乗平均で与えられる:

$$\chi_T = \beta\frac{\langle (M-\langle M\rangle)^2\rangle}{N} \tag{9}$$

ここで，$M=\sum_{i=0}^{N-1} S_i$を用いると，等温帯磁率$\chi_T$は次の様に2点相関関数で書き表される:

$$\chi_T = \frac{\beta}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\langle (S_i-\langle S_i\rangle)(S_j-\langle S_j\rangle)\rangle = \frac{\beta}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}(\langle S_iS_j\rangle - \langle S_i\rangle\langle S_j\rangle) = \frac{\beta}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\langle S_iS_j\rangle \tag{10}$$

但し，1点相関関数はゼロである事($\langle S_i\rangle = 0 = \langle S_j\rangle$)を用いた．式(7)を用いて式(10)最右辺の2重和を計算せよ[*5]．
また，熱力学極限$N\to\infty$を取ると$\chi_T$は次の様になる事を示せ:

$$\chi_T = \beta\mathrm{e}^{2\beta J} \tag{11}$$

---

[*3] ヒント: まず任意の$S_i$に対して$S_i^2=1$なので，$S_iS_j = S_jS_i$は次の様に書ける事に注意する:

$$S_iS_j = S_jS_i = \begin{cases}(S_iS_{i+1})(S_{i+1}S_{i+2})\cdots(S_{j-1}S_j) & \text{for} \quad i<j\\ (S_jS_{j+1})(S_{j+1}S_{j+2})\cdots(S_{i-1}S_i) & \text{for} \quad i>j\end{cases}$$

これより，2点相関関数(6)は次の様に書き換えられる:

$$\langle S_iS_j\rangle = \begin{cases}\frac{1}{Z(T)}\sum_{S_0\pm1}\cdots\sum_{S_N=\pm1}\mathrm{e}^{\beta JS_0S_1}\cdots\mathrm{e}^{\beta JS_{i-1}S_i}\left(S_iS_{i+1}\mathrm{e}^{\beta JS_iS_{i+1}}\right)\cdots\left(S_{j-1}S_j\mathrm{e}^{\beta JS_{j-1}S_j}\right)\mathrm{e}^{\beta JS_jS_{j+1}}\cdots\mathrm{e}^{\beta JS_{N-1}S_N} & \text{for} \quad i<j\\ \frac{1}{Z(T)}\sum_{S_0\pm1}\cdots\sum_{S_N=\pm1}\mathrm{e}^{\beta JS_0S_1}\cdots\mathrm{e}^{\beta JS_{j-1}S_j}\left(S_jS_{j+1}\mathrm{e}^{\beta JS_jS_{j+1}}\right)\cdots\left(S_{i-1}S_i\mathrm{e}^{\beta JS_{i-1}S_i}\right)\mathrm{e}^{\beta JS_iS_{i+1}}\cdots\mathrm{e}^{\beta JS_{N-1}S_N} & \text{for} \quad i>j\end{cases}$$

この表式を用いて，問(i)の時と同様に$S_N$から$S_0$まで順次和を取ると式(7)が得られる．任意の$S_{k-1}$に対して次式が成り立つ事を用いると良い:

$$\sum_{S_k=\pm1} S_{k-1}S_k\mathrm{e}^{\beta JS_{k-1}S_k} = S_{k-1}\mathrm{e}^{\beta JS_{k-1}} - S_{k-1}\mathrm{e}^{-\beta JS_{k-1}} = 2\sinh(\beta J)$$

[*4] ヒント: Hamiltonian (1)と和 $\sum_{S_1=\pm1}\cdots\sum_{S_N=\pm1}$が符号反転$S_i\to -S_i$の下で不変である事(これを$\mathbb{Z}_2$**不変性**と呼ぶ)を用いて，一般に$\langle S_{i_1}\cdots S_{i_n}\rangle = (-1)^n\langle S_{i_1}\cdots S_{i_n}\rangle$が成り立つ事をまず示すと良い．特に$n$が奇数の時は$\langle S_{i_1}\cdots S_{i_n}\rangle = -\langle S_{i_1}\cdots S_{i_n}\rangle$となり，これは$\langle S_{i_1}\cdots S_{i_n}\rangle = 0$を意味する．

[*5] ヒント: 一般に和$\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}x^{|i-j|}$を計算すると次の様になる:

$$\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}x^{|i-j|} = N\frac{1+x}{1-x} - \frac{2x(1-x^N)}{(1-x)^2}$$