2019年度 日本大学大学院理工学研究科 量子理工学専攻 量子力学II レポート4

提出締め切り: 2020年1月24日(金) 23:59:59 JST
提出先: `ohya@phys.cst.nihon-u.ac.jp`
または駿河台校舎8号館2階823D室

問題. Lippmann-Schwinger 方程式と1次元デルタ関数ポテンシャル

1次元の Lippmann-Schwinger 方程式は次で与えられる:

$$\Psi_p^{\mathrm{as}}(x) = \psi_p(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dy\, G^{\pm}(x,y;p)V(y)\Psi_p^{\mathrm{as}}(y), \quad \mathrm{as} = \mathrm{in}, \mathrm{out} \tag{1}$$

但し，$\psi_p(x) = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}px}$ および $-\infty < p < \infty$ である．また，$G^{\pm}$ は1次元 Green 関数で次で与えられる:

$$G^{\pm}(x,y;p) = \lim_{\epsilon\to 0_+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi\hbar} \frac{\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}q(x-y)}}{\frac{p^2}{2m} - \frac{q^2}{2m} \pm i\epsilon} \tag{2}$$

以下，V として次のデルタ関数ポテンシャルを考える:

$$V(y) = g\delta(y) \tag{3}$$

以下の問いに答えよ．

(i) デルタ関数ポテンシャル(3)の場合，式(1)は次の様に表せる事を示せ:[*1]

$$\Psi_p^{\mathrm{as}}(x) = \psi_p(x) + \frac{gG^{\pm}(x,0;p)}{1 - gG^{\pm}(0,0;p)} \tag{4}$$

(ii) 式(2)右辺の積分を計算して1次元 Green 関数を求めよ．答えは次の様になる:

$$G^{\pm}(x,y;p) = \mp\frac{im}{\hbar|p|}\,\mathrm{e}^{\pm\frac{i}{\hbar}|p||x-y|} \tag{5}$$

(iii) $p > 0$ とする．この時，式(4)と式(5)を用いて $\Psi_{\pm p}^{\mathrm{in}}$ と $\Psi_{\pm p}^{\mathrm{out}}$ が次で与えられる事を示せ:

$$\Psi_{+p}^{\mathrm{in}}(x) = \begin{cases} \dfrac{p}{p + i\frac{mg}{\hbar}}\,\mathrm{e}^{+\frac{i}{\hbar}px} & \text{for} \quad x > 0 \\ \mathrm{e}^{+\frac{i}{\hbar}px} + \dfrac{-i\frac{mg}{\hbar}}{p + i\frac{mg}{\hbar}}\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}px} & \text{for} \quad x < 0 \end{cases} \tag{6a}$$

$$\Psi_{-p}^{\mathrm{in}}(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}px} + \dfrac{-i\frac{mg}{\hbar}}{p + i\frac{mg}{\hbar}}\,\mathrm{e}^{+\frac{i}{\hbar}px} & \text{for} \quad x > 0 \\ \dfrac{p}{p + i\frac{mg}{\hbar}}\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}px} & \text{for} \quad x < 0 \end{cases} \tag{6b}$$

$$\Psi_{+p}^{\mathrm{out}}(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{+\frac{i}{\hbar}px} + \dfrac{i\frac{mg}{\hbar}}{p - i\frac{mg}{\hbar}}\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}px} & \text{for} \quad x > 0 \\ \dfrac{p}{p - i\frac{mg}{\hbar}}\,\mathrm{e}^{+\frac{i}{\hbar}px} & \text{for} \quad x < 0 \end{cases} \tag{6c}$$

$$\Psi_{-p}^{\mathrm{out}}(x) = \begin{cases} \dfrac{p}{p - i\frac{mg}{\hbar}}\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}px} & \text{for} \quad x > 0 \\ \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}px} + \dfrac{i\frac{mg}{\hbar}}{p - i\frac{mg}{\hbar}}\,\mathrm{e}^{+\frac{i}{\hbar}px} & \text{for} \quad x < 0 \end{cases} \tag{6d}$$

[*1] ヒント: まず式(3)を式(1)に代入して y 積分を実行すると次の様になる:

$$\Psi_p^{\mathrm{as}}(x) = \psi_p(x) + gG^{\pm}(x,0;p)\Psi_p^{\mathrm{as}}(0) \tag{a}$$

次に $x = 0$ と置くと次が得られる:

$$\Psi_p^{\mathrm{as}}(0) = 1 + gG^{\pm}(0,0;p)\Psi_p^{\mathrm{as}}(0) \tag{b}$$

これを $\Psi_p^{\mathrm{as}}(0)$ について解いて，それを式(a)に代入すれば式(4)が得られる．