## 2019年度 日本大学大学院理工学研究科 量子理工学専攻 量子力学Ⅱ レポート3

提出締め切り: 2019年12月13日(金) 23:59:59 JST

提出先: ohya@phys.cst.nihon-u.ac.jp

または駿河台校舎8号館2階823D室

## 問題. 角運動量の2乗

(i)  $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ ,  $\mathbf{p}=(p_1,p_2,p_3)$  をそれぞれ位置演算子、運動量演算子とする。これらは交換関係  $[x_i,p_j]=i\hbar\delta_{ij}$  を満たす。この時、角運動量演算子  $\mathbf{L}=\mathbf{x}\times\mathbf{p}$  の2乗は次の様に表せる事を示せ:\*1

$$L^{2} = r^{2}p^{2} - (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p})(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p}) + i\hbar(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p})$$
(1)

但し、 $r = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ である.

(ii) 上の演算子を適当な関数に作用する微分演算子として実現させる事を考える。良く知っているように,位置演算子は単なる座標  $x_i$ ,運動量演算子は  $p_j=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}$  として実現可能である。この時,次が成り立つことを示せ:\*2

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p} = -i\hbar r \frac{\partial}{\partial r} \tag{2}$$

(iii) 式(1)と式(2)を用いて次が成り立つことを示せ:\*3

$$p^2 = p_r^2 + \frac{L^2}{r^2} \tag{3}$$

但し、 $p_r$  は動径方向の運動量演算子で、次の様な微分演算子として実現される:

$$p_r = -i\hbar r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} r = -i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right)$$
 (4)

式(3)より3次元のLaplacian(に負号を掛けたもの)は次の様に表せることが分かる:

$$-\boldsymbol{\nabla}^2 = \frac{1}{\hbar^2} \boldsymbol{p}^2 = r^{-1} \left( -\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\boldsymbol{L}^2/\hbar^2}{r^2} \right) r \tag{5}$$

<sup>\*1</sup> ヒント: 完全反対称テンソル  $\varepsilon_{ijk}$  (但し、 $\varepsilon_{123}=+1$ ) を用いると、角運動量演算子  $\mathbf{L}=(L_1,L_2,L_3)$  は  $L_i=\varepsilon_{ijkxjpk}$  と表せる.これより  $\mathbf{L}^2=L_iL_i=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}x_jp_kx_lp_m$  と書ける.ここで公式  $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}=\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl}$  を使うと、 $\mathbf{L}^2=x_jp_kx_jp_k-x_jp_kx_kp_j$  と表せる. あとは交換関係  $[x_i,p_j]=i\hbar\delta_{ij}$  を使って適当に  $x_i$  と  $p_i$  の順番を入れ替えていくと、最終的に  $\mathbf{L}^2=x_jx_jp_kp_k-x_jp_jx_kp_k+i\hbar x_jp_j=(x\cdot x)(p\cdot p)-(x\cdot p)(x\cdot p)+i\hbar(x\cdot p)$  となって式(1)が得られる.

 $<sup>(</sup>x \cdot x)(p \cdot p) - (x \cdot p)(x \cdot p) + i\hbar(x \cdot p)$  となって式(1)が得られる.

\*2 ヒント:  $x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} = r \frac{\partial}{\partial r}$  を示せば良い、球座標  $(x, y, z) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$  と連鎖公式  $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial$ 

 $<sup>\</sup>frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z}$  を使えば直ぐに示せる。 \*3 ヒント:  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} = rp_r + i\hbar$  と書けること、および交換関係  $[r, p_r] = i\hbar$  が成り立つことに注意すると、 $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) = rp_r rp_r + 2i\hbar rp_r - \hbar^2 = r([p_r, r] + rp_r)p_r + 2i\hbar rp_r - \hbar^2 = r^2p_r^2 + i\hbar(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})$  と書けることが分かる。  $\mathbf{L}^2 = \hbar^2(-\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}) - \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2})$  は r 微分を含まない  $\theta$  と  $\theta$  だけの微分演算子であることに注意.