

提出締め切り: 2019年11月29日(金) 23:59:59 JST

提出先: ohya@phys.cst.nihon-u.ac.jp

または駿河台校舎8号館2階823D室

問題. 2次元調和振動子とLie代数 $\mathfrak{so}(3)$

2次元調和振動子のHamiltonian

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) \quad (1)$$

は昇降演算子

$$a_j = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x_j + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}p_j \quad \text{and} \quad a_j^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x_j - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}p_j \quad (j=1,2) \quad (2)$$

を用いて次の様に表される:

$$H = \hbar\omega(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1) \quad (3)$$

ここで, 昇降演算子は次の交換関係を満たす:

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_j] = 0, \quad [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \quad (i, j=1,2) \quad (4)$$

容易に確認出来る様に, Hamiltonian (3) の固有値 E_n および規格化された固有ベクトル $|E_n\rangle$ は次で与えられる:

$$E_n = \hbar\omega(n+1), \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad (5a)$$

$$|E_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!}}(a_1^\dagger)^{n_1}(a_2^\dagger)^{n_2}|0\rangle, \quad n_1, n_2 \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad n_1 + n_2 = n \quad (5b)$$

但し, $|0\rangle$ は2次元調和振動子の基底状態で次を満たす:

$$a_j|0\rangle = 0 \quad (j=1,2) \quad (6)$$

n を1つ固定したとき, $n_1 + n_2 = n$ を満たす n_1 と n_2 の組み合わせは $n+1$ 通りあるので, 2次元調和振動子のエネルギー単位は $n+1$ 重に縮退している事に注意. 実はこの縮退の背後にはLie代数 $\mathfrak{so}(3)$ の構造が潜んでいる. これを明らかにしよう. 以下の問いに答えよ.

(i) まず昇降演算子とPauli行列(の1/2倍)を用いて次のエルミート演算子を導入しよう.*¹

$$J_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_1^\dagger & a_2^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1) \quad (7a)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_1^\dagger & a_2^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2i}(a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1) \quad (7b)$$

$$J_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_1^\dagger & a_2^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2) \quad (7c)$$

この様に定義された演算子は次の交換関係を満たす事を示せ:

$$[J_1, J_2] = iJ_3, \quad [J_2, J_3] = iJ_1, \quad [J_3, J_1] = iJ_2 \quad (8)$$

(ii) 次の交換関係が成り立つ事を示せ:

$$[H, J_j] = 0 \quad (j=1,2,3) \quad (9)$$

これより例えば $\{H, \mathbf{J}^2 = (J_1)^2 + (J_2)^2 + (J_3)^2, J_3\}$ の3つは同時対角化可能である事が言える.

*¹ この様なLie代数 $\mathfrak{so}(3)(\cong \mathfrak{su}(2))$ の生成子の構成法をJordan-Schwinger構成とかJordan-Schwinger写像と呼ぶ.

(iii) 次の等式が成り立つ事を示せ: ^{*2}

$$H^2 = \hbar^2 \omega^2 (4\mathbf{J}^2 + 1) \quad (10)$$

これよりエネルギー固有値は $\mathbf{J}^2$ の固有値のみで決まり、 J_3 の固有値には依らない(即ち J_3 の固有値の取り得る値の数だけエネルギー準位は縮退している)事が分かる。

(iv) 状態ベクトル $|j, m\rangle$ を次式で定義する:

$$|j, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} (a_1^\dagger)^{j+m} (a_2^\dagger)^{j-m} |0\rangle \quad (11)$$

但し、 $j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}$ で、 j を1つ固定したとき m の取り得る値は $m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$ の $2j+1$ 通りとする。この様に定義された状態ベクトルは次を満たす事を示せ: ^{*3}

$$H|j, m\rangle = \hbar\omega(2j+1)|j, m\rangle \quad (12a)$$

$$\mathbf{J}^2|j, m\rangle = j(j+1)|j, m\rangle \quad (12b)$$

$$J_3|j, m\rangle = m|j, m\rangle \quad (12c)$$

$$J_\pm|j, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle \quad (12d)$$

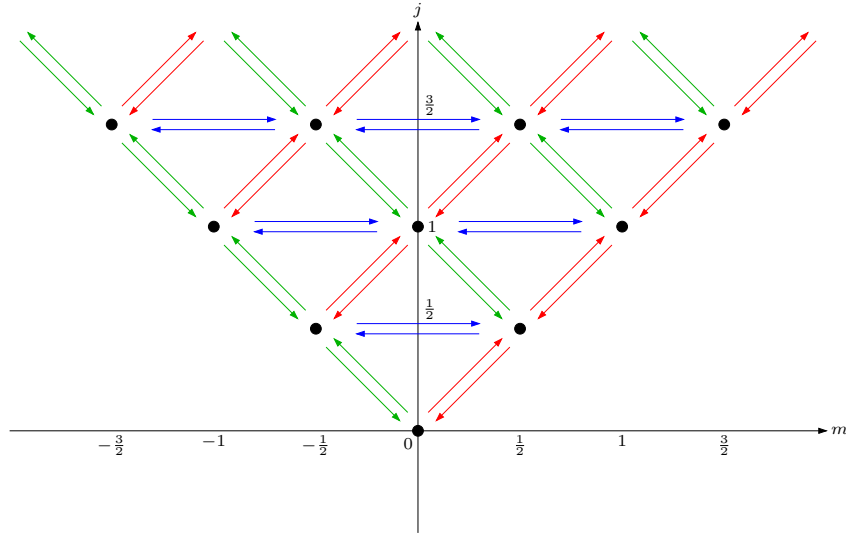
$$a_1^\dagger|j, m\rangle = \sqrt{j+m+1}|j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}\rangle \quad (12e)$$

$$a_2^\dagger|j, m\rangle = \sqrt{j-m+1}|j+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}\rangle \quad (12f)$$

$$a_1|j, m\rangle = \sqrt{j+m}|j-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}\rangle \quad (12g)$$

$$a_2|j, m\rangle = \sqrt{j-m}|j-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}\rangle \quad (12h)$$

但し、 $J_+ = J_1 + iJ_2 = a_1^\dagger a_2$ および $J_- = J_1 - iJ_2 = a_2^\dagger a_1$ である。縦軸に j 、横軸に m を取った2次元 (j, m) 平面の点で状態ベクトル $|j, m\rangle$ を表す事にすると、式(12d)–(12h)で表される状態ベクトル間の関係式は、模式的に下の図の矢印で表す事が出来る:



但し、図の青色右向き矢印が J_+ 、青色左向き矢印が J_- 、赤色右斜め上向き矢印が $a_1^\dagger$ 、赤色左斜め下向き矢印が a_1 、緑色左斜め上向き矢印が $a_2^\dagger$ 、緑色右斜め下向き矢印が a_2 の作用を表す。

^{*2} ヒント: $\mathbf{J}^2$ を計算すると $\mathbf{J}^2 = \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2)(\frac{1}{2}(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) + 1) = \frac{1}{4}(\frac{H^2}{\hbar^2 \omega^2} - 1)$ となる。これを H^2 について解けば良い。

^{*3} ヒント: 任意の自然数 n に対して成り立つ関係式 $[a_i, (a_j^\dagger)^n] = n\delta_{ij}(a_j^\dagger)^{n-1}$ を用いると良い。