2019年度 日本大学大学院理工学研究科 量子理工学専攻 量子力学II レポート1

提出締め切り: 2019年10月25日(金) 23:59:59 JST
提出先: ohya@phys.cst.nihon-u.ac.jp
または駿河台校舎8号館2階823D室

問題. 変位演算子とコヒーレント状態

1次元調和振動子の昇降演算子aと$a^\dagger$及び基底状態$|0\rangle$を考える．これらは次を満たす:

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad \& \quad a|0\rangle = 0 \tag{1}$$

以下の問いに答えよ．

(i) 次の様にaと$a^\dagger$を複素数の定数αだけずらした演算子a'と$a'^\dagger$を考えよう:

$$a' = a - \alpha \quad \& \quad a'^\dagger = a^\dagger - \alpha^* \tag{2}$$

これらは次の様にaと$a^\dagger$のユニタリー変換で与えられる事を示せ:*1

$$a' = UaU^{-1} \quad \& \quad a'^\dagger = Ua^\dagger U^{-1} \tag{3}$$

但し，Uは次式で定義されるユニタリー演算子である:

$$U = \exp(iT) \quad \text{with} \quad T = -i(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) \tag{4}$$

$T = T^\dagger$はエルミート演算子である事，及び，$U^{-1} = U^\dagger = \exp(-iT)$に注意．式(4)のユニタリー演算子$U$を**変位演算子(displacement operator)**と呼ぶ．

(ii) a'と$a'^\dagger$は交換関係$[a', a'^\dagger] = 1$を満たすのでこれらも昇降演算子である．そこで，a'で消滅させられる新たな基底状態$|0'\rangle$を考えよう:

$$a'|0'\rangle = 0 \tag{5}$$

以下，この状態ベクトル$|0'\rangle$を求めよう．$a' = UaU^{-1}$に注意すると，次が方程式(5)の解である事が分かる:

$$|0'\rangle = U|0\rangle \tag{6}$$

実際，この時$a'|0'\rangle = UaU^{-1}U|0\rangle = Ua|0\rangle = 0$となる．式(6)の右辺は次の様に表される事を示せ:*2

$$|0'\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad \text{with} \quad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle \tag{7}$$

式(5)は$a|0'\rangle = \alpha|0'\rangle$と等しい事，即ち，$|0'\rangle$は$a$の固有値$\alpha$に属する固有状態である事に注意．一般に，降演算子$a$の固有状態を**コヒーレント状態(coherent state)**と呼ぶ．コヒーレント状態は量子光学などでよく登場する．

---

*1 ヒント: 一般に，演算子AとBに対して次が成り立つ:

$$\mathrm{e}^{-B} A \mathrm{e}^{B} = A + [A, B] + \frac{1}{2!}[[A, B], B] + \frac{1}{3!}[[[A, B], B], B] + \cdots$$

これをBaker-Campbell-Hausdorffの公式と呼ぶ．この公式を$\mathrm{e}^{iT} a \mathrm{e}^{-iT}$と $\mathrm{e}^{iT} a^\dagger \mathrm{e}^{-iT}$に適用すれば良い．交換関係$[a, iT] = \alpha$，$[a^\dagger, iT] = \alpha^*$に注意すると，上の展開の3項目以降は全てゼロである事が分かる．

*2 ヒント: 一般に，$[A, [A, B]] = 0$且つ$[B, [A, B]] = 0$を満たす演算子AとBに対して次が成り立つ:

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{A} \mathrm{e}^{B} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[A, B]}$$

これを使うと$U = \mathrm{e}^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} = \mathrm{e}^{\alpha a^\dagger} \mathrm{e}^{-\alpha^* a} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}$が成り立つ．$a|0\rangle = 0$なので，演算子$\mathrm{e}^{-\alpha^* a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^*)^n}{n!} a^n$を$|0\rangle$に作用させると$n = 0$の所だけが生き残って$\mathrm{e}^{-\alpha^* a}|0\rangle = |0\rangle$となる事に注意.

(iii) 通常の1次元調和振動子のハミルトニアンHと，これの運動量及び位置を実定数p_0とx_0だけずらしたハミルトニアンH'を考える:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \quad \& \quad H' = \frac{(p-p_0)^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x-x_0)^2 \tag{8}$$

このHとH'の間には或るユニタリー変換Uが存在して$H' = UHU^{-1}$という関係が成り立つ．上の(i)の結果を用いてこのUを求めよ[*3]．また，(ii)の結果を用いてH'の基底状態$|0'\rangle$とHの基底状態$|0\rangle$の間の関係を求めよ．この様に2つの理論が互いに或るユニタリー変換で結び付いている場合，その2つの理論は**ユニタリー同値(unitarily equivalent)**であると言う．

[*3] **ヒント**: 式(8)のハミルトニアンは$H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$， $H' = \hbar\omega(a'^\dagger a' + \frac{1}{2})$と書ける．但し，

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}p, \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}p$$

$$a' = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x-x_0) + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(p-p_0), \quad a'^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x-x_0) - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(p-p_0)$$

である．これらと式(2)を比較する事でαを読み取り，それを式(4)に代入すれば良い．Uはx, p, x_0，p_0を用いて表すと良い．