

日本大学大学院理工学研究科

物理/量子理工学専攻 場の理論特論 II

—摂動論的場の量子論—

2020 年度後期

(最終更新日: 2020 年 9 月 11 日)

大谷 聡

日本大学量子科学研究所

ohya@phys.cst.nihon-u.ac.jp

<http://aries.phys.cst.nihon-u.ac.jp/~ohya/>

目次

はじめに	v
参考文献	vii
単位系と記号	ix
第 1 章 場の量子論の基礎	1
1.1 粒子の定義	1
1.2 自由場の理論	3
1.2.1 有質量スカラー場	3
1.3 散乱振幅と LSZ 公式	13
1.3.1 粒子の波束	13
1.3.2 漸近条件	15
1.3.3 実スカラー場の LSZ 公式	16
1.4 生成汎関数	19
1.4.1 Green 関数の生成汎関数	19
1.4.2 連結 Green 関数の生成汎関数	21
1.4.3 頂点関数の生成汎関数	22
参考文献	28
第 2 章 ループ展開	31
2.1 ループ展開と \hbar 展開	31
2.1.1 連結 Feynman 図と不変量 $V - I + L$	32
2.1.2 ループ展開と \hbar 展開の等価性	33
2.2 有効作用の \hbar 展開	34
2.2.1 おもちゃの例 1: 1 変数関数の場合	35
2.2.2 おもちゃの例 2: N 変数関数の場合	41
2.2.3 実スカラー場の理論の 1 ループ有効作用	44
2.3 質量核上繰り込み	45
2.4 例 1: 6 次元有質量 φ^3 理論	49
2.4.1 自己エネルギーの 1 ループ近似	50
2.4.2 Källén-Lehmann のスペクトル表示	54
2.4.3 3 点頂点関数の 1 ループ近似	56
2.5 例 2: 4 次元有質量 φ^4 理論	58
2.5.1 自己エネルギーの 1 ループ近似	59
2.5.2 4 点頂点関数の 1 ループ近似	60
参考文献	61
第 3 章 ゲージ場の量子論	63
3.1 ゲージ場の古典論	63
3.1.1 可換ゲージ理論	63
3.1.2 非可換ゲージ理論	67

3.2	ゲージ固定と Faddeev-Popov ゴースト	70
3.2.1	ゲージ軌道とゲージ固定その 1: 初等積分の場合	72
3.2.2	ゲージ軌道とゲージ固定その 2: ゲージ理論の場合	76
3.3	BRST 対称性	80
	参考文献	83

はじめに

この講義では相対論的場の量子論の基礎について学びます。特に摂動論的側面に焦点を絞ります。具体的には次の事柄について学びます:

- 散乱振幅と LSZ 公式
- 有効作用のループ展開と 1 ループ計算
- ゲージ固定と Faddeev-Popov ゴースト

これらの内容を 15 回の講義で解説します。場の量子論には主に演算子形式と経路積分形式の 2 通りのアプローチの仕方がありますが、この講義ではどちらも使います。また、Klein-Gordon 方程式、Maxwell 方程式とゲージ不変性、経路積分の初歩については先行科目で一度は学んだことがあると仮定します。必要になった時にその都度説明を与えますが、この辺は各自で復習しておくといいでしょう。

授業は基本的にこの講義ノートに沿って進めます。(但し、時間の都合で一部省略する話題もあります。) この講義ノートは 3 つの章から成っていて、前半はスカラー場の量子論、後半は非可換ゲージ理論の話です。具体的な構成は次の様になっています:

第 1 章 場の量子論の基礎

粒子の定義および自由場の理論について復習した後、散乱振幅と LSZ 公式、そして、Green 関数、連結 Green 関数、頂点関数それぞれの生成汎関数について学ぶ。

第 2 章 ループ展開

有効作用のループ展開について学ぶ。ループ展開は \hbar 展開と等価である事を証明した後、実際に有効作用の \hbar 展開を行い、実スカラー場の理論に於ける有効作用の 1 ループマスター公式を導出する。その後、 φ^3 理論と φ^4 理論を例に頂点関数の 1 ループ計算法を学ぶ。

第 3 章 ゲージ場の量子論

ゲージ理論を量子化するにはゲージ固定が必要。初等積分を例にゲージ軌道について学んだ後、Faddeev-Popov に従ってゲージ理論を量子化する。ゲージ固定後に残る大局的対称性—BRST 対称性—についても学ぶ。

授業では時間の都合で計算の詳細を省くことがありますが、この講義ノートには計算過程も詳しく書いたつもりです。特にループ計算は初学者には敷居が高いので、丁寧に書いたつもりです。経験上、自由場の理論は理解出来ても、摂動計算が全く出来ない人が多いので、この授業では摂動計算の習得を目標に講義を進めて行きます。

参考文献

今では場の量子論の教科書は山程あります。沢山あり過ぎてどれが良いのか分からないくらいですが、その中でも私が読んだことがあるもので良いと思うものをいくつか挙げておきますので、学習の参考にしてください。

まず最初に、私が初学者に薦めるのは次の3冊です：

- [1] M. Maggiore, *A Modern Introduction to Quantum Field Theory* (Oxford University Press, 2005)
- [2] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, 2nd ed. (Princeton University Press, 2010)
- [3] A. Duncan, *The Conceptual Framework of Quantum Field Theory* (Oxford University Press, 2012)

これらはそれぞれ難易度が違います。まず [1] は場の量子論の入門書で、Lorentz 群と Poincaré 群の表現論の話から始まり、最後は非可換ゲージ理論及び自発的対称性の破れの初歩までやって終わっています。一部自己完結していない箇所もありますが、全体的に良く書けている良書だと思います。この [1] の内容が理解出来ていれば取り敢えず充分でしょう。[2] はくだけた文体で書かれた教科書で、読んでいてとても面白い物理本です。場の理論の色々な話題が載っていて読むと大変勉強になりますが、これだけで勉強して自分で計算できる様になるかと言うと、ちょっと微妙です。副読本としてお薦めします。[3] は通常の教科書では一切触れられていない場の量子論の微妙な問題についても言及している稀有な教科書です。例えば、Haag の定理についても隠さず述べられています^{*1}。他には LSZ 公式の基礎付けを与える Haag-Ruelle 散乱理論や、QED の赤外問題、非可換ゲージ理論の Gribov 問題等にも触れています。これらの話題は初学者向けではありませんが、同様の話題を取り扱っている数理解物理本と比べてちゃんと読めば物理学者にも分かる様に書いてあります。自己完結型の教科書で初等的な所から解説しているので、この本で一から学ぶ事は可能です。700 ページ超の大部ですが、皆さんはまだ若いので、場の量子論の微妙な問題にも関心がある人はこの本に挑戦してみると良いと思います。

以上、3冊挙げましたが、これらのチョイスは私の好み色が濃く反映されていて、はっきり言って一般的ではないかもしれません。一般的には、Peskin-Schroeder や Weinberg, Srednicki 辺りで勉強するのが標準的でしょうか：

- [4] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Westview Press, 1995)
- [5] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. I & II* (Cambridge University Press, 1995)
- [6] M. Srednicki, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, 2007)

勿論これらの教科書もとても良いので、これらの方が肌に合う人はどれか好きな本で勉強すれば良いと思います。

他にも良い教科書は沢山あります。それらについては各章の末尾に参考文献として挙げる予定です。

^{*1} Haag の定理とは、一般の相互作用する場の量子論では相互作用描像は存在しない、相互作用描像が存在するのは自由場の量子論だけである、と主張する定理で、物理学者にはかなり都合の悪い定理です。Haag の定理について言及している物理本はまずありません。

単位系と記号

この講義ノートで使う単位系や記号、各種関数をまとめておきます。

- 自然単位系

$$c = \hbar = 1$$

- Minkowski 計量

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$$

- 4 元ベクトル

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \mathbf{x}), & x_\mu &= \eta_{\mu\nu} x^\nu = (-x^0, x^1, x^2, x^3) = (-t, \mathbf{p}) \\ p^\mu &= (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, \mathbf{p}), & p_\mu &= \eta_{\mu\nu} p^\nu = (-p^0, p^1, p^2, p^3) = (-E, \mathbf{p}) \end{aligned}$$

- Einstein の縮約記法

$$\begin{aligned} px &= \eta_{\mu\nu} p^\mu x^\nu = p^\mu x_\mu = p_\mu x^\mu = -p^0 x^0 + p^1 x^1 + p^2 x^2 + p^3 x^3 = -Et + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \\ p^2 &= \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = p^\mu p_\mu = p_\mu p^\mu = -(p^0)^2 + |\mathbf{p}|^2 = -E^2 + |\mathbf{p}|^2 \\ x^2 &= \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu = x_\mu x^\mu = -(x^0)^2 + |\mathbf{x}|^2 = -t^2 + |\mathbf{x}|^2 \end{aligned}$$

2 行目および 3 行目の p^2 と x^2 は「 p^μ の 2 乗」, 「 x^μ の 2 乗」という意味で, 「 p^μ の第 2 成分 p^2 」, 「 x^μ の第 2 成分 x^2 」ではありません。紛らわしいですが文脈から間違えることは無いと思うので, この記法を使います。

- Fourier 変換

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{f}(p) e^{ipx} \\ \tilde{f}(p) &= \int d^4 x e^{-ipx} f(x) \end{aligned}$$

- デルタ関数

$$\begin{aligned} \delta^4(x) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ipx} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx}, & \delta^3(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \\ \delta^4(p) &= \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} e^{ipx} = \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} e^{-ipx}, & \delta^3(\mathbf{p}) &= \int \frac{d^3 \mathbf{x}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} = \int \frac{d^3 \mathbf{x}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \end{aligned}$$

- 階段関数

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

- 符号関数

$$\text{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} +1 & \text{for } x > 0 \\ -1 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

第 1 章

場の量子論の基礎

場の量子論で最も重要なのは Green 関数であると言っても過言ではありません。実際、Green 関数が分かれば LSZ 公式により S 行列要素 (散乱振幅) が分かり、ひとたび S 行列要素が分かれば散乱断面積や崩壊幅等の実験と比較可能な量が引き出せます。そこで、Green 関数を如何にして求めるか、という事が実際上の問題になる訳ですが、この時、「任意の Green 関数は連結 2 点 Green 関数と頂点関数から構成される」という事実が極めて重要になります。言い換えると、連結 2 点 Green 関数と頂点関数さえ分かれば、場の量子論の散乱問題は完全に解けるのです。

この章では粒子の定義と自由場の理論の復習から始め、LSZ 公式の導出、そして Green 関数、連結 Green 関数、頂点関数の生成汎関数について学びます。ループ展開による摂動計算法については第 2 章で取り扱います。

1.1 粒子の定義

この章では主に相対論的な粒子散乱を念頭に場の量子論を扱って行きますが、そもそも粒子とは何なのかを知らなければこれを論じることが出来ません。この節ではまず粒子とはなんぞや、量子論で粒子をどう定義すれば良いのか、という話から始めて行きましょう。この話はちゃんとやるにはかなり準備が必要で、内容も数学的になってしまうので、ここでは単なるお話として紹介するに留めます。証明や導出は一切しませんし、後々この話を積極的に使って行くことはしないので、全く分からなくても気にしてはいけません。次節で自由場の理論を正準量子化するとこの節で定義した粒子状態が得られる事を学びます。

相対論的な古典論の場合

まず古典論から始めましょう。Einstein の特殊相対論の教える所によると、質量 $m \geq 0$ の点粒子に対しては、エネルギー E と空間運動量 \mathbf{p} の間に次の関係式が成り立ちます:

$$E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} > 0 \quad (1.1.1)$$

両辺を 2 乗すると、これは次の条件と等価です:

$$E^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2 \quad \& \quad E > 0 \quad (1.1.2)$$

4 元運動量 $p^\mu = (p^0, \mathbf{p}) = (E, \mathbf{p})$ を導入すると、上の条件は次の様に書き直せます:

$$-p^\mu p_\mu = m^2 \quad \& \quad p^0 > 0 \quad (1.1.3)$$

但し、 $p_\mu = \eta_{\mu\nu} p^\nu = (-p^0, \mathbf{p}) = (-E, \mathbf{p})$ で、 $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ は Minkowski 計量です。この条件が出発点になります。式(1.1.3)を古典論からの要請と言っても良いでしょう。以下、この 4 元運動量と質量の間の関係式を基に、相対論的量子論に於ける粒子を定義していきます。簡単な為、以下では 4 元運動量を単に運動量と呼ぶことにしましょう。

相対論的な量子論の場合

非相対論的量子力学がそうであったように、量子論では物理系の状態は適当な Hilbert 空間のベクトルとして表され、観測可能量はその適当な Hilbert 空間の上でのエルミート演算子として表されます*1。これを踏まえて、質量 m の 1 粒子状態とは、質量演算子 (mass operator) $M^2 := -P^\mu P_\mu$ の離散固有値 $m^2 \geq 0$ に属する固有ベクトルで、且つ $P^0 > 0$ のものとして定義されます*2

$$-P^\mu P_\mu |m, \dots\rangle = m^2 |m, \dots\rangle \quad \& \quad P^0 > 0 \quad (1.1.4)$$

*1 物理系の状態は Hilbert 空間のベクトルでは無く射線 (ray) だろうか、観測可能量はエルミート作用素では無く自己共役作用素 (self-adjoint operator) だろうか、かつこみを入れたくなる人もいるかもしれません。それは全くその通りですが、ここでは細かい事は気にしないことにします。

*2 P^μ は運動量演算子で、エルミート演算子だと仮定しています。また、条件 $P^0 > 0$ は「 P^0 のスペクトル (固有値) は全て正であるべし」という意味です。

表現	m^2	ρ^2	p^μ	w
有質量正エネルギー表現	$m^2 > 0$	$\rho^2 = m^2 s(s+1)$	$p^2 + m^2 = 0 \ \& \ p^0 > 0$	$w/m \in \{-s, -s+1, \dots, s\}$
有質量負エネルギー表現	$m^2 > 0$	$\rho^2 = m^2 s(s+1)$	$p^2 + m^2 = 0 \ \& \ p^0 < 0$	$w/m \in \{-s, -s+1, \dots, s\}$
無質量正エネルギー有限スピン表現	$m^2 = 0$	$\rho^2 = 0$	$p^2 = 0 \ \& \ p^0 > 0$	$w/\omega = h$
無質量負エネルギー有限スピン表現	$m^2 = 0$	$\rho^2 = 0$	$p^2 = 0 \ \& \ p^0 < 0$	$w/\omega = h$
無質量正エネルギー無限スピン表現	$m^2 = 0$	$\rho^2 > 0$	$p^2 = 0 \ \& \ p^0 > 0$	$w/\omega \in \mathbb{Z}$ または $w/\omega \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$
無質量負エネルギー無限スピン表現	$m^2 = 0$	$\rho^2 > 0$	$p^2 = 0 \ \& \ p^0 < 0$	$w/\omega \in \mathbb{Z}$ または $w/\omega \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$
零運動量表現	$m^2 = 0$	$\rho^2 = 0$	$p^\mu = 0$	$w = 0$
タキオン表現	$m^2 < 0$	$\rho^2 = m^2 s(s-1)$	$p^2 + m^2 = 0$	省略

表1.1: Poincaré 群のユニタリ-既約表現の分類. 固有値 w の値は上から順に p^μ が次の値を取る慣性系での値: $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$, $p^\mu = (-m, 0, 0, 0)$, $p^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$, $p^\mu = (-\omega, 0, 0, -\omega)$, $p^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$, $p^\mu = (-\omega, 0, 0, -\omega)$. 但し, $m > 0$ で, $\omega > 0$ は任意の正数. 上2つの s の値は $\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\}$ のどれか1つ. また3・4番目の h の値は $\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2, \dots\}$ のどれか1つ. 零運動量/タキオン表現は複雑なので省略.

この固有ベクトル $|m, \dots\rangle$ が1粒子状態で, 「 \dots 」は質量 m 以外の残りのラベルを表します. この残りのラベルは $P^\mu P_\mu$ と互いに交換する演算子の固有値の組で, 通常は $W^\mu W_\mu$, P^μ , および W^3 の固有値を持って来ます:

$$-P^\mu P_\mu |m, \rho; p, w\rangle = m^2 |m, \rho; p, w\rangle \quad (1.1.5a)$$

$$W^\mu W_\mu |m, \rho; p, w\rangle = \rho^2 |m, \rho; p, w\rangle \quad (1.1.5b)$$

$$P^\mu |m, \rho; p, w\rangle = p^\mu |m, \rho; p, w\rangle \quad (1.1.5c)$$

$$W^3 |m, \rho; p, w\rangle = w |m, \rho; p, w\rangle \quad (1.1.5d)$$

ここで, W^μ は Pauli-Lubanski ベクトルと呼ばれる4元ベクトルの演算子で, 次式で定義されます:^{*3}

$$W^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu J_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} J_{\nu\rho} P_\sigma \quad (1.1.6)$$

上の式から明らかですが, $\{m^2, \rho^2, p^\mu, w\}$ はそれぞれ演算子 $\{-P^\mu P_\mu, W^\mu W_\mu, P^\mu, W^3\}$ の固有値です. 問題はこれらの固有値がどんな値を取るのか, ということで, これらの取り得る値を分類することで粒子の分類が完了します. これは数学的には Poincaré 群のユニタリ-既約表現の分類の問題で, 1930年代に Eugene Wigner によって解かれました. 導出は一切省いて答えだけ書くと, 表1.1の様になります. この表から明らかですが, 固有値 m^2 が非負 ($m^2 \geq 0$) で, 且つ P^0 のスペクトルが正 ($p^0 > 0$) のものは次の3つだけです:

① 有質量正エネルギー表現 (massive positive-energy representations)

質量 m とスピンの大きさ s で分類される. s の取り得る値は $\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\}$ のどれか1つ. s を1つ定めると, 固有値 w/m (静止系 $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$ でのスピンの z 成分に対応) の取り得る値は $\{-s, -s+1, \dots, s\}$ の $2s+1$ 個. 従って物理的自由度は $2s+1$.

② 無質量正エネルギー有限スピン表現 (massless positive-energy finite-spin representations)

慣性系 $p^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$ での固有値 $w/\omega = h$ (ヘリシティに対応) の値で分類される. h の取り得る値は $\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2, \dots\}$ のどれか1つ. 従って物理的自由度は1. (但し, パリティ不変な理論では h の状態があれば必ず $-h$ の状態があるので, これらをひとまとめにして1粒子状態と呼ぶ. 光子や重力子がまさにそれで, 光子の場合は $h = \pm 1$ で物理的自由度が2, 重力子の場合 $h = \pm 2$ で物理的自由度が2.)

③ 無質量正エネルギー無限スピン表現 (massless positive-energy infinite-spin representations)

ρ^2 と慣性系 $p^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$ での固有値 w/ω の値で分類される. 固有値 w/ω の取り得る値は $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ の全て, 若しく

^{*3} $J_{\mu\nu}$ は Lorentz 変換の生成子で, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は $\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} = 1$ を満たす完全反対称テンソルです. P^μ と $J^{\mu\nu}$ は次の Poincaré 代数と呼ばれる Lie 代数の交換関係を満たします:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \quad [J^{\mu\nu}, P^\rho] = i(\eta^{\mu\rho} P^\nu - \eta^{\nu\rho} P^\mu), \quad [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} J^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} + \eta^{\nu\sigma} J^{\mu\rho})$$

また, $P^\mu, J^{\mu\nu}, W^\mu$ の間の交換関係は次の様になります:

$$[P^\mu, W^\nu] = 0, \quad [J^{\mu\nu}, W^\rho] = i(\eta^{\mu\rho} W^\nu - \eta^{\nu\rho} W^\mu), \quad [W^\mu, W^\nu] = -i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\rho W_\sigma$$

これらを使うと, $\{P^\mu P_\mu, W^\mu W_\mu, P^\mu, W^3\}$ が互いに全て交換し, 同時対角化可能であることが示せます. $P^\mu P_\mu$ と $W^\mu W_\mu$ をそれぞれ Poincaré 代数の2次および4次の Casimir 演算子と呼びます. これらは任意の Poincaré 変換 (Lorentz 変換+並進) の下で不変で, 従ってその固有値はどの慣性系でも同じ値を取ります. 一方, P^μ と W^3 は一般に Poincaré 変換の下で不変では無いので, その固有値の値は慣性系に依ります. 表1.1の固有値 w の値は適当な慣性系での値です.

は $\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots\}$ の全て. 固有値 ρ^2 は質量次元が 2 なので, この表現に属する粒子は「無質量だが質量スケール ρ を内包している」という点で上の無質量正エネルギー有限スピン表現とは全く異なる. また, 物理的自由度も無限大.

スピン (またはヘリシティ) の値が整数のものがボゾン, 半奇数のものがフェルミオンである事に注意しましょう.

以上が理論的な粒子の分類ですが, これらが全て自然界で実現されているかと言うと, そういう訳ではありません. 例えば無質量正エネルギー無限スピン表現に対応する粒子は全く見つかりません. また, 無質量正エネルギー有限スピン表現に関しても, ヘリシティの値が 2 以上の粒子は見つかりません. 実際, 理論的にも無質量でヘリシティが 2 より大きい粒子の理論で, ちゃんと相互作用のある理論は作れないと言われてます*4. Poincaré 群のユニタリ既約表現の分類で得られるのは基本的に自由粒子で, また, 自然界に存在する粒子までは教えてくれないということを強調しておきましょう.

さて, 上の「—表現」という呼び名は長いので, 以下では慣例に従って有質量正エネルギー表現に属する 1 粒子状態を単に有質量粒子と呼び, 無質量正エネルギー有限スピン表現に属する 1 粒子状態を単に無質量粒子と呼ぶことにします. 無質量正エネルギー無限スピン表現は通常は連続スピン表現 (continuous spin representations) と呼ばれていますが, この場の理論はとても難しいし, また, 自然界で見つからないので, 今後は一切考えません*5.

1.2 自由場の理論

前節で相対論的量子論で現れ得る点粒子を分類しました. この節では自由場の理論を正準量子化することで, これらの粒子状態が実現されることを簡単に復習します. 簡単の為, 有質量の実スカラー場を考えましょう. この場の理論は有質量 ($m^2 > 0$) でスピンの大きさがゼロ ($s = 0$) の粒子の理論である事を見て行きます.

1.2.1 有質量スカラー場

Klein-Gordon 方程式の一般解

Klein-Gordon 方程式を解くことから始めましょう. ϕ を実スカラー場, m をスカラー場の質量とすると, Klein-Gordon 方程式は次式で与えられます:

$$(\partial^2 - m^2)\phi(x) = 0 \quad (1.2.1)$$

この方程式の一般解を求めましょう. これは Fourier 変換を使って運動量空間で解くのが最も簡単です. $\tilde{\phi}(p)$ を $\phi(x)$ の Fourier 変換とすると, $\phi(x)$ の Fourier 積分表示は次の様に与えられます:

$$\phi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{\phi}(p) e^{ipx} \quad (1.2.2)$$

ここで, 実スカラー場の場合は条件 $\phi^*(x) = \phi(x)$ が成り立つので, これが成立する為に $\tilde{\phi}(p)$ は次を満たさなければならない事に注意しましょう:

$$\tilde{\phi}(-p) = \tilde{\phi}^*(p) \quad \text{for any } p^\mu \quad (1.2.3)$$

式(1.2.2)を使うと, Klein-Gordon 方程式は $\tilde{\phi}(p)$ に対して次の条件式になります:

$$(p^2 + m^2)\tilde{\phi}(p) = 0 \quad (1.2.4)$$

この方程式を解きましょう. 両辺を $p^2 + m^2$ で割ると $\tilde{\phi}(p) = 0$ が得られるのでこれが解だ, と思うかもしれませんが, それは違います. $p^2 + m^2 \neq 0$ の時はそれで良いのですが, 運動量が $p^2 + m^2 = 0$ を満たす時は任意の $\tilde{\phi}(p)$ に対して等号が成り立ちます. 従って, 方程式(1.2.4)の解は $p^2 + m^2 = 0$ の時のみ非ゼロの値を取る関数なら何でも良く, $f(p)$ を適当な任意関数として次の様に書けます:

$$\tilde{\phi}(p) = 2\pi f(p)\delta(p^2 + m^2) \quad (1.2.5)$$

*4 自由場の理論はゲージ理論として作れます. しかし, ヘリシティの値が 2 より大きい無質量粒子の理論 (高階スピンの理論) はゲージ対称性の制限がきつすぎて, 相互作用項が書けないと言われてます. また, Coleman-Mandula の定理やソフト定理と呼ばれる低エネルギー定理からも相互作用のある高階スピンの理論の存在は否定されています. 但し, これは Minkowski 時空上の理論の場合で, AdS 時空上だと高階スピンの理論が作れるそうです. 興味のある人は Vasiliev theory とか higher-spin gauge theory で google 検索してみましょう.

*5 連続スピン表現に興味がある人は, Philip Schuster と Natalia Toro が 2013 年に書いた次の 3 部作を読むと良いと思います:

- [1] P. Schuster and N. Toro, “On the theory of continuous-spin particles: wavefunctions and soft-factor scattering amplitudes,” *JHEP* **09** (2013) 104, [arXiv:1302.1198 \[hep-th\]](#)
- [2] P. Schuster and N. Toro, “On the theory of continuous-spin particles: helicity correspondence in radiation and forces,” *JHEP* **09** (2013) 105, [arXiv:1302.1577 \[hep-th\]](#)
- [3] P. Schuster and N. Toro, “A gauge field theory of continuous-spin particles,” *JHEP* **10** (2013) 061, [arXiv:1302.3225 \[hep-th\]](#)

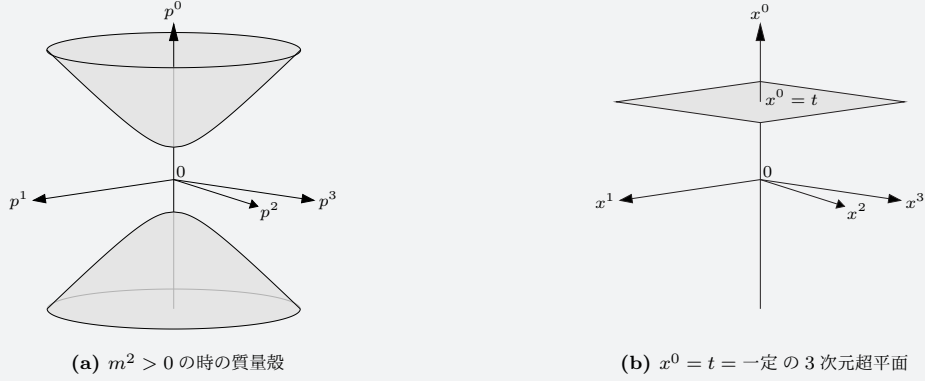


図1.1: 質量殻と $x^0 = t = \text{一定}$ の3次元超平面の模式図. (a) 非ゼロの2乗質量 $m^2 > 0$ に対しては、質量殻条件 $p^2 + m^2 = 0$ は4元運動量 p^μ で張られる4次元空間の中の互いに連結していない3次元部分空間 $\mathbb{H}_m^\pm = \{(p^0, p^1, p^2, p^3) : -(p^0)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 = -m^2 \text{ \& } \pm p^0 > 0\}$ を成します. $f(p)$ を p^μ の適当な関数とした時、 \mathbb{H}_m^+ 上に制限した4次元 Fourier 積分 $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \theta(p^0) \delta(p^2 + m^2) f(p) e^{ipx}$ が Klein-Gordon 方程式の正エネルギー解を与え、 \mathbb{H}_m^- 上に制限した4次元 Fourier 積分 $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \theta(-p^0) \delta(p^2 + m^2) f(p) e^{ipx}$ が Klein-Gordon 方程式の負エネルギー解を与えます. (b) 式(1.2.10a)や(1.2.10b)では $x^0 = t = \text{一定}$ の3次元部分空間内で積分を行います. 結果は t の選び方に依らないので、通常は $t = 0$ と置くのが最も便利です. (問題によっては $t \rightarrow \pm\infty$ の無限遠で積分を行う方が便利な場合もあります.)

右辺の因子 2π に深い意味は無く、後の便利の為に入れました. また、実スカラー場の場合は条件(1.2.3)が課されているので、 $f(p)$ も次を満たさなければなりません:

$$f(-p) = f^*(p) \quad \text{for any } p^\mu \quad (1.2.6)$$

条件 $p^2 + m^2 = -(p^0)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 + m^2 = 0$ を満たす4元運動量 $p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3)$ の集合は4次元運動量空間の中の3次元部分空間を成します. この部分空間を質量殻 (mass shell) と呼び、 $m^2 > 0$ の時は互いに連続的に繋がっていない正エネルギー ($p^0 > 0$) の部分空間と負エネルギー ($p^0 < 0$) の部分空間の2つから成ります (図1.1a参照). 式(1.2.5)と(1.2.2)より、Klein-Gordon 方程式の一般解は「質量殻上に台*6を持つ関数 $\tilde{\phi}(p)$ の Fourier 変換で与えられる」という事が分かりました. 特に正 (負) エネルギーの質量殻上に台を持つ関数 $\tilde{\phi}(p)$ の Fourier 変換で与えられる解を正 (負) エネルギー解と呼びます.

次に式(1.2.5)を Fourier 変換して $\phi(x)$ を求めましょう. まずデルタ関数 $\delta(p^2 + m^2)$ に対して次の等式が成り立つ事に注意します*7:

$$\delta(p^2 + m^2) = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} (\delta(p^0 - \omega_{\mathbf{p}}) + \delta(p^0 + \omega_{\mathbf{p}})) \quad \text{with } \omega_{\mathbf{p}} := \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (1.2.7)$$

これを使って式(1.2.5)を式(1.2.2)に代入すると、次の積分表示が得られます:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} 2\pi f(p) \delta(p^2 + m^2) e^{ipx} \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} 2\pi f(p) \cdot \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} (\delta(p^0 - \omega_{\mathbf{p}}) + \delta(p^0 + \omega_{\mathbf{p}})) e^{ipx} \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \left(f(\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) e^{-i\omega_{\mathbf{p}} x^0 + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + f(-\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) e^{+i\omega_{\mathbf{p}} x^0 + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right) \end{aligned}$$

*6 一般に、関数 $f(x)$ が非ゼロの値を返す変数 x の領域を台 (support) と呼び、 $\text{supp}(f)$ と記します. $\text{supp}(f) = \{x : f(x) \neq 0\}$ です. 自由スカラー場 $\phi(x)$ の Fourier 変換 $\tilde{\phi}(p)$ の場合、 $\text{supp}(\tilde{\phi}) = \{p^\mu : p^2 + m^2 = 0\}$ で、特に正エネルギー解の場合は $\text{supp}(\tilde{\phi}) = \{p^\mu : p^2 + m^2 = 0 \text{ \& } p^0 > 0\}$ 、負エネルギー解の場合は $\text{supp}(\tilde{\phi}) = \{p^\mu : p^2 + m^2 = 0 \text{ \& } p^0 < 0\}$ となります.

*7 式(1.2.7)はデルタ関数に対して成り立つ次の等式から従います:

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_i \in \{x : f(x)=0\}} \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i)$$

式(1.2.7)を示すには p^0 の関数として $f(p^0) = p^2 + m^2 = -(p^0)^2 + |\mathbf{p}|^2 + m^2$ を持って来て上の公式を適用すれば良いです. まず $f(p^0) = 0$ となる f の零点は $p^0 = \pm \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} = \pm \omega_{\mathbf{p}}$ の2つあります. また、関数 f の p^0 に関する1階微分は $f'(p^0) = -2p^0$ です. これらを使うと次の様に式(1.2.7)が得られます:

$$\delta(f(p^0)) = \frac{1}{|f'(+\omega_{\mathbf{p}})|} \delta(p^0 - \omega_{\mathbf{p}}) + \frac{1}{|f'(-\omega_{\mathbf{p}})|} \delta(p^0 - (-\omega_{\mathbf{p}})) = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} (\delta(p^0 - \omega_{\mathbf{p}}) + \delta(p^0 + \omega_{\mathbf{p}}))$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \left(f(\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) e^{-i\omega_{\mathbf{p}}x^0 + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + f(-\omega_{\mathbf{p}}, -\mathbf{p}) e^{+i\omega_{\mathbf{p}}x^0 - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right) \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \left(f(\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) e^{-i\omega_{\mathbf{p}}x^0 + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + f^*(\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) e^{+i\omega_{\mathbf{p}}x^0 - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right)
\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

但し、2行目で式(1.2.7)を使い、3行目では p^0 積分を実行し、4行目では第2項目だけ $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ と変数変換し、5行目では式(1.2.6)を使いました。以下、記法の簡略化の為に $p^0 = \omega_{\mathbf{p}}$ であると理解して式(1.2.8)を次の様に書く事にしましょう:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \left(f(p) e^{ipx} + f^*(p) e^{-ipx} \right) \quad \text{with } p^0 = \omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} \tag{1.2.9}$$

これが Klein-Gordon 方程式の一般解です。

さて、今まで関数 $f(p)$ は適当な任意関数でしたが、これは初期条件で決める事が出来ます。証明は後で与えますが、 x^0 を $x^0 = t$ と任意に固定すると、関数 $f(p)$ は $x^0 = t$ でのスカラー場の値 $\phi(x)$ とその微係数 $\partial_0\phi(x)$ を初期データとして次の様に書き表す事が出来ます:

$$\begin{aligned}
f(p) &= +i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} e^{-ipx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \\
&= +i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} \left(e^{-ipx} \partial_0 \phi(x) - (\partial_0 e^{-ipx}) \phi(x) \right) \\
&= +i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} e^{-ipx} (\partial_0 \phi(x) - i\omega_{\mathbf{p}} \phi(x))
\end{aligned} \tag{1.2.10a}$$

$$\begin{aligned}
f^*(p) &= -i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} e^{+ipx} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \\
&= -i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} \left(e^{+ipx} \partial_0 \phi(x) - (\partial_0 e^{+ipx}) \phi(x) \right) \\
&= -i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} e^{+ipx} (\partial_0 \phi(x) + i\omega_{\mathbf{p}} \phi(x))
\end{aligned} \tag{1.2.10b}$$

但し、この3次元空間積分は、4次元 Minkowski 時空の中の $x^0 = t = \text{一定}$ の3次元超平面の上で行います(図1.1b参照)。(要するに、被積分関数 $e^{\mp ipx}$ と $\phi(x)$ の x^0 は両方とも $x^0 = t$ と一致させます。一致させないと上の等式は成り立ちません。)また、記号 $\overleftrightarrow{\partial}_0$ は次式で定義される微分です:

$$f(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 g(x) := f(x) \partial_0 g(x) - (\partial_0 f(x)) g(x) \tag{1.2.11}$$

さて、式(1.2.10a)と(1.2.10b)の証明ですが、右辺の積分に式(1.2.9)を代入すれば直接計算によって簡単に示す事が出来ます。この時、いわゆる **Klein-Gordon 内積 (Klein-Gordon inner product)** を知っていると同通しが良いので、最後にこれを紹介してこの古典解の話の終わりにしましょう。

まず、適当な関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対して Klein-Gordon 内積 $(\cdot, \cdot)_{\text{KG}}$ は次式で定義されます:

$$(f, g)_{\text{KG}} := i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} f^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 g(x) \tag{1.2.12}$$

但し、積分は $x^0 = t = \text{一定}$ の3次元超平面内で行います。一般には右辺の積分は t に依存しますが、 f と g が共に Klein-Gordon 方程式の解で、且つ無限速で充分速くゼロに収束する場合は t の選び方に依りません。まずこれを示しましょう。関数 $f(x)$ と $g(x)$ が共に方程式 $(\partial^2 - m^2)f(x) = 0 = (\partial^2 - m^2)g(x)$ を満たすとすると、式(1.2.12)の t 微分は次の様に評価されます:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (f, g)_{\text{KG}} &= i \frac{d}{dt} \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} (f^*(x) \partial_0 g(x) - (\partial_0 f^*(x)) g(x)) \\
&= i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} \partial_0 (f^*(x) \partial_0 g(x) - (\partial_0 f^*(x)) g(x)) \\
&= i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} (f^*(x) \partial_0^2 g(x) - (\partial_0^2 f^*(x)) g(x)) \\
&= i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} (f^*(x) (\nabla^2 - m^2) g(x) - ((\nabla^2 - m^2) f^*(x)) g(x)) \\
&= i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} (f^*(x) \nabla^2 g(x) - (\nabla^2 f^*(x)) g(x)) \\
&= -i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} (\nabla f^*(x) \cdot \nabla g(x) - \nabla f^*(x) \cdot \nabla g(x))
\end{aligned}$$

$$= 0 \quad (1.2.13)$$

但し、4行目で Klein-Gordon 方程式 $(-\partial_0^2 + \nabla^2 - m^2)f(x) = 0 = (-\partial_0^2 + \nabla^2 - m^2)g(x)$ を使い、6行目で部分積分を行いました。部分積分をすると表面項が現れますが、 f と g が無限遠で充分速くゼロに収束するならば表面項はゼロになります。以上より、 f と g が共に Klein-Gordon 方程式の解で、且つ無限遠で充分速くゼロに収束する場合は式(1.2.12)の t 微分はゼロ、即ち t に依存しない事が分かりました。

次に平面波 $f_{\mathbf{q}}^{\pm}(x) = e^{\pm i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = e^{\mp i\omega_{\mathbf{q}}x^0 \pm i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$ に対する Klein-Gordon 内積を計算してみましょう。容易に確認出来ますが、この平面波 $f_{\mathbf{q}}^{\pm}(x) = e^{\pm i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$ は式(1.2.5)の $\tilde{\phi}(p)$ として次の関数 $\tilde{\phi}_{\mathbf{q}}^{\pm}(p)$ を選んだ場合に対応します。

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{\mathbf{q}}^{\pm}(p) &= (2\pi)^4 2\omega_{\mathbf{p}} \delta^3(\mathbf{p} \mp \mathbf{q}) \theta(\pm p^0) \delta(p^2 + m^2) \\ &= (2\pi)^4 2\omega_{\mathbf{p}} \delta^3(\mathbf{p} \mp \mathbf{q}) \theta(\pm p^0) \cdot \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} (\delta(p^0 - \omega_{\mathbf{p}}) + \delta(p^0 + \omega_{\mathbf{p}})) \\ &= (2\pi)^4 \delta^3(\mathbf{p} \mp \mathbf{q}) \delta(p^0 \mp \omega_{\mathbf{q}}) \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

但し、2番目の等号は式(1.2.7)から従い、3番目の等号は $\theta(\pm p^0) \delta(p^0 \mp \omega_{\mathbf{p}}) = \delta(p^0 \mp \omega_{\mathbf{p}})$ と $\theta(\pm p^0) \delta(p^0 \pm \omega_{\mathbf{p}}) = 0$ から従います。式(1.2.14)を式(1.2.2)に代入すればすぐ分かる様に、 $f_{\mathbf{q}}^+(x) = e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$ が正エネルギーの質量殻上に台を持つ関数 $\tilde{\phi}_{\mathbf{q}}^+(p)$ を Fourier 変換して得られる正エネルギー解、 $f_{\mathbf{q}}^-(x) = e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$ が負エネルギーの質量殻上に台を持つ関数 $\tilde{\phi}_{\mathbf{q}}^-(p)$ を Fourier 変換して得られる負エネルギー解です。これら正・負エネルギー解に対する Klein-Gordon 内積を計算すると次の様になります：

$$\begin{aligned} (f_{\mathbf{p}}^{\pm}, f_{\mathbf{q}}^{\pm})_{\text{KG}} &= i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} e^{\mp i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \overleftrightarrow{\partial}_0 e^{\pm i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \\ &= i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} \left(e^{\pm i\omega_{\mathbf{p}}x^0 \mp i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \partial_0 e^{\mp i\omega_{\mathbf{q}}x^0 \pm i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} - (\partial_0 e^{\pm i\omega_{\mathbf{p}}x^0 \mp i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) e^{\mp i\omega_{\mathbf{q}}x^0 \pm i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \right) \\ &= \pm \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} (\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{p}}) e^{\pm i(\omega_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{q}})x^0} e^{\mp i(\mathbf{p} - \mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} \\ &= \pm (\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{p}}) e^{\pm i(\omega_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \\ &= \pm (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (1.2.15a)$$

$$\begin{aligned} (f_{\mathbf{p}}^{\mp}, f_{\mathbf{q}}^{\pm})_{\text{KG}} &= i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} e^{\pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \overleftrightarrow{\partial}_0 e^{\pm i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \\ &= i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} \left(e^{\mp i\omega_{\mathbf{p}}x^0 \pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \partial_0 e^{\mp i\omega_{\mathbf{q}}x^0 \pm i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} - (\partial_0 e^{\mp i\omega_{\mathbf{p}}x^0 \pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) e^{\mp i\omega_{\mathbf{q}}x^0 \pm i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \right) \\ &= \pm \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} (\omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{p}}) e^{\mp i(\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}})x^0} e^{\pm i(\mathbf{p} + \mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} \\ &= \pm (\omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{p}}) e^{\mp i(\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.15b)$$

式(1.2.15b)より Klein-Gordon 内積の下では正エネルギーと負エネルギーの平面波解は直交する事が分かります。また、式(1.2.15a)より負エネルギーの平面波解の Klein-Gordon 内積は負になる事も分かります*8。これらの関係式を使うと式(1.2.10a)と(1.2.10b)が簡単に証明できます。式(1.2.9)は $\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}}} (f(\mathbf{q})f_{\mathbf{q}}^+(x) + f^*(\mathbf{q})f_{\mathbf{q}}^-(x))$ と書ける事に注意すると、式(1.2.10a)と(1.2.10b)の右辺の積分は次の様に計算されます：

$$\begin{aligned} \text{式(1.2.10a)の右辺} &= (f_{\mathbf{p}}^+, \phi)_{\text{KG}} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}}} [f(\mathbf{q})(f_{\mathbf{p}}^+, f_{\mathbf{q}}^+)_{\text{KG}} + f^*(\mathbf{q})(f_{\mathbf{p}}^+, f_{\mathbf{q}}^-)_{\text{KG}}] \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}}} [f(\mathbf{q})(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + f^*(\mathbf{q}) \cdot 0] \\ &= f(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (1.2.16a)$$

$$\begin{aligned} \text{式(1.2.10b)の右辺} &= -(f_{\mathbf{p}}^-, \phi)_{\text{KG}} \\ &= - \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}}} [f(\mathbf{q})(f_{\mathbf{p}}^-, f_{\mathbf{q}}^+)_{\text{KG}} + f^*(\mathbf{q})(f_{\mathbf{p}}^-, f_{\mathbf{q}}^-)_{\text{KG}}] \\ &= - \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}}} [f(\mathbf{q}) \cdot 0 + f^*(\mathbf{q}) (-2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q})] \end{aligned}$$

*8 従って、Klein-Gordon 内積は正定値内積ではありません。

$$= f^*(p) \quad (1.2.16b)$$

式(1.2.16a)及び(1.2.16b)それぞれの1行目から2行目への移行は、Klein-Gordon内積が線型性 $(f, \alpha g + \beta h)_{\text{KG}} = \alpha(f, g)_{\text{KG}} + \beta(f, h)_{\text{KG}}$ (但し, α, β は座標 \mathbf{x} に依らない) を満たす事に注意するとすぐに分かります。

以上, Klein-Gordon 方程式の解の基本的性質について説明しました。これまでの議論は実スカラー場 $\phi(x)$ を古典場 (c 数値多変数関数) として取り扱ったもので, 次にこれを量子化しましょう。基本的には一般解(1.2.9)で $f(p), f^*(p)$ と書いていたものを消滅・生成演算子 $a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p})$ に置き換えれば良いだけですが, 復習と記法の確認も兼ねて一からやる事にします。以下, 正準量子化で自由スカラー場の量子論を作っていきます。

正準量子化

まず, 実のスカラー場 $\phi(x)$ の理論の Lagrangian 密度は次式で与えられます:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

実際, この Lagrangian 密度から Euler-Lagrange 方程式を計算すると, Klein-Gordon 方程式に一致する事が簡単に確認出来ます:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial\mathcal{L}(\phi, \partial\phi)}{\partial\phi(x)} - \partial^\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}(\phi, \partial\phi)}{\partial(\partial^\mu\phi(x))} \right) \\ &= -m^2\phi(x) + \partial^\mu\partial_\mu\phi(x) \\ &= (\partial^2 - m^2)\phi(x) \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

この理論を正準量子化で量子化しましょう。以下, t を任意に持って来て $x^0 = t$ と固定します。まず $\phi(x)$ に共役な運動量は

$$\Pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}(\phi, \partial\phi)}{\partial(\partial_0\phi(x))} = \partial_0\phi(x) \quad (1.2.19)$$

となります。実スカラー場の理論の正準量子化は, $\phi(x)$ と $\Pi(x)$ を演算子に格上げして次の同時刻交換関係を課す事で完了します:

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (1.2.20a)$$

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{y})] = 0 \quad (1.2.20b)$$

$$[\Pi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})] = 0 \quad (1.2.20c)$$

今から解くべき問題は, 「Klein-Gordon 方程式(1.2.18)の解のうち, $x^0 = t$ での初期条件として上の同時刻交換関係を満たす演算子を求めよ」というものになります。まず Klein-Gordon 方程式の解ですが, これは一般解を既に式(1.2.9)で与えているのでこれがそのまま使えます。慣例に従って $f(p), f^*(p)$ と書いていたものを $a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p})$ と書き改めると, $\phi(x)$ は次の様に書き表す事が出来ます:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \left(a(\mathbf{p})e^{-i\omega_{\mathbf{p}}x^0 + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a^\dagger(\mathbf{p})e^{+i\omega_{\mathbf{p}}x^0 - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right) \quad (1.2.21)$$

ここで係数 $a(\mathbf{p})$ と $a^\dagger(\mathbf{p})$ は演算子で, 同時刻交換関係(1.2.20a)–(1.2.20c)を満たす為にはこれらもある交換関係を満たさなければなりません。次にこれを求めましょう。まず前節で $x^0 = t$ での初期値 $\phi(x)$ と $\partial_0\phi(x)$ が与えられた時, 係数 $f(p)$ と $f^*(p)$ は式(1.2.10a)と(1.2.10b)で表される事を示しましたが, 今の場合もこれがそのまま使えます。同時刻交換関係を満たす $x^0 = t$ での初期データ $\phi(x), \Pi(x)$ が与えられた時, $a(\mathbf{p})$ と $a^\dagger(\mathbf{p})$ は次の様に書き表せます:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{p}) &= +i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \\ &= +i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} \left(e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \partial_0\phi(x) - (\partial_0 e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}})\phi(x) \right) \\ &= +i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} (\Pi(x) - i\omega_{\mathbf{p}}\phi(x)) \end{aligned} \quad (1.2.22a)$$

$$\begin{aligned} a^\dagger(\mathbf{p}) &= -i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \\ &= -i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} \left(e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \partial_0\phi(x) - (\partial_0 e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}})\phi(x) \right) \\ &= -i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} (\Pi(x) + i\omega_{\mathbf{p}}\phi(x)) \end{aligned} \quad (1.2.22b)$$

これらを用いると、係数演算子 $a(\mathbf{p})$ と $a^\dagger(\mathbf{p})$ の間の交換関係が次の様に計算されます:

$$\begin{aligned}
[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{q})] &= \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} \int_{y^0=t} d^3\mathbf{y} [e^{+i\omega_{\mathbf{p}}t - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} (\Pi(t, \mathbf{x}) - i\omega_{\mathbf{p}}\phi(t, \mathbf{x})), e^{-i\omega_{\mathbf{q}}t + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} (\Pi(t, \mathbf{y}) + i\omega_{\mathbf{q}}\phi(t, \mathbf{y}))] \\
&= e^{i(\omega_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{q}})t} \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} \int_{y^0=t} d^3\mathbf{y} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} (i\omega_{\mathbf{q}}[\Pi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{y})] - i\omega_{\mathbf{p}}[\phi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})]) \\
&= (\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{p}}) e^{i(\omega_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{q}})t} \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} \int_{y^0=t} d^3\mathbf{y} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= (\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{p}}) e^{i(\omega_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{q}})t} \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{p} - \mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} \\
&= (\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{p}}) e^{i(\omega_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \\
&= (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q})
\end{aligned} \tag{1.2.23a}$$

$$\begin{aligned}
[a(\mathbf{p}), a(\mathbf{q})] &= - \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} \int_{y^0=t} d^3\mathbf{y} [e^{+i\omega_{\mathbf{p}}t - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} (\Pi(t, \mathbf{x}) - i\omega_{\mathbf{p}}\phi(t, \mathbf{x})), e^{+i\omega_{\mathbf{q}}t - i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} (\Pi(t, \mathbf{y}) - i\omega_{\mathbf{q}}\phi(t, \mathbf{y}))] \\
&= -e^{i(\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}})t} \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} \int_{y^0=t} d^3\mathbf{y} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} (-i\omega_{\mathbf{q}}[\Pi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{y})] - i\omega_{\mathbf{p}}[\phi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})]) \\
&= (\omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{p}}) e^{i(\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}})t} \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} \int_{y^0=t} d^3\mathbf{y} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= (\omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{p}}) e^{i(\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}})t} \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{p} + \mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} \\
&= (\omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{p}}) e^{i(\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.2.23b}$$

$$\begin{aligned}
[a^\dagger(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{q})] &= - \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} \int_{y^0=t} d^3\mathbf{y} [e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} (\Pi(t, \mathbf{x}) + i\omega_{\mathbf{p}}\phi(t, \mathbf{x})), e^{-i\omega_{\mathbf{q}}t + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} (\Pi(t, \mathbf{y}) + i\omega_{\mathbf{q}}\phi(t, \mathbf{y}))] \\
&= -e^{-i(\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}})t} \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} \int_{y^0=t} d^3\mathbf{y} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} (i\omega_{\mathbf{q}}[\Pi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{y})] + i\omega_{\mathbf{p}}[\phi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})]) \\
&= (-\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{p}}) e^{-i(\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}})t} \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} \int_{y^0=t} d^3\mathbf{y} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= (-\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{p}}) e^{-i(\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}})t} \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} e^{i(\mathbf{p} + \mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} \\
&= (-\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{p}}) e^{-i(\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}})t} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.2.23c}$$

従って、先程述べた「Klein-Gordon 方程式を満たす演算子のうち、式(1.2.20a)–(1.2.20c)の同時刻交換関係を満たすものを求めよ」という問題に対する答えは、式(1.2.21)で与えられるスカラー場で、係数演算子 $a(\mathbf{p})$, $a^\dagger(\mathbf{p})$ に対して次の交換関係を満たすもの、という事になります。

$$[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{q})] = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \tag{1.2.24a}$$

$$[a(\mathbf{p}), a(\mathbf{q})] = 0 \tag{1.2.24b}$$

$$[a^\dagger(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{q})] = 0 \tag{1.2.24c}$$

これで問題が解けたので、同時刻でない2点間の場の演算子の交換関係も計算できます。例えば任意の x と y に対して $[\phi(x), \phi(y)]$ を計算すると次の様になります:

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}}} [a(\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}x} + a^\dagger(\mathbf{p})e^{-i\mathbf{p}x}, a(\mathbf{q})e^{i\mathbf{q}y} + a^\dagger(\mathbf{q})e^{-i\mathbf{q}y}] \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}}} ([a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{q})]e^{i\mathbf{p}x - i\mathbf{q}y} + [a^\dagger(\mathbf{p}), a(\mathbf{q})]e^{-i\mathbf{p}x + i\mathbf{q}y}) \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}}} ((2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q})e^{i\mathbf{p}x - i\mathbf{q}y} - (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}} \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{p})e^{-i\mathbf{p}x + i\mathbf{q}y}) \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} (e^{i\mathbf{p}(x-y)} - e^{-i\mathbf{p}(x-y)}) \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} (e^{-i\omega_{\mathbf{p}}(x^0 - y^0)} - e^{+i\omega_{\mathbf{p}}(x^0 - y^0)}) e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})}
\end{aligned}$$

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \operatorname{sgn}(p^0) \delta(p^2 + m^2) e^{ip(x-y)} \quad (1.2.25)$$

但し、2行目と3行目で交換関係(1.2.24a)–(1.2.24c)を使い、4行目で \mathbf{q} 積分を実行し、5行目で2項目だけ $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ と変数変換をして $e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})}$ を括り出しました。最後の等号は等式 $\operatorname{sgn}(p^0) \delta(p^2 + m^2) = \operatorname{sgn}(p^0) \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} (\delta(p^0 - \omega_{\mathbf{p}}) + \delta(p^0 + \omega_{\mathbf{p}})) = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} (\delta(p^0 - \omega_{\mathbf{p}}) - \delta(p^0 + \omega_{\mathbf{p}}))$ に注意して p^0 積分を実行すると5行目に一致する事から分かります。式(1.2.25)の右辺はもはや演算子ではない c 数値の関数である事に注意しましょう*9。この c 数値関数を Pauli-Jordan の交換子関数 (**commutator function**) と呼びます。この交換子関数の満たす性質を2つほど列挙しておきましょう:

① Poincaré 不変性

式(1.2.25)の最後の表式から明らかですが、交換子関数は任意の Poincaré 変換の下で不変です。実際、 Λ^μ_ν を任意の順時固有 Lorentz 変換、 a^μ を任意の定数 4 元ベクトルとすると、次式が成り立ちます:

$$\begin{aligned} [\phi(\Lambda x + a), \phi(\Lambda y + a)] &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \operatorname{sgn}(p^0) \delta(p^2 + m^2) e^{ip((\Lambda x + a) - (\Lambda y + a))} \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \operatorname{sgn}(p^0) \delta(p^2 + m^2) e^{ip(\Lambda(x-y))} \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \operatorname{sgn}(p^0) \delta(p^2 + m^2) e^{i(\Lambda^{-1}p)(x-y)} \\ &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \operatorname{sgn}(q^0) \delta(q^2 + m^2) e^{iq(x-y)} \\ &= [\phi(x), \phi(y)] \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

但し、4番目の等号で変数変換 $p^\mu = \Lambda^\mu_\nu q^\nu$ を行いました。この Poincaré 不変性を利用すると、次の様に交換子関数を便利な基準点 x_{ref}^μ で評価する事が出来ます。まず等式 $[\phi(x), \phi(y)] = [\phi(\Lambda x + a), \phi(\Lambda y + a)]$ で Λ を固定しましょう。 a は任意だったので、この任意性を利用してまず $a = -\Lambda y$ と選ぶと、この等式は $[\phi(x), \phi(y)] = [\phi(\Lambda(x-y)), \phi(0)]$ となります。次に Λ の任意性を利用して Λ を上手く選ぶと、点 $\Lambda(x-y)$ は $(x-y)^2 < 0$ の時は $(\operatorname{sgn}(x^0 - y^0) \sqrt{-(x-y)^2}, 0, 0, 0)$ に、 $(x-y)^2 > 0$ の時は $(0, \sqrt{(x-y)^2}, 0, 0)$ にする事が出来ます (図1.2参照)。結局、式(1.2.25)に対しては次の等式が成り立ちます:

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\phi(x_{\text{ref}}), \phi(0)] \quad (1.2.27)$$

但し、

$$x_{\text{ref}}^\mu = \begin{cases} (\operatorname{sgn}(x^0 - y^0) \sqrt{-(x-y)^2}, 0, 0, 0) & \text{for } (x-y)^2 < 0 \\ (0, \sqrt{(x-y)^2}, 0, 0) & \text{for } (x-y)^2 > 0 \end{cases} \quad (1.2.28)$$

② 微視的因果律 (局所性)

交換子関数(1.2.25)は2点 x と y が空間的に離れている場合はゼロになります。実際、式(1.2.27)と(1.2.28)を使うと、 $(x-y)^2 > 0$ の時は被積分関数がゼロになる事がすぐに分かります:

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= [\phi(x_{\text{ref}}), \phi(0)] \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} (e^{-i\omega_{\mathbf{p}} \cdot 0} - e^{+i\omega_{\mathbf{p}} \cdot 0}) e^{ip^1 \sqrt{(x-y)^2}} \\ &= 0 \quad \text{for } (x-y)^2 > 0 \end{aligned} \quad (1.2.29)$$

この様に空間的に離れた2点で場の演算子が交換する事を微視的因果律 (**microcausality**) とか局所性 (**locality**) と呼びます。

*9 これは自由場の理論特有で、相互作用がある場の理論では一般に交換関係 $[\phi(x), \phi(y)]$ は c 数値関数にはならず、或る演算子になります。一般に、交換関係 $[\phi(x), \phi(y)]$ が c 数値関数になる理論を一般化された自由場の理論 (**generalized free field theory**) と呼びます。自由場の理論と同様、一般化された自由場の理論では Wick の定理が成り立ち、多点の Green 関数は全て2点 Green 関数の積で書けます。(従って、自由場の理論と同様、一般化された自由場の理論では非自明な粒子散乱は起きず、S 行列はスカスカの単位行列になります。一般化された自由場の理論はスペクトル関数だけが非自明な理論です。) 一般化された自由場の理論について述べている教科書はあまり有りませんが、興味のある人は例えば Bogolubov 達の教科書

[1] N. N. Bogolubov, A. A. Logunov, A. I. Oksak, and I. T. Todorov, *General Principles of Quantum Field Theory* (Kluwer Academic Publishers, 1990)

の pp. 351–353 を見てみると良いでしょう。詳しく勉強したい人は Oscar W. Greenberg の原論文

[2] O. W. Greenberg, “Generalized Free Fields and Models of Local Field Theory,” *Ann. Phys.* **16** (1961) 158–176 を読むと良いと思います。

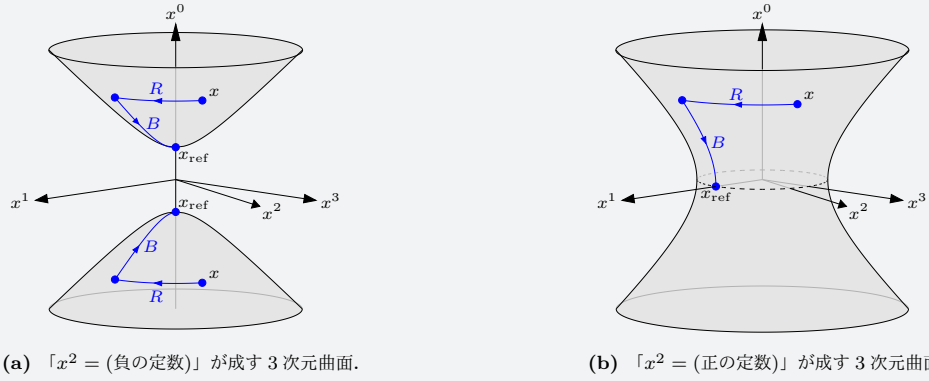


図1.2: $x^2 = -(x^0)^2 + |\mathbf{x}|^2 = (\text{一定})$ の3次元曲面. x^μ が原点から時間的に離れている場合 (即ち $x^2 = (\text{負の定数})$ の場合), この曲面は二葉の3次元双曲空間を成します. 一方, x^μ が原点から空間的に離れている場合 (即ち $x^2 = (\text{正の定数})$ の場合), この曲面は一葉の3次元双曲空間を成します. $x^2 < 0$ の場合は適当な空間回転 R と Lorentz ブースト B を施すことで, 点 x^μ は必ず基準点 $x_{\text{ref}}^\mu = (\text{sgn}(x^0)\sqrt{-x^2}, 0, 0, 0)$ に持って行けます. $x^2 > 0$ の場合も適当な空間回転 R と Lorentz ブースト B を施すことで, 点 x^μ は必ず基準点 $x_{\text{ref}}^\mu = (0, \sqrt{x^2}, 0, 0)$ に持って行けます. (要するに, どちらの場合も必ずある順時固有 Lorentz 変換 $\Lambda = BR$ が存在して $x_{\text{ref}} = \Lambda x$ と書けます.) x^μ を $x^\mu - y^\mu$ に置き換えれば式(1.2.28)が得られます.

以上, 正準量子化の手続きに従って実スカラー場の理論を量子化し, 最終的に交換関係(1.2.24a)–(1.2.24c)を満たす連続無限個の演算子の組 $\{a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p})\}$ を得ました. 次にこれらの演算子が作用する状態ベクトルの空間 (Hilbert 空間) を構成しましょう. $a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p})$ は調和振動子の消滅・生成演算子の類似物なので, 調和振動子の時と同様に次の性質を満たす規格化された状態ベクトル $|0\rangle$ を考えましょう:

$$a(\mathbf{p})|0\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \quad (1.2.30a)$$

$$\langle 0|0\rangle = 1 \quad (1.2.30b)$$

この状態ベクトル $|0\rangle$ を **Fock 真空 (Fock vacuum)** と呼びます. 次にこの Fock 真空 $|0\rangle$ に $a^\dagger(\mathbf{p})$ を作用させた状態 $|\mathbf{p}\rangle$ を考えましょう:

$$|\mathbf{p}\rangle := a^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \quad (1.2.31)$$

容易に分かる様に, この状態ベクトル $|\mathbf{p}\rangle$ は運動量演算子 (momentum operator)

$$P^\mu = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} p^\mu a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) \quad \text{with} \quad p^\mu = (\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) = (\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}, \mathbf{p}) \quad (1.2.32)$$

の固有状態で, その固有値は $p^\mu = (\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$, 特に $p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} > 0$ となります:

$$\begin{aligned} P^\mu |\mathbf{p}\rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}}} q^\mu a^\dagger(\mathbf{q}) a(\mathbf{q}) a^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}}} q^\mu a^\dagger(\mathbf{q}) ([a(\mathbf{q}), a^\dagger(\mathbf{p})] + a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{q})) |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}}} q^\mu a^\dagger(\mathbf{q}) (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}} \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{p}) |0\rangle \\ &= p^\mu a^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle \\ &= p^\mu |\mathbf{p}\rangle \end{aligned} \quad (1.2.33)$$

但し, 3行目で式(1.2.24a)と(1.2.30a)を用いました. 従って, 上の $|\mathbf{p}\rangle$ は特に質量演算子

$$M^2 := -P^\mu P_\mu = (P^0)^2 - \mathbf{P}^2 \quad (1.2.34)$$

の固有状態で, その固有値は $m^2 > 0$ となります:

$$M^2 |\mathbf{p}\rangle = m^2 |\mathbf{p}\rangle \quad (1.2.35)$$

よって, 状態ベクトル $|\mathbf{p}\rangle$ は質量 m , 運動量 p^μ の1粒子状態を記述する事が分かりました. また, 計算の詳細は省きますが, $W^\mu W_\mu$ の固有値を調べるとゼロになります. 従って, 1粒子状態 $|\mathbf{p}\rangle$ のスピン s の大きさは $s = 0$ です. 以上より, 実スカラー場の量子論は質量 m , スピン $s = 0$ の粒子を記述することが分かりました.

さて、一般の n 粒子状態ですが、これは Fock 真空 $|0\rangle$ の上に a^\dagger を n 個作用させて作った状態として構成されます:

$$|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle := a^\dagger(\mathbf{p}_1) \cdots a^\dagger(\mathbf{p}_n)|0\rangle \quad (1.2.36)$$

ここで、任意の $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j$ に対して $a^\dagger(\mathbf{p}_i)$ と $a^\dagger(\mathbf{p}_j)$ は交換するので、上の状態ベクトルも任意の運動量の入れ替えについて対称でなければならない事に注意しましょう。言い換えると、任意の置換 (permutation) σ に対して次が成り立ちます:

$$|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle = |\mathbf{p}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{p}_{\sigma(n)}\rangle, \quad \forall \sigma \in S_n \quad (1.2.37)$$

但し、 S_n は n 次の対称群 (symmetric group) です*10。次に式(1.2.36)で定義された n 粒子状態への a^\dagger と a の作用を調べておきましょう。簡単な計算により次が成り立つ事が分かります:

$$\begin{aligned} a^\dagger(\mathbf{p})|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle &= a^\dagger(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{p}_1) \cdots a^\dagger(\mathbf{p}_n)|0\rangle \\ &= |\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \end{aligned} \quad (1.2.38a)$$

$$\begin{aligned} a(\mathbf{p})|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle &= a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{p}_1) \cdots a^\dagger(\mathbf{p}_n)|0\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) |\mathbf{p}_1, \dots, \hat{\mathbf{p}}_i, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \end{aligned} \quad (1.2.38b)$$

ここで、 $\hat{}$ は除外記号で、 $|\mathbf{p}_1, \dots, \hat{\mathbf{p}}_i, \dots, \mathbf{p}_n\rangle = |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_{i+1}, \dots, \mathbf{p}_n\rangle$ を意味します。また、 m 粒子状態と n 粒子状態の内積は次の様になります:

$$\langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \rangle = \delta_{mn} \sum_{\sigma \in S_n} (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}_1} \delta^3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_{\sigma(1)}) \cdots (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}_m} \delta^3(\mathbf{q}_m - \mathbf{p}_{\sigma(m)}) \quad (1.2.39)$$

この n 粒子状態 $|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle$ を基底ベクトルとして張られる Hilbert 空間を特にボゾンの **Fock 空間 (Fock space)** と呼びます。

伝播関数

次に応用上重要な伝播関数について述べておきましょう。その為に、まず自由場の積 $\phi(x)\phi(y)$ の Fock 真空 $|0\rangle$ に関する真空期待値を計算しておきます。式(1.2.21)(1.2.24a)(1.2.30a)を用いると、任意の x と y に対して次の様に計算されます:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}}} \langle 0 | (a(\mathbf{p})e^{ipx} + a^\dagger(\mathbf{p})e^{-ipx}) (a(\mathbf{q})e^{iqy} + a^\dagger(\mathbf{q})e^{-iqy}) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}}} \langle 0 | a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{q}) | 0 \rangle e^{ipx - iqy} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} e^{ip(x-y)} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \theta(p^0) \delta(p^2 + m^2) e^{ip(x-y)} \end{aligned} \quad (1.2.40)$$

但し、最後の等号で等式 $\theta(p^0)\delta(p^2 + m^2) = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} \delta(p^0 - \omega_{\mathbf{p}})$ を用いました。一般に、このような場の演算子 2 つの積 $\phi(x)\phi(y)$ の真空期待値を **2 点 Wightman 関数 (two-point Wightman function)** と呼びます。今の自由場の理論の場合、2 点 Wightman 関数(1.2.40)は Klein-Gordon 方程式の正エネルギー解であることに注意しましょう。逆に、 $\langle 0 | \phi(y)\phi(x) | 0 \rangle$ は負エネルギー解となっています。

さて、次にこの 2 点 Wightman 関数を用いて次の組み合わせを考えましょう:

$$\Delta_F(x, y) = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y)\phi(x) | 0 \rangle \quad (1.2.41)$$

これを **Feynman 伝播関数 (Feynman propagator)** と呼びます*11。構成から明らかですが、Feynman 伝播関数は $x^0 - y^0 > 0$ の時は Klein-Gordon 方程式の正エネルギー解を伝播させ、 $x^0 - y^0 < 0$ の時は Klein-Gordon 方程式の負エネルギー解を伝播させます。また、容易に確かめる事が出来る様に、Feynman 伝播関数は次の微分方程式の解の 1 つです:

$$(\partial_x^2 - m^2)\Delta_F(x, y) = i\delta^4(x - y) \quad (1.2.42)$$

*10 対称群や置換についてよく知らない人は Wikipedia の記事を読んでおくとい良いでしょう。但し、今後積極的に使っていく訳ではないので、良く分からなくても気にしないで良いです。

*11 Δ_F は一般に Feynman 伝播関数と呼ばれていますが、これを最初に (少なくとも論文の形で) 世に出したのは Richard P. Feynman ではありません。Ernst Stueckelberg と彼の学生 Dominique Rivier が 1948 年に初めて導入しました。次の半ページ論文の D_{κ^c} がそれです:

[1] D. Rivier and E. C. G. Stueckelberg, "A Convergent Expression for the Magnetic Moment of the Neutron," *Phys. Rev.* **74** (1948) 218 [Erratum: *Phys. Rev.* **74** (1948) 986]

こういう歴史的背景があるので、Feynman の名を冠するのを避けて causal propagator とか causal Green's function と呼ぶ人もいます。しかし、これらの呼称は現在の素粒子論業界では決して一般的とは言えないので、このノートでは慣例に従って Feynman 伝播関数と呼ぶことにします。

ここで、記号 $\partial_x^2 = -\partial_{x^0}^2 + \nabla_{\mathbf{x}}^2$ は変数 $x^\mu = (x^0, \mathbf{x})$ に作用する微分です。実際、式(1.2.41)を x^0 で偏微分していくと次の様になります:

$$\begin{aligned}\partial_{x^0}\Delta_F(x, y) &= \delta(x^0 - y^0)\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle + \theta(x^0 - y^0)\langle 0|(\partial_0\phi)(x)\phi(y)|0\rangle \\ &\quad - \delta(y^0 - x^0)\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle + \theta(y^0 - x^0)\langle 0|\phi(y)(\partial_0\phi)(x)|0\rangle \\ &= \delta(x^0 - y^0)\langle 0|[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle + \theta(x^0 - y^0)\langle 0|\Pi(x)\phi(y)|0\rangle + \theta(y^0 - x^0)\langle 0|\phi(y)\Pi(x)|0\rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0)\langle 0|\Pi(x)\phi(y)|0\rangle + \theta(y^0 - x^0)\langle 0|\phi(y)\Pi(x)|0\rangle\end{aligned}\quad (1.2.43a)$$

$$\begin{aligned}\partial_{x^0}^2\Delta_F(x, y) &= \delta(x^0 - y^0)\langle 0|\Pi(x)\phi(y)|0\rangle + \theta(x^0 - y^0)\langle 0|(\partial_0\Pi)(x)\phi(y)|0\rangle \\ &\quad - \delta(y^0 - x^0)\langle 0|\phi(y)\Pi(x)|0\rangle + \theta(y^0 - x^0)\langle 0|\phi(y)(\partial_0\Pi)(x)|0\rangle \\ &= \delta(x^0 - y^0)\langle 0|[\Pi(x), \phi(y)]|0\rangle + \theta(x^0 - y^0)\langle 0|(\partial_0^2\phi)(x)\phi(y)|0\rangle + \theta(y^0 - x^0)\langle 0|\phi(y)(\partial_0^2\phi)(x)|0\rangle \\ &= \delta(x^0 - y^0)(-i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \\ &\quad + \theta(x^0 - y^0)\langle 0|(\nabla_{\mathbf{x}}^2 - m^2)\phi(x)\phi(y)|0\rangle + \theta(y^0 - x^0)\langle 0|\phi(y)(\nabla_{\mathbf{x}}^2 - m^2)\phi(x)|0\rangle \\ &= -i\delta^4(x - y) + (\nabla_{\mathbf{x}}^2 - m^2)\Delta_F(x, y)\end{aligned}\quad (1.2.43b)$$

最後の表式から、 Δ_F は微分方程式(1.2.42)を満たす事が分かります。

最後に Feynman 伝播関数の 4次元 Fourier 積分表示を求めておきましょう。式(1.2.40)3行目の表式を式(1.2.41)に代入すると、 Δ_F は次の様に表されます:

$$\begin{aligned}\Delta_F(x, y) &= \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} e^{-i\omega_{\mathbf{p}}(x^0 - y^0) + i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})} + \theta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} e^{+i\omega_{\mathbf{p}}(x^0 - y^0) - i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \\ &= \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} e^{-i\omega_{\mathbf{p}}(x^0 - y^0) + i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})} + \theta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} e^{+i\omega_{\mathbf{p}}(x^0 - y^0) + i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} e^{+i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \left(\theta(x^0 - y^0) e^{-i\omega_{\mathbf{p}}(x^0 - y^0)} + \theta(y^0 - x^0) e^{+i\omega_{\mathbf{p}}(x^0 - y^0)} \right)\end{aligned}\quad (1.2.44)$$

ここで、階段関数の積分表示^{*12}

$$\theta(\pm x) = \mp \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi i} \frac{e^{-ipx}}{p \pm i\epsilon}\quad (1.2.45)$$

を用いると、式(1.2.44)の括弧の中身は次の様に書けます:

$$\begin{aligned}&\theta(x^0 - y^0) e^{-i\omega_{\mathbf{p}}(x^0 - y^0)} + \theta(y^0 - x^0) e^{+i\omega_{\mathbf{p}}(x^0 - y^0)} \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi i} \left(\frac{e^{-i(p^0 + \omega_{\mathbf{p}})(x^0 - y^0)}}{p^0 + i\epsilon} + \frac{e^{-i(p^0 - \omega_{\mathbf{p}})(x^0 - y^0)}}{p^0 - i\epsilon} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi i} \left(\frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{p^0 - \omega_{\mathbf{p}} + i\epsilon} + \frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{p^0 + \omega_{\mathbf{p}} - i\epsilon} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{-(p^0 + \omega_{\mathbf{p}} - i\epsilon) + (p^0 - \omega_{\mathbf{p}} + i\epsilon)}{(p^0)^2 - (\omega_{\mathbf{p}} - i\epsilon)^2} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{2\omega_{\mathbf{p}}}{-(p^0)^2 + \omega_{\mathbf{p}}^2 - i\epsilon} e^{-ip^0(x^0 - y^0)}\end{aligned}\quad (1.2.46)$$

但し、2番目の等号で1項目に対しては $p^0 \rightarrow p^0 - \omega_{\mathbf{p}}$, 2項目に対しては $p^0 \rightarrow p^0 + \omega_{\mathbf{p}}$ と変数変換しました。 $\omega_{\mathbf{p}}^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2$ に注意すると、最終的に Feynman 伝播関数(1.2.44)は次の様に書ける事が分かります:

$$\begin{aligned}\Delta_F(x, y) &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0) + i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{-(p^0)^2 + |\mathbf{p}|^2 + m^2 - i\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4 i} \frac{e^{ip(x - y)}}{p^2 + m^2 - i\epsilon}\end{aligned}\quad (1.2.47)$$

今後は、 ϵ は最終的にプラス側からゼロに持って行くと理解して単に次の様に書く事にします:

$$\Delta_F(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4 i} \frac{e^{ip(x - y)}}{p^2 + m^2 - i\epsilon}\quad (1.2.48)$$

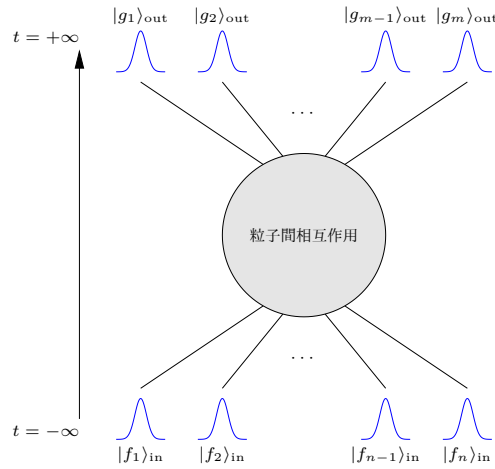
摂動論ではこの Feynman 伝播関数を用いて摂動計算を行っていきます。

^{*12} 記号 $\lim_{\epsilon \downarrow 0}$ は ϵ を上から (プラス側から) ゼロに持って行く極限を表します。逆に下から (マイナス側から) ゼロに持って行く場合は $\lim_{\epsilon \uparrow 0}$ と記します。

1.3 散乱振幅とLSZ公式

前節では実の自由スカラー場の理論について、その基礎的な事柄を見てきました。この節では打って変わって一般の相互作用している場の量子論について考察して行きます。自由場の理論と違って一般には具体的に解く事は出来ませんが、適当な仮定の下、一般の相互作用している場の量子論についても幾つかの重要な事が言えます。この節では、その中でも応用上重要な **Lehmann-Symanzik-Zimmermann** の還元公式 (略して LSZ 公式) について学びます。LSZ 公式は多粒子散乱の遷移振幅 (散乱振幅) に関する公式で、1950 年代に Harry Lehmann, Kurt Symanzik, Wolfhart Zimmermann らによって見出されました。この公式は一言で言えば「散乱振幅は運動量表示 Green 関数の外線をもぎ取ったもので与えられる」という事を主張するもので、散乱振幅が知りたければ運動量表示 Green 関数を求めれば良いという事を教えてくれる強力な公式です。

以下ではこの LSZ 公式を導出します。考察するのは $t \rightarrow -\infty$ の無限の過去では n 個の自由粒子の波束 f_1, \dots, f_n から成っていた状態 $|f_1, \dots, f_n\rangle_{\text{in}}$ が、 $t \rightarrow +\infty$ の無限の未来で m 個の自由粒子の波束 g_1, \dots, g_m から成る状態 $|g_1, \dots, g_m\rangle_{\text{out}}$ として見出される確率振幅です。図で表すと大体次の様な状況を想定しています：



以下ではまず場の量子論で波束をどうやって表すか、という話から始めましょう。簡単の為、この節でも実のスカラー場の理論で考えて行く事にします。

1.3.1 粒子の波束

前節で実の自由スカラー場の理論を正準量子化し、状態ベクトル $|\mathbf{p}\rangle = a^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ が質量演算子 $M^2 = -P^\mu P_\mu$ の離散固有値 m^2 に属する固有ベクトルで、かつ $P^0 > 0$ の 1 粒子状態である事を見ました。但し、この節ではこの 1 粒子状態は殆ど使いません。以下では、運動量空間で局在している適当な関数 $\tilde{f}(\mathbf{p})$ を 1 つ用意して、この $\tilde{f}(\mathbf{p})$ を重みとしてありとあらゆる \mathbf{p} について $|\mathbf{p}\rangle$ を重ね合わせた波束の状態 $|f\rangle$ を考えます：

$$|f\rangle := \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \tilde{f}(\mathbf{p}) |\mathbf{p}\rangle \quad (1.3.1)$$

この様にして構成した状態 $|f\rangle$ も質量演算子の離散固有値 m^2 に属する固有ベクトルで、且つ $P^0 > 0$ である事に注意しましょう。従って、 $|f\rangle$ も 1 粒子状態の 1 つです。

さて、上の 1 粒子状態 $|f\rangle$ は次の様にも書けます：

$$|f\rangle = a^\dagger(f)|0\rangle \quad (1.3.2)$$

ここで、 $a^\dagger(f)$ は $\tilde{f}(\mathbf{p})$ を重みとしてありとあらゆる \mathbf{p} について生成演算子 $a^\dagger(\mathbf{p})$ を重ね合わせた波束の生成演算子で、次式で定義されます：

$$\begin{aligned} a^\dagger(f) &:= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \tilde{f}(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{p}) \\ &= -i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

但し, $f(x)$ は正エネルギーの質量核上に制限した $\tilde{f}(p)$ の 4 次元 Fourier 変換で, 次式で定義されます:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \theta(p^0) \delta(p^2 + m^2) \tilde{f}(p) e^{ipx} \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \tilde{f}(p) e^{ipx} \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

最後の等号は, $\theta(p^0) \delta(p^2 + m^2) = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} \delta(p^0 - \omega_{\mathbf{p}})$ に注意して p^0 積分を実行すれば直ぐに分かります. また, 式(1.3.3)の 2 番目の等号は, 式(1.2.22b)1 行目に注意して式(1.3.4)の最後の表式を式(1.3.3)の最後の表式に代入すれば直ぐに示せます. 式(1.3.4)の $f(x)$ は Klein-Gordon 方程式の正エネルギー解である事に注意しましょう.

同様に, $\tilde{f}(p)$ を重みとしてありとあらゆる \mathbf{p} について $a(\mathbf{p})$ を重ね合わせた波束の消滅演算子を導入しておきましょう:

$$\begin{aligned} a(f) &:= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \tilde{f}^*(p) a(\mathbf{p}) \\ &= +i \int_{x^0=t} d^3 \mathbf{x} f^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

この様にして構成した $a(f)$ と $a^\dagger(f)$ は次の交換関係を満たします:

$$\begin{aligned} [a(f), a^\dagger(g)] &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}}} \tilde{f}^*(p) \tilde{g}(q) [a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{q})] \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \tilde{f}^*(p) \tilde{g}(p) \\ &= (f, g) \end{aligned} \quad (1.3.6a)$$

$$\begin{aligned} [a(f), a(g)] &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}}} \tilde{f}^*(p) \tilde{g}^*(q) [a(\mathbf{p}), a(\mathbf{q})] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.3.6b)$$

$$\begin{aligned} [a^\dagger(f), a^\dagger(g)] &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}}} \tilde{f}(p) \tilde{g}(q) [a^\dagger(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{q})] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.3.6c)$$

但し, 記号 (\cdot, \cdot) は次式で定義される関数 f と g の間の内積です:

$$\begin{aligned} (f, g) &:= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \theta(p^0) \delta(p^2 + m^2) \tilde{f}^*(p) \tilde{g}(p) \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \tilde{f}^*(p) \tilde{g}(p) \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

さて, 前節で n 粒子状態を $|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle = a^\dagger(\mathbf{p}_1) \dots a^\dagger(\mathbf{p}_n)|0\rangle$ として導入しましたが, 同様に n 個の波束から成る状態 $|f_1, \dots, f_n\rangle$ を次式で定義しましょう:

$$\begin{aligned} |f_1, \dots, f_n\rangle &:= a^\dagger(f_1) \dots a^\dagger(f_n)|0\rangle \\ &= \left[\prod_{j=1}^n \int \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^3} \theta(p_j^0) \delta(p_j^2 + m^2) \tilde{f}_j(p_j) \right] |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

この状態への $a(f)$, $a^\dagger(f)$ の作用は次のようになります:

$$\begin{aligned} a^\dagger(f)|f_1, \dots, f_n\rangle &= a^\dagger(f) a^\dagger(f_1) \dots a^\dagger(f_n)|0\rangle \\ &= |f, f_1, \dots, f_n\rangle \end{aligned} \quad (1.3.9a)$$

$$\begin{aligned} a(f)|f_1, \dots, f_n\rangle &= a(f) a^\dagger(f_1) \dots a^\dagger(f_n)|0\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n (f, f_j) |f_1, \dots, \hat{f}_j, \dots, f_n\rangle \end{aligned} \quad (1.3.9b)$$

まず式(1.3.9a)は定義(1.3.8)から従います. 式(1.3.9b)は交換関係(1.3.6a), 若しくは式(1.3.3)と(1.3.5)それぞれの 1 行目の表式と式(1.2.38b)から従います. 最後に, n 個の波束の状態と m 個の波束の状態の内積は次のようになります:

$$(g_1, \dots, g_m | f_1, \dots, f_n) = \delta_{mn} \sum_{\sigma \in S_n} (g_1, f_{\sigma(1)}) \dots (g_n, f_{\sigma(n)}) \quad (1.3.10)$$

これも交換関係(1.3.6a), 若しくは式(1.2.39)から従います。

以上で準備が終わりました。上の議論は全て自由場の理論の場合ですが, 以下ではこれを一般の相互作用をしているスカラー場の理論へ拡張して行きましょう。その為にまず漸近条件について解説します。

1.3.2 漸近条件

次に, 一般の相互作用している実スカラー場 $\phi(x)$ の理論を考えましょう。まず, 自由場の理論の場合(1.3.3)と(1.3.5)に倣って次の演算子を導入します:

$$a(f; t) := +i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} f^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \quad (1.3.11a)$$

$$a^\dagger(f; t) := -i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} f(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \quad (1.3.11b)$$

この演算子 $a(f; t)$ と $a^\dagger(f; t)$ は $\phi(x)$ が Klein-Gordon 方程式の解でない限り, 一般に時刻 t に依存します。実際, $a(f; t)$ の t 微分を計算すると次の様になります:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a(f; t) &= +i \frac{d}{dt} \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} f^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \\ &= +i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} \partial_0 (f^*(x) \partial_0 \phi(x) - (\partial_0 f^*(x)) \phi(x)) \\ &= +i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} (f^*(x) \partial_0^2 \phi(x) - (\partial_0^2 f^*(x)) \phi(x)) \\ &= +i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} (f^*(x) \partial_0^2 \phi(x) - ((\nabla^2 - m^2) f^*(x)) \phi(x)) \\ &= +i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} (f^*(x) \partial_0^2 \phi(x) - f^*(x) (\nabla^2 - m^2) \phi(x)) \\ &= +i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} f^*(x) (\partial_0^2 - \nabla^2 + m^2) \phi(x) \\ &= +i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} f^*(x) (-\partial^2 + m^2) \phi(x) \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

但し, 4行目で $f^*(x)$ が Klein-Gordon 方程式 $(\partial_0^2 - \nabla^2 + m^2) f^*(x) = 0$ を満たす事を使い, 5行目で空間微分 ∇ に関して2回部分積分を行って $(\nabla^2 f^*)\phi$ を $f^*(\nabla^2 \phi)$ に書き換えました。部分積分をすると表面項が出て来ますが, $f(x)$ が無限遠で充分速くゼロに収束するとして表面項は捨てました。同様にして, $a^\dagger(f; t)$ の t 微分を計算すると次の様になります:

$$\frac{d}{dt} a^\dagger(f; t) = -i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} f(x) (-\partial^2 + m^2) \phi(x) \quad (1.3.13)$$

従って, $a(f; t)$ と $a^\dagger(f; t)$ 共に, スカラー場が $(-\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0$ を満たさない限り時刻 t に依存する事が分かりました。

さて, 自由場の理論の時とは異なり, 上で定義した $a^\dagger(f; t)$, $a(f; t)$ は一般には1粒子状態の生成・消滅演算子ではありません。しかし, 無限の過去・無限の未来では散乱過程に登場する粒子たちは互いに十分速くまで離れる筈なので, 粒子間相互作用が局所的な理論ならば $t \rightarrow \mp\infty$ では自由粒子として振る舞う筈です。従って, $t \rightarrow \mp\infty$ の極限では, 演算子 $a^\dagger(f; t)$, $a(f; t)$ はこの自由粒子1個の波束の生成・消滅演算子に漸近すると期待して良いでしょう。この素朴な物理的期待の下, 以下では次の仮定を置きます:

仮定 1: 漸近条件

或る自由場 $\phi_{\text{in}}(x)$ と $\phi_{\text{out}}(x)$ が存在して, $t \rightarrow \mp\infty$ の極限で $a(f; t)$ と $a^\dagger(f; t)$ は (行列要素が収束するという意味で) 次の演算子 $a_{\text{in}}(f)$, $a_{\text{out}}(f)$, $a_{\text{in}}^\dagger(f)$, $a_{\text{out}}^\dagger(f)$ に収束する:^{*13}

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \alpha | a(f; t) | \beta \rangle = \langle \alpha | a_{\text{in}}(f) | \beta \rangle \quad (1.3.14a)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \alpha | a(f; t) | \beta \rangle = \langle \alpha | a_{\text{out}}(f) | \beta \rangle \quad (1.3.14b)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \alpha | a^\dagger(f; t) | \beta \rangle = \langle \alpha | a_{\text{in}}^\dagger(f) | \beta \rangle \quad (1.3.14c)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \alpha | a^\dagger(f; t) | \beta \rangle = \langle \alpha | a_{\text{out}}^\dagger(f) | \beta \rangle \quad (1.3.14d)$$

ここで, $|\alpha\rangle$ と $|\beta\rangle$ は任意の状態ベクトルで, $a_{\text{as}}(f)$ と $a_{\text{as}}^\dagger(f)$ ($\text{as} = \text{in}, \text{out}$) は次式で定義される演算子である:

$$a_{\text{as}}(f) = +i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} f(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{\text{as}}(x) \quad (1.3.15a)$$

$$a_{\text{as}}^\dagger(f) = -i \int_{x^0=t} d^3\mathbf{x} f^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{\text{as}}(x) \quad (1.3.15b)$$

但し, $\phi_{\text{as}}(x)$ は Klein-Gordon 方程式および同時刻交換関係を満たす.*14

$$(\partial^2 - m^2)\phi_{\text{as}}(x) = 0 \quad (1.3.16a)$$

$$[\phi_{\text{as}}(t, \mathbf{x}), (\partial_0 \phi_{\text{as}})(t, \mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\phi_{\text{as}}(t, \mathbf{x}), \phi_{\text{as}}(t, \mathbf{y})] = 0, \quad [(\partial_0 \phi_{\text{as}})(t, \mathbf{x}), (\partial_0 \phi_{\text{as}})(t, \mathbf{y})] = 0 \quad (1.3.16b)$$

上の仮定で登場した 2 つの自由場 ϕ_{in} と ϕ_{out} を漸近場 (asymptotic field) と呼び, 上の仮定を漸近条件 (asymptotic condition) と呼びます. 以下ではこの漸近条件を仮定して, 多粒子散乱の散乱振幅が Green 関数を用いて書き表される事を示します.

1.3.3 実スカラー場の LSZ 公式

それではいよいよ散乱振幅の計算に移りましょう. 以下では始状態として n 個の粒子の波束から成る状態 $|f_1, \dots, f_n\rangle_{\text{in}}$, 終状態として m 個の粒子の波束から成る状態 $|g_1, \dots, g_m\rangle_{\text{out}}$ を考えます. これらは次式で定義されます:

$$|f_1, \dots, f_n\rangle_{\text{in}} := a_{\text{in}}^\dagger(f_1) \cdots a_{\text{in}}^\dagger(f_n) |0\rangle \quad (1.3.17a)$$

$$|g_1, \dots, g_m\rangle_{\text{out}} := a_{\text{out}}^\dagger(g_1) \cdots a_{\text{out}}^\dagger(g_m) |0\rangle \quad (1.3.17b)$$

これから求めたいのはこの始状態から終状態への遷移振幅です. これは次の内積で与えられます:

$$\langle g_1, \dots, g_m | f_1, \dots, f_n \rangle_{\text{in}} \quad (1.3.18)$$

以下ではこの内積を計算して行きたい訳ですが, ここでもう 1 つ重要な仮定を置きます. それは, 始状態と終状態で波束の重なりは無い, という仮定です. これは次の様に表されます:

仮定 2: 始状態と終状態で波束の重なりは無い

始状態 $|f_1, \dots, f_n\rangle_{\text{in}}$ は終状態の波束を含まず, 終状態 $|g_1, \dots, g_m\rangle_{\text{out}}$ は始状態の波束を含まない. 即ち, 任意の g_i と f_i に対して次が成り立つ:

$$a_{\text{in}}(g_i) |f_1, \dots, f_n\rangle_{\text{in}} = 0 \quad (1.3.19a)$$

$$a_{\text{out}}(f_i) |g_1, \dots, g_m\rangle_{\text{out}} = 0 \quad (1.3.19b)$$

式(1.3.9b)より, この条件は任意の f_i と g_j が内積(1.3.7)に関して直交する事, 即ち, 次の条件と等価:

$$(f_i, g_j) = 0 \quad \text{for any } i, j \quad (1.3.20)$$

以上の仮定の下, 散乱振幅を計算して行きましょう. まず, $\langle g_1, g_2, \dots, g_m | = \langle g_2, \dots, g_m | a_{\text{out}}(g_1)$ として式(1.3.18)を計算して行くと次の様に変形できます:

$$\begin{aligned} \langle g_1, \dots, g_m | f_1, \dots, f_n \rangle_{\text{in}} &= \langle g_2, \dots, g_m | a_{\text{out}}(g_1) |f_1, \dots, f_n\rangle_{\text{in}} \\ &= \langle g_2, \dots, g_m | (a_{\text{out}}(g_1) - a_{\text{in}}(g_1)) |f_1, \dots, f_n\rangle_{\text{in}} \\ &= \langle g_2, \dots, g_m | (a(g_1; \infty) - a(g_1; -\infty)) |f_1, \dots, f_n\rangle_{\text{in}} \end{aligned}$$

*13 行列要素で収束する事を数学用語で弱収束 (weak convergence) と呼びます. 一般に, 演算子 $\mathcal{O}(t)$ が $t \rightarrow \infty$ で \mathcal{O} に収束すると言った時, 収束の仕方には次の 3 通りあります:

(1) 演算子ノルムで収束するノルム収束: $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathcal{O}(t) - \mathcal{O}\| = 0$

(2) ベクトルのノルムで収束する強収束: $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathcal{O}(t)|\alpha\rangle - \mathcal{O}|\alpha\rangle\| = 0$

(3) 行列要素で収束する弱収束: $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \alpha | (\mathcal{O}(t) - \mathcal{O}) | \beta \rangle = 0$

但し, $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ は任意のベクトルです. 名前の通り弱収束が一番条件が弱く, 次に強収束で, ノルム収束が一番条件が強いです. 例えば, 強収束するなら弱収束する事が簡単に言えますが, 逆は一般に成り立ちません. 漸近条件を弱収束以外の収束でやってしまうと矛盾が起こる事が知られていますが, これは少し難しいので, ここでは上の漸近条件を一旦認めて議論を進めて行く事にしましょう. 上の漸近条件が天下りで気持ち悪いと思う人は, この辺の話の基礎付けを与える Haag-Ruelle 散乱理論 (Haag-Ruelle scattering theory) という理論があるので, それを勉強すると良いかもしれません. (但し, とても難しいのでお薦めはしません.) Haag-Ruelle 散乱理論を物理の学生向けに解説した教科書は殆どありませんが, 次の Anthony Duncan の教科書の第 9 章 9.3 節には載っている興味のある人は見てみると良いでしょう:

[1] A. Duncan, *The Conceptual Framework of Quantum Field Theory* (Oxford University Press, 2012)

他にも Haag-Ruelle 散乱理論を解説した教科書はありますが, その殆どが数理解物本なのでここでは挙げない事にします.

*14 同時刻交換関係の代わりに $[\phi_{\text{as}}(x), \phi_{\text{as}}(y)]$ が Pauli-Jordan の交換子関数(1.2.25)になると言っても良いですが, ここではより馴染みがある同時刻交換関係にしておきました.

$$\begin{aligned}
&= \text{out} \langle g_2, \dots, g_m | \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{d}{dt} a(g_1; t) | f_1, \dots, f_n \rangle_{\text{in}} \\
&= \text{out} \langle g_2, \dots, g_m | i \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{x_1^0=t} d^3 \mathbf{x}_1 g_1^*(x_1) (-\partial_{x_1}^2 + m^2) \phi(x_1) | f_1, \dots, f_n \rangle_{\text{in}} \\
&= i \int d^4 x_1 g_1^*(x_1) (-\partial_{x_1}^2 + m^2) \text{out} \langle g_2, \dots, g_m | \phi(x_1) | f_1, \dots, f_n \rangle_{\text{in}} \tag{1.3.21}
\end{aligned}$$

但し、2行目で波束の重なりは無いという仮定(1.3.19a)を使い、3行目で漸近条件(1.3.14a)と(1.3.14b)を使い、5行目では式(1.3.12)を使いました。続いて最後の行列要素 $\text{out} \langle g_2, \dots, g_m | \phi(x_1) | f_1, \dots, f_n \rangle_{\text{in}}$ を書き直しましょう。 $|f_1, f_2, \dots, f_n\rangle_{\text{in}} = a_{\text{in}}^\dagger(f_1) |f_2, \dots, f_n\rangle_{\text{in}}$ 及び波束の重なりは無いという仮定(1.3.19b)を使うと次の様に書き換える事が出来ます:

$$\begin{aligned}
\text{out} \langle g_2, \dots, g_m | \phi(x_1) | f_1, \dots, f_n \rangle_{\text{in}} &= \text{out} \langle g_2, \dots, g_m | \phi(x_1) a_{\text{in}}^\dagger(f_1) | f_2, \dots, f_n \rangle_{\text{in}} \\
&= -\text{out} \langle g_2, \dots, g_m | \left(a_{\text{out}}^\dagger(f_1) \phi(x_1) - \phi(x_1) a_{\text{in}}^\dagger(f_1) \right) | f_2, \dots, f_n \rangle_{\text{in}} \tag{1.3.22}
\end{aligned}$$

ここで、漸近条件の仮定の下、一般に次の等式が成り立ちます:

$$\begin{aligned}
&\langle \alpha | \left(a_{\text{out}}(f) \text{T}\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} - \text{T}\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} a_{\text{in}}(f) \right) | \beta \rangle \\
&= +i \int d^4 x f^*(x) (-\partial_x^2 + m^2) \langle \alpha | \text{T}\{\phi(x) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} | \beta \rangle \tag{1.3.23a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle \alpha | \left(a_{\text{out}}^\dagger(f) \text{T}\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} - \text{T}\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} a_{\text{in}}^\dagger(f) \right) | \beta \rangle \\
&= -i \int d^4 x f(x) (-\partial_x^2 + m^2) \langle \alpha | \text{T}\{\phi(x) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} | \beta \rangle \tag{1.3.23b}
\end{aligned}$$

但し、 $|\alpha\rangle$ と $|\beta\rangle$ は任意の状態ベクトルです。また、 $\text{T}\{\dots\}$ は時間順序積 (time-ordered product) で、次式で定義されます:

$$\text{T}\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} := \sum_{\sigma \in S_n} \theta(x_{\sigma(1)}^0 - x_{\sigma(2)}^0) \theta(x_{\sigma(2)}^0 - x_{\sigma(3)}^0) \cdots \theta(x_{\sigma(n-1)}^0 - x_{\sigma(n)}^0) \phi(x_{\sigma(1)}) \cdots \phi(x_{\sigma(n)}) \tag{1.3.24}$$

まず、式(1.3.23a)を示しましょう。次の様に直接計算で示す事が出来ます:

$$\begin{aligned}
&\text{式(1.3.23a)の左辺} = \langle \alpha | \left(a_{\text{out}}(f) \text{T}\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} - \text{T}\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} a_{\text{in}}(f) \right) | \beta \rangle \\
&= \langle \alpha | \left(a(f; \infty) \text{T}\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} - \text{T}\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} a(f; -\infty) \right) | \beta \rangle \\
&= \langle \alpha | \left(\text{T}\{a(f; \infty) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} - \text{T}\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n) a(f; -\infty)\} \right) | \beta \rangle \\
&= \langle \alpha | \left(\text{T}\{a(f; \infty) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} - \text{T}\{a(f; -\infty) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} \right) | \beta \rangle \\
&= \langle \alpha | \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\partial}{\partial t} \text{T}\{a(f; t) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} | \beta \rangle \\
&= \langle \alpha | \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\partial}{\partial t} \text{T} \left\{ i \int_{x^0=t} d^3 \mathbf{x} (f^*(x) \partial_{x^0} \phi(x) - (\partial_{x^0} f^*(x)) \phi(x)) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \right\} | \beta \rangle \\
&= \langle \alpha | i \int d^4 x \partial_{x^0} (f^*(x) \text{T}\{\partial_{x^0} \phi(x) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\}) - (\partial_{x^0} f^*(x)) \text{T}\{\phi(x) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} | \beta \rangle \\
&= \langle \alpha | i \int d^4 x \partial_{x^0} (f^*(x) \partial_{x^0} \text{T}\{\phi(x) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\}) - (\partial_{x^0} f^*(x)) \text{T}\{\phi(x) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} | \beta \rangle \\
&= \langle \alpha | i \int d^4 x (f^*(x) \partial_{x^0}^2 \text{T}\{\phi(x) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\}) - (\partial_{x^0}^2 f^*(x)) \text{T}\{\phi(x) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} | \beta \rangle \\
&= \langle \alpha | i \int d^4 x (f^*(x) \partial_{x^0}^2 \text{T}\{\phi(x) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\}) - ((\nabla_{\mathbf{x}}^2 - m^2) f^*(x)) \text{T}\{\phi(x) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} | \beta \rangle \\
&= \langle \alpha | i \int d^4 x (f^*(x) \partial_{x^0}^2 \text{T}\{\phi(x) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\}) - f^*(x) (\nabla_{\mathbf{x}}^2 - m^2) \text{T}\{\phi(x) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} | \beta \rangle \\
&= \langle \alpha | i \int d^4 x f^*(x) (\partial_{x^0}^2 - \nabla_{\mathbf{x}}^2 + m^2) \text{T}\{\phi(x) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} | \beta \rangle \\
&= i \int d^4 x f^*(x) (-\partial_x^2 + m^2) \langle \alpha | \text{T}\{\phi(x) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} | \beta \rangle \tag{1.3.25}
\end{aligned}$$

但し、2行目で漸近条件を使い、3行目で演算子の積 $a(f; \infty) \text{T}\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\}$ と $\text{T}\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} a(f; -\infty)$ が共に時間順序になっている事から、 $a(f; \pm\infty)$ を時間順序積の中に入れました。4行目では時間順序積の中では演算子順序を入れ替えても良いことを使い、6行目では式(1.3.11a)を使いました。また、8番目の等号では $\text{T}\{\partial_{x^0} \phi(x) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} = \partial_{x^0} \text{T}\{\phi(x) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\}$ を使

いました。これは微視的因果律 $\delta(x^0 - x_i^0)[\phi(x), \phi(x_i)] = 0$ から従います*15。残りの計算は式(1.3.12)の箇所でやった計算と同じなので説明は省略します。全く同様に式(1.3.23b)も示す事が出来て、これより行列要素(1.3.22)は次の様に書ける事が分かります:

$$\text{out}\langle g_2, \dots, g_m | \phi(x_1) | f_1, \dots, f_n \rangle_{\text{in}} = i \int d^4 y_1 f_1(y_1) (-\partial_{y_1}^2 + m^2) \text{out}\langle g_2, \dots, g_m | T\{\phi(x_1)\phi(y_1)\} | f_2, \dots, f_n \rangle_{\text{in}} \quad (1.3.26)$$

従って、散乱振幅(1.3.21)は次の様になります:

$$\begin{aligned} \text{out}\langle g_1, \dots, g_m | f_1, \dots, f_n \rangle_{\text{in}} &= i^2 \int d^4 x_1 \int d^4 y_1 g_1^*(x_1) f_1(y_1) \\ &\quad \times (-\partial_{x_1}^2 + m^2) (-\partial_{y_1}^2 + m^2) \text{out}\langle g_2, \dots, g_m | T\{\phi(x_1)\phi(y_1)\} | f_2, \dots, f_n \rangle_{\text{in}} \end{aligned} \quad (1.3.27)$$

以上の操作を続けて行くと、最終的に次の表式に辿り着きます:

$$\begin{aligned} \text{out}\langle g_1, \dots, g_m | f_1, \dots, f_n \rangle_{\text{in}} &= i^{m+n} \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_m \int d^4 y_1 \dots \int d^4 y_n g_1^*(x_1) \dots g_m^*(x_m) f_1(y_1) \dots f_n(y_n) \\ &\quad \times (-\partial_{x_1}^2 + m^2) \dots (-\partial_{y_n}^2 + m^2) \langle 0 | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_m) \phi(y_1) \dots \phi(y_n)\} | 0 \rangle \\ &= \left[\prod_{j=1}^m \int \frac{d^4 q_j}{(2\pi)^3} \theta(q_j^0) \delta(q_j^2 + m^2) \tilde{g}_j^*(q_j) \right] \left[\prod_{j=1}^n \int \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^3} \theta(p_j^0) \delta(p_j^2 + m^2) \tilde{f}_j(p_j) \right] \\ &\quad \times \text{out}\langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \rangle_{\text{in}} \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

但し、 $\text{out}\langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \rangle_{\text{in}}$ は波束の詳細に依存しない量で、次式で与えられます:

$$\begin{aligned} \text{out}\langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \rangle_{\text{in}} &= i^{m+n} \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_m \int d^4 y_1 \dots \int d^4 y_n e^{-i(q_1 x_1 + \dots + q_m x_m) + i(p_1 y_1 + \dots + p_n y_n)} \\ &\quad \times (-\partial_{x_1}^2 + m^2) \dots (-\partial_{y_n}^2 + m^2) \langle 0 | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_m) \phi(y_1) \dots \phi(y_n)\} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (1.3.29)$$

式(1.3.28)の2番目の等号は、Klein-Gordon 方程式の正エネルギー解(1.3.4)の1行目の表式を式(1.3.28)1行目の表式に代入すれば直ぐに分かります。式(1.3.28)や(1.3.29)に出て来た時間順序積の真空期待値を **Green 関数 (Green's function)** と呼び、以下で定義されます:

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &:= \langle 0 | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \dots \int \frac{d^4 p_n}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) \tilde{G}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

但し、 $\tilde{G}^{(n)}$ は $G^{(n)}$ の Fourier 変換から運動量保存のデルタ関数 $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n)$ を取り除いたもの*16で、運動量表示 Green 関数と呼びます。この運動量表示 Green 関数を用いると、式(1.3.29)は結局次の様に表せます:

$$\begin{aligned} &\text{out}\langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \rangle_{\text{in}} \\ &= i^{m+n} \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_m \int d^4 y_1 \dots \int d^4 y_n e^{-i(q_1 x_1 + \dots + q_m x_m) + i(p_1 y_1 + \dots + p_n y_n)} \\ &\quad \times (-\partial_{x_1}^2 + m^2) \dots (-\partial_{y_n}^2 + m^2) \int \frac{d^4 q'_1}{(2\pi)^4} \dots \int \frac{d^4 q'_m}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p'_1}{(2\pi)^4} \dots \int \frac{d^4 p'_n}{(2\pi)^4} \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(q'_1 + \dots + q'_m + p'_1 + \dots + p'_n) \tilde{G}^{(m+n)}(q'_1, \dots, q'_m, p'_1, \dots, p'_n) e^{i(q'_1 x_1 + \dots + q'_m x_m + p'_1 y_1 + \dots + p'_n y_n)} \\ &= \left[\prod_{j=1}^m \int \frac{d^4 q'_j}{(2\pi)^4} \int d^4 x_j e^{i(q'_j - q_j) x_j} \right] \left[\prod_{j=1}^n \int \frac{d^4 p'_j}{(2\pi)^4} \int d^4 y_j e^{i(p'_j + p_j) y_j} \right] \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(q'_1 + \dots + q'_m + p'_1 + \dots + p'_n) \left[\prod_{j=1}^m i(q_j'^2 + m^2) \right] \left[\prod_{j=1}^n i(p_j'^2 + m^2) \right] \tilde{G}^{(m+n)}(q'_1, \dots, q'_m, p'_1, \dots, p'_n) \\ &= \left[\prod_{j=1}^m \int d^4 q'_j \delta^4(q'_j - q_j) \right] \left[\prod_{j=1}^n \int d^4 p'_j \delta^4(p'_j + p_j) \right] \end{aligned}$$

*15 明確に述べませんでしたが、微視的因果律は一般に成り立つとしています。

*16 次節の式(1.4.8)で示す様に、並進対称性の帰結として座標表示 Green 関数 $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ の Fourier 変換は必ず運動量保存のデルタ関数 $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n)$ を含みます。ここでは、その事を先取りして運動量表示 Green 関数 $\tilde{G}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ を式(1.3.30)の様に定義しています。但し、 $n=2$ の場合は式(1.4.30a)(1.4.30b)の様にデルタ関数は積分してしまって $G^{(2)}(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{G}^{(2)}(p) e^{ipx}$ と書く事にします。

$$\begin{aligned}
& \times (2\pi)^4 \delta^4(q'_1 + \cdots + q'_m + p'_1 + \cdots + p'_n) \left[\prod_{j=1}^m i(q_j'^2 + m^2) \right] \left[\prod_{j=1}^n i(p_j'^2 + m^2) \right] \tilde{G}^{(m+n)}(q'_1, \dots, q'_m, p'_1, \dots, p'_n) \\
& = (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + \cdots + q_m - p_1 - \cdots - p_n) \left[\prod_{j=1}^m i(q_j^2 + m^2) \right] \left[\prod_{j=1}^n i(p_j^2 + m^2) \right] \tilde{G}^{(m+n)}(q_1, \dots, q_m, -p_1, \dots, -p_n) \quad (1.3.31)
\end{aligned}$$

但し、3番目の等号で x_j 積分, y_j 積分を実行してデルタ関数を出し、最後の等号で q'_j 積分, p'_j 積分を実行しました。式(1.3.28), 式(1.3.29), 式(1.3.31)を総称して **Lehmann-Symanzik-Zimmermann** の還元公式 (略して LSZ 公式) と呼びます。式(1.3.31)最終行のデルタ関数は散乱前後での運動量保存 $p_1 + \cdots + p_n = q_1 + \cdots + q_m$ を表している事に注意しましょう。

以上、計算が長くなりましたが、散乱振幅は結局運動量表示 Green 関数で与えられる事が分かりました。実際、特定の波束の始状態 $|f_1, \dots, f_n\rangle_{\text{in}}$ から特定の波束の終状態 $|g_1, \dots, g_m\rangle_{\text{out}}$ への遷移振幅は式(1.3.31)を式(1.3.28)へ代入すれば得られます。但し、実際の加速器実験で行っている散乱実験は粒子ビームを衝突させるもので、個々の波束を逐一追ったりはしません。粒子ビームの衝突実験で重要な物理量は散乱断面積ですが、これを計算する時は波束に関する情報は必要なく、式(1.3.31)から得られる、という事を強調しておきましょう。

1.4 生成汎関数

LSZ 公式により運動量表示 Green 関数さえ分かれば散乱振幅が得られることが分かりましたが、1つだけ前節では明確に述べなかった事があります。それは、式(1.3.28)の因子 $\theta(q_j^0)\delta(q_j^2 + m^2)$ と $\theta(p_j^0)\delta(p_j^2 + m^2)$ のおかげで、入射粒子と放射粒子の運動量は全て正エネルギーの質量核上にある、という事です。従って、式(1.3.31)の q_j と p_j は全て質量核条件 $q_j^2 + m^2 = 0$ と $p_j^2 + m^2 = 0$ を満たし、よって式(1.3.31)は一見するとゼロになる様に見えます。しかし実際は勿論ゼロにはなりません。それは、運動量表示 Green 関数を質量核近傍で展開すると、一般に次の様な極を持つからです:

$$\tilde{G}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \frac{\tilde{G}_{\text{amp}}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)}{i(p_1^2 + m^2) \cdots i(p_n^2 + m^2)} + (\text{less singular}) \quad (1.4.1)$$

式(1.3.31)では分母と分子で因子 $[\prod_j i(q_j^2 + m^2)][\prod_j i(p_j^2 + m^2)]$ が相殺して、散乱振幅に効くのは留数部分 $\tilde{G}_{\text{amp}}^{(n+m)}(q_1, \dots, -p_n)$ のみとなります。この留数部分は運動量表示 Green 関数から外線の Feynman 伝播関数をもぎ取った (amputate した) ものです。

この節では、この様な Green 関数の構造についてももう少し詳しく調べて行きます。今から見て行く様に、Green 関数には基本的なパーツがあって、任意の Green 関数は連結 2 点 Green 関数と頂点関数から構成されている事が言えます。そして、上の $\tilde{G}_{\text{amp}}^{(n)}$ は頂点関数と内線の連結 2 点 Green 関数だけから成っている事が言えます。以下、この事を生成汎関数を用いて見て行きましょう。この節でも簡単のため実スカラー場の理論だけを扱う事にします。

1.4.1 Green 関数の生成汎関数

まずは Green 関数の生成汎関数から始めます。前節でも登場しましたが、Green 関数は次の時間順序積の真空期待値で定義されます:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} | 0 \rangle \quad (1.4.2)$$

この Green 関数が全て分かったとして、次の級数で定義される実の c 数値関数 (いわゆる外場) $J(x)$ の汎関数 $Z[J]$ を考えましょう:

$$\begin{aligned}
Z[J] & := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \cdots J(x_n) \\
& = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n \langle 0 | T\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} | 0 \rangle J(x_1) \cdots J(x_n) \\
& = \langle 0 | \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n T\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} J(x_1) \cdots J(x_n) \right) | 0 \rangle \\
& = \langle 0 | T \exp \left(i \int d^4x \phi(x) J(x) \right) | 0 \rangle \quad (1.4.3)
\end{aligned}$$

但し、最終行の $T \exp(\cdot)$ は次の級数で定義される時間順序積です:

$$T \exp \left(i \int d^4x \phi(x) J(x) \right) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n T\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} J(x_1) \cdots J(x_n) \quad (1.4.4)$$

構成から明らかですが、Green 関数はこの汎関数 $Z[J]$ の $J=0$ 周りでの汎関数 Taylor 展開の展開係数関数です:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \quad (1.4.5)$$

$Z[J]$ が分かればその汎関数 Taylor 展開の展開係数関数から Green 関数が読み取れるという意味で、 $Z[J]$ を Green 関数の生成汎関数 (generating functional) と呼びます。

ここで、Green 関数について成り立つ重要な事柄を3つほど列挙しておきましょう:

① 並進対称性から運動量保存が成り立つ

並進対称性がある理論では、 n 点 Green 関数 $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ の Fourier 変換は全運動量保存を意味するデルタ関数 $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \cdots + p_n)$ を含みます。これを示しましょう。まず x_1^μ, \dots, x_n^μ を任意に固定します。この時、 n 点 Green 関数の並進対称性は次の等式として表されます:

$$G^{(n)}(x_1 + a, \dots, x_n + a) = G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \quad (1.4.6)$$

但し、 a^μ は任意の定数 4 元ベクトルです。この a^μ の任意性を利用して $a^\mu = -x_n^\mu$ と選んでみましょう。すると次が成り立ちます:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = G^{(n)}(x_1 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n, 0) \quad (1.4.7)$$

この等式を用いて n 点 Green 関数の Fourier 変換を評価すると次のようになります:

$$\begin{aligned} & \int d^4 x_1 \cdots \int d^4 x_{n-1} \int d^4 x_n G^{(n)}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) e^{-i(p_1 x_1 + \cdots + p_{n-1} x_{n-1} + p_n x_n)} \\ &= \int d^4 x_1 \cdots \int d^4 x_{n-1} \int d^4 x_n G^{(n)}(x_1 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n, 0) e^{-i(p_1 x_1 + \cdots + p_{n-1} x_{n-1} + p_n x_n)} \\ &= \int d^4 y_1 \cdots \int d^4 y_{n-1} \int d^4 x_n G^{(n)}(y_1, \dots, y_{n-1}, 0) e^{-i(p_1 y_1 + \cdots + p_{n-1} y_{n-1} + (p_1 + \cdots + p_n) x_n)} \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \cdots + p_n) \int d^4 y_1 \cdots \int d^4 y_{n-1} G^{(n)}(y_1, \dots, y_{n-1}, 0) e^{-i(p_1 y_1 + \cdots + p_{n-1} y_{n-1})} \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

但し、3 行目で $y_i = x_i - x_n$ ($i = 1, \dots, n-1$) と変数変換し、4 行目で x_n 積分を実行しました。以上で、並進対称性の帰結として n 点 Green 関数 $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ の Fourier 変換は必ずデルタ関数 $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \cdots + p_n)$ を含む事が分かりました。この事実は既に運動量表示 Green 関数の定義(1.3.30)に組み込んでいた事に注意しましょう。

② 1 点 Green 関数は常にゼロに出来る

並進対称性(1.4.6)は特に 1 点 Green 関数に対しては $G^{(1)}(x+a) = G^{(1)}(x)$ となりますが、 a^μ の任意性を利用して $a^\mu = -x^\mu$ と選ぶと次のようになります:

$$G^{(1)}(x) = G^{(1)}(x-x) = G^{(1)}(0) = \langle 0|\phi(0)|0\rangle = \text{constant} \quad (1.4.9)$$

ここで、真空期待値 $\langle 0|\phi(0)|0\rangle$ はもはや x^μ には依存しないただの定数である事に注意しましょう。従って、スカラー場を改めて $\phi'(x) = \phi(x) - \langle 0|\phi(0)|0\rangle$ と定義し直せば、 $\phi'(x)$ の 1 点 Green 関数は必ずゼロにすることが出来ます。簡単な為、以下ではこの場の再定義を行ったとして 1 点 Green 関数はゼロだと仮定します。

③ 実スカラー場の Green 関数は対称関数

n 点 Green 関数は式(1.4.3)1 行目の係数関数として与えられる訳ですが、外場の積は $J(x_1) \cdots J(x_i) \cdots J(x_j) \cdots J(x_n) = J(x_1) \cdots J(x_j) \cdots J(x_i) \cdots J(x_n)$ と任意の入れ替えについて対称なので、係数関数も $G^{(n)}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = G^{(n)}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$ という風に変数の入れ替えについて対称でなければなりません。即ち、任意の置換 σ に対して次が成り立ちます:

$$G^{(n)}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = G^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \quad \forall \sigma \in S_n \quad (1.4.10)$$

従って、実スカラー場の Green 関数の変数の順番については殆ど気にしなくて良いです。

1.4.2 連結 Green 関数の生成汎関数

次に, $Z[J]$ が与えられたとして次の汎関数 $W[J]$ を考えましょう:

$$\begin{aligned} iW[J] &:= \log Z[J] = \log \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \cdots J(x_n) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n G_{\text{con}}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \cdots J(x_n) \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

但し, 2 行目で $J = 0$ 周りでの汎関数 Taylor 展開を行い, 展開係数関数を $G_{\text{con}}^{(n)}$ と書きました:

$$\begin{aligned} G_{\text{con}}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &:= \frac{1}{i^{n-1}} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \\ &= \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n \log Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \\ &= \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \cdots \int \frac{d^4p_n}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \cdots + p_n) \tilde{G}_{\text{con}}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) e^{i(p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n)} \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

ここで, 2 行目は $W[J] = \frac{1}{i} \log Z[J]$ から従い, 3 行目は並進対称性から出て来る因子 $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \cdots + p_n)$ を加味した $G_{\text{con}}^{(n)}$ の単なる Fourier 積分表示です. $Z[0] = 1$ なので汎関数 Taylor 展開(1.4.11)の $n = 0$ の項は無い事に注意しましょう. 上の展開係数関数 $G_{\text{con}}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ を連結 n 点 Green 関数 (**connected n -point Green's function**) と呼び, $W[J]$ を連結 Green 関数の生成汎関数と呼びます. また, $\tilde{G}_{\text{con}}^{(n)}$ は $G_{\text{con}}^{(n)}$ の運動量表示です. なぜ式(1.4.12)で定義される量が「連結」と呼ばれるのか気になるでしょうが, これに関しては例を挙げて見て行った方が早いでしょう. 1 点 Green 関数はゼロという仮定の下, 連結 Green 関数を定義(1.4.12)に従って計算すると次の様になります.*17

$$G_{\text{con}}^{(1)}(x) = G^{(1)}(x) = 0 \quad (1.4.13a)$$

$$G_{\text{con}}^{(2)}(x_1, x_2) = G^{(2)}(x_1, x_2) \quad (1.4.13b)$$

$$G_{\text{con}}^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = G^{(3)}(x_1, x_2, x_3) \quad (1.4.13c)$$

$$\begin{aligned} G_{\text{con}}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) - G^{(2)}(x_1, x_2)G^{(2)}(x_3, x_4) \\ &\quad - G^{(2)}(x_1, x_3)G^{(2)}(x_2, x_4) - G^{(2)}(x_1, x_4)G^{(2)}(x_2, x_3) \end{aligned} \quad (1.4.13d)$$

まず 1 点 Green 関数がゼロという仮定の下では, 1 点, 2 点, 3 点の連結 Green 関数は全て Green 関数と一致します. しかし, 4 点以上の連結 Green 関数の場合は一般に Green 関数とは一致しません. 例えば連結 4 点 Green 関数の場合は, 式(1.4.13d)から明らかですが, 4 点 Green 関数から 2 点 Green 関数の積で書ける部分を全て差引いたものが連結 4 点 Green 関数を与えます. 従って, $G_{\text{con}}^{(4)}$ には 2 点 Green 関数の積で書き表されるような項は含まれていません. これが「連結」の意味で, 一般に連結 n 点 Green 関数には Green 関数の積 $G^{(m_1)}G^{(m_2)} \cdots$ (但し, $m_1 + m_2 + \cdots = n$) で書ける様な項は含まれていません. 散乱振幅(1.3.31)の観点からは, こ

*17 式(1.4.13a)–(1.4.13d)は $W[J]$ をひたすら汎関数微分すれば得られます. 例えば, 連結 3 点 Green 関数までを得るにはまず次の計算を行います:

$$\begin{aligned} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1)} &= \frac{1}{i} \frac{\delta \log Z[J]}{\delta J(x_1)} \\ &= \frac{1}{Z[J]} \frac{1}{i} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)} \\ \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} &= \frac{1}{i^2} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left(\frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_2)} \right) \\ &= \frac{1}{Z[J]} \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} - \left(\frac{1}{Z[J]} \frac{1}{i} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)} \right) \left(\frac{1}{Z[J]} \frac{1}{i} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_2)} \right) \\ \frac{1}{i^2} \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3)} &= \frac{1}{i^3} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left[\frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_2) \delta J(x_3)} - \left(\frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_2)} \right) \left(\frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_3)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{i^3} \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^3 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3)} - \left(\frac{1}{i} \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)} \right) \left(\frac{1}{i^2} \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_2) \delta J(x_3)} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{i} \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_2)} \right) \left(\frac{1}{i^2} \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_3)} \right) - \left(\frac{1}{i} \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_3)} \right) \left(\frac{1}{i^2} \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right) \\ &\quad + 2 \left(\frac{1}{i} \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_2)} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_3)} \right) \end{aligned}$$

次に $Z[0] = 1$ 及び定義(1.4.11)と 1 点 Green 関数はゼロという仮定に注意して両辺で $J = 0$ と置くと, 式(1.4.13a)–(1.4.13c)が得られます.

の様な Green 関数の積で書ける部分は互いに影響を及ぼし合っていない独立な散乱現象に対する散乱振幅の積を与えます。従って、普通は考えません。LSZ 公式で使う Green 関数は基本的に連結 Green 関数である、という事を強調しておきましょう。

さて、上の表式(1.4.13a)–(1.4.13d)では連結 Green 関数を Green 関数を用いて表しましたが、これらを解いて逆に Green 関数を連結 Green 関数を用いて表すことも出来ます。例えば 4 点 Green 関数は次の様に表されます：

$$G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = G_{\text{con}}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) + G_{\text{con}}^{(2)}(x_1, x_2)G_{\text{con}}^{(2)}(x_3, x_4) \\ + G_{\text{con}}^{(2)}(x_1, x_3)G_{\text{con}}^{(2)}(x_2, x_4) + G_{\text{con}}^{(2)}(x_1, x_4)G_{\text{con}}^{(2)}(x_2, x_3) \quad (1.4.14)$$

同様に、多点の Green 関数も全て連結 Green 関数とその積を用いて表すことが出来ます。

1.4.3 頂点関数の生成汎関数

最後に、 $W[J]$ が与えられたとして、この汎関数 Legendre 変換として得られる新たな c 数値関数 $\varphi(x)$ の汎関数 $\Gamma[\varphi]$ を導入しましょう：

$$\Gamma[\varphi] = \left(W[J] - \int d^4x \varphi(x) J(x) \right) \Big|_{J=J_c} \quad (1.4.15)$$

但し、 J_c は次の方程式の解です：

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \left(W[J] - \int d^4y \varphi(y) J(y) \right) = 0 \quad (1.4.16)$$

まず、この方程式を調べましょう。左辺の汎関数微分を計算すると次の様になります：

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{\delta}{\delta J(x)} \left(W[J] - \int d^4y \varphi(y) J(y) \right) \\ &= \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} - \int d^4y \varphi(y) \frac{\delta J(y)}{\delta J(x)} \\ &= \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} - \int d^4y \varphi(y) \delta^4(x-y) \\ &= \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} - \varphi(x) \end{aligned} \quad (1.4.17)$$

よって、式(1.4.16)は結局次の様に書き表されます：

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \varphi(x) \quad (1.4.18)$$

要するに、c 数値関数 φ を 1 つ与えた時、この方程式を満たす J が J_c です。 J_c は当然 φ の選び方に依存する事に注意しましょう。この様にして構成される φ の汎関数 $\Gamma[\varphi]$ を有効作用 (effective action) と呼びます。また、有効作用の $\varphi = 0$ 周りでの汎関数 Taylor 展開

$$\Gamma[\varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \quad (1.4.19)$$

の展開係数関数

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &:= \frac{\delta^n \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x_1) \cdots \delta \varphi(x_n)} \Big|_{\varphi=0} \\ &= \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \cdots \int \frac{d^4p_n}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \cdots + p_n) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) e^{i(p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n)} \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

を n 点頂点関数 (n -point vertex function) と呼びます*18。但し、 $\tilde{\Gamma}^{(n)}$ は $\Gamma^{(n)}$ の運動量表示です。実は任意の連結 Green 関数はこの頂点関数と連結 2 点 Green 関数から構成されます。以下、これを具体例で見て行きましょう。簡単な為、以下では「 $\varphi = 0$ の時の方程式(1.4.18)の解は $J_c = 0$ しか無い」と仮定します*19。

*18 より正確には (連結 2 点 Green 関数 $G_{\text{con}}^{(2)}$ に関して) 1 粒子既約 (one-particle irreducible) な n 点頂点関数です。この 1 粒子既約というのは Feynman グラフに対する概念で、一般に N 粒子既約グラフとは内線の連結 2 点 Green 関数を N 本切断しても 2 つのグラフに分離しないグラフの事を指します。逆に、内線を N 本切断した時に 2 つのグラフに分離するものを N 粒子可約グラフと呼びます。例えば、式(1.4.47)の最後 3 つのグラフは真ん中の線を切断すると 2 つのグラフに分離するので 1 粒子既約では無く、1 粒子可約です。

*19 $G^{(1)}(x) = G_{\text{con}}^{(1)}(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \Big|_{J=0}$ なので、1 点 Green 関数がゼロという仮定の下では「 $J = 0$ なら $\varphi = 0$ 」は言えます。しかし、その逆である「 $\varphi = 0$ なら方程式(1.4.18)の解は $J = 0$ しか無い」は一般には言えません。ここでは議論の簡単な為、「 $\varphi = 0 \Leftrightarrow J = 0$ 」を仮定する事にします。

0点頂点関数

まず0点頂点関数を調べましょう。これは $\varphi = 0$ 周りでの汎関数 Taylor 展開の第1項目なので、 $\varphi = 0$ の時の有効作用で与えられます:

$$\Gamma^{(0)} = \Gamma[0] = \left(W[J] - \int d^4x \varphi(x) J(x) \right) \Big|_{J=(\varphi=0 \text{ の時の解 } J_c)} = W[0] = 0 \quad (1.4.21)$$

但し、3番目の等号で「 $\varphi = 0$ の時の方程式(1.4.18)の解は $J_c = 0$ しか無い」という仮定を用いました。また、4番目の等号は $Z[0] = 1$ なので $iW[0] = \log Z[0] = 0$ となる事から従います。よって、「 $\varphi = 0 \Leftrightarrow J_c = 0$ 」という仮定の下では0点頂点関数はゼロです。

1点頂点関数

次に1点頂点関数を調べましょう。まず有効作用を $\varphi(x)$ で汎関数微分すると次の様になります:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)} &= \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \left(W[J] - \int d^4y \varphi(y) J(y) \right) \Big|_{J=J_c} \\ &= \int d^4y \frac{\delta J_c(y)}{\delta\varphi(x)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \Big|_{J=J_c} - \int d^4y \delta^4(x-y) J_c(y) - \int d^4y \varphi(y) \frac{\delta J_c(y)}{\delta\varphi(x)} \\ &= -J_c(x) + \int d^4y \frac{\delta J_c(y)}{\delta\varphi(x)} \left(\frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} - \varphi(y) \right) \Big|_{J=J_c} \\ &= -J_c(x) \end{aligned} \quad (1.4.22)$$

但し、2行目で汎関数微分の連鎖公式を使い、4行目で式(1.4.18)を用いました。結局、一般に次の等式が成り立ちます:

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = -J_c(x) \quad (1.4.23)$$

従って、1点頂点関数は次の様になります:

$$\Gamma^{(1)}(x) = \frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \Big|_{\varphi=0} = -J_c(x) \Big|_{\varphi=0} = 0 \quad (1.4.24)$$

但し、最後の等号で「 $\varphi = 0$ の時の方程式の解は $J_c = 0$ しか無い」という仮定を用いました。結局、この仮定の下では、0点頂点関数と1点頂点関数は共にゼロになる事が分かりました。

2点頂点関数

次に2点頂点関数を調べましょう。今までの計算はジャブで、これからが本題です。まず式(1.4.18)の両辺を φ で汎関数微分します。計算するとこれは次の様になります:

$$\begin{aligned} \delta^4(x-y) &= \frac{\delta\varphi(y)}{\delta\varphi(x)} \\ &= \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \Big|_{J=J_c} \\ &= \int d^4z \frac{\delta J_c(z)}{\delta\varphi(x)} \frac{\delta^2 W[J_c]}{\delta J(z) \delta J(y)} \Big|_{J=J_c} \\ &= - \int d^4z \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x) \delta\varphi(z)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(z) \delta J(y)} \Big|_{J=J_c} \end{aligned} \quad (1.4.25)$$

但し、3行目で汎関数微分の連鎖公式を使い、4行目で式(1.4.23)を用いました。よって、一般に次の等式が成り立つ事が分かりました:

$$\int d^4z \frac{1}{i} \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x) \delta\varphi(z)} \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(z) \delta J(y)} \Big|_{J=J_c} = \delta^4(x-y) \quad (1.4.26)$$

「 $\varphi = 0$ の時の方程式(1.4.18)の解は $J_c = 0$ しか無い」という仮定の下、上の等式の特に $\varphi = 0$ での汎関数微分係数を考えると、2点頂点関数と2点連結 Green 関数の間の次の関係式が得られます:

$$\int d^4z \frac{1}{i} \Gamma^{(2)}(x, z) G_{\text{con}}^{(2)}(z, y) = \delta^4(x-y) \quad (1.4.27)$$

この等式より「2点頂点関数を虚数 i で割ったもの $\frac{1}{i}\Gamma^{(2)}$ は積分演算子として連結2点 Green 関数の逆である」という事が分かりました。応用上、2点頂点関数はとても重要なので、ここで幾つかその性質を列挙しておきましょう:

① 自由場の理論の場合

自由場の理論の場合，連結 2 点 Green 関数は単に Feynman 伝播関数です．Feynman 伝播関数は微分方程式(1.2.42)を満たしますが，この方程式から 2 点頂点関数が次の様に読み取れます：

$$\Gamma^{(2)}(x, z) = (\partial_z^2 - m^2)\delta^4(x - z) \quad (1.4.28)$$

実際，これを式(1.4.27)に代入すると微分方程式(1.2.42)になります．また，この時点では分かりませんが，自由場の理論では 3 点以上の頂点関数は全てゼロです．従って，有効作用は次の様になります：

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi] &= \frac{1}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \Gamma^{(2)}(x_1, x_2)\varphi(x_1)\varphi(x_2) \\ &= \frac{1}{2!} \int d^4x \varphi(x)(\partial^2 - m^2)\varphi(x) \end{aligned} \quad (1.4.29)$$

これは実の自由スカラー場の古典作用に他なりません．但し，有効作用が古典作用と一致するのは自由場の理論だけで，一般の相互作用のある理論では有効作用は古典作用とは異なります．有効作用は量子効果も取り入れた作用を与えるのですが，これに関しては第2章2.4節以降の具体例をやることで追々分かってくるでしょう．

② 運動量表示と自己エネルギー

今までは主に座標表示で議論して来ましたが，応用上は運動量表示を主に用います．連結 n 点 Green 関数と n 点頂点関数の運動量表示は式(1.4.12)(1.4.20)で与えています，特に $n = 2$ の場合はデルタ関数は積分してしまって $\tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p) = \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p, -p)$ 及び $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = \tilde{\Gamma}^{(2)}(p, -p)$ と書く事にして，連結 2 点 Green 関数と 2 点頂点関数の Fourier 積分表示を次の様に書く事します：

$$G_{\text{con}}^{(2)}(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p)e^{ip(x-y)} \quad (1.4.30a)$$

$$\Gamma^{(2)}(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{\Gamma}^{(2)}(p)e^{ip(x-y)} \quad (1.4.30b)$$

$\tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(-p) = \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p)$ 及び $\tilde{\Gamma}^{(2)}(-p) = \tilde{\Gamma}^{(2)}(p)$ に注意しましょう．これを使うと，式(1.4.27)は運動量表示で次の様になります：

$$\frac{1}{i}\tilde{\Gamma}^{(2)}(p)\tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p) = 1 \quad (1.4.31)$$

さて，自由場の理論の場合は $\tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p) = 1/i(p^2 + m^2)$ なので 2 点頂点関数は次の様になります：

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = -p^2 - m^2 \quad (1.4.32)$$

但し，一般の相互作用している場の理論では 2 点頂点関数はこれからずれます．このずれが自己エネルギー (self-energy) $\tilde{\Sigma}$ で，次の様に書きます：

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = -p^2 - m^2 - \tilde{\Sigma}(p^2) \quad (1.4.33a)$$

$$\tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p) = \frac{1}{i} \frac{1}{p^2 + m^2 + \tilde{\Sigma}(p^2)} \quad (1.4.33b)$$

但し，Lorentz 不変性から自己エネルギーは p^2 の関数でしか有り得ないので， $\tilde{\Sigma}(p^2)$ と書きました．(従って，実際は $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ も $\tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}$ も p^2 の関数です．) 通常，この自己エネルギーは摂動論で求めるのですが，この時， $\tilde{\Sigma}$ が小さいとして式(1.4.33b)を次の様に形式的に幾何級数展開した表式をよく使います：

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p) &= \frac{1}{i} \frac{1}{p^2 + m^2 + \tilde{\Sigma}(p^2)} \\ &= \frac{1}{i(p^2 + m^2)} \frac{1}{1 - \frac{\frac{1}{i}\tilde{\Sigma}(p^2)}{p^2 + m^2}} \\ &= \frac{1}{i(p^2 + m^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{i}\tilde{\Sigma}(p^2)}{p^2 + m^2} \right)^n \\ &= \frac{1}{i(p^2 + m^2)} + \frac{1}{i(p^2 + m^2)} \left[\frac{1}{i}\tilde{\Sigma}(p^2) \right] \frac{1}{i(p^2 + m^2)} \\ &\quad + \frac{1}{i(p^2 + m^2)} \left[\frac{1}{i}\tilde{\Sigma}(p^2) \right] \frac{1}{i(p^2 + m^2)} \left[\frac{1}{i}\tilde{\Sigma}(p^2) \right] \frac{1}{i(p^2 + m^2)} + \dots \end{aligned} \quad (1.4.34)$$

Feynman 伝播関数を線で表し、自己エネルギーを i で割ったものを灰色の丸で表すことにすると、最後の級数は次の様な図で表すことが出来ます:

$$\tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p) = \text{---} + \text{---} \left(\frac{1}{i} \tilde{\Sigma} \right) \text{---} + \text{---} \left(\frac{1}{i} \tilde{\Sigma} \right) \left(\frac{1}{i} \tilde{\Sigma} \right) \text{---} + \dots \quad (1.4.35)$$

通常、摂動論はループ展開で行うので、例えば 1 ループ近似では上の級数展開の 3 項目以降は必要無く、最初の 2 項だけ考えれば良いです。ループ展開に関しては第 2 章で学びます。

③ 質量核近傍での $\tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p)$ の Laurent 展開

これまで明確に述べてきませんでした²⁰が、スカラー場が第 1.3.2 節の漸近条件を満たす時、自己エネルギー $\tilde{\Sigma}(p^2)$ 及びその 1 階導関数 $\tilde{\Sigma}^{(1)}(p^2) = \frac{d\tilde{\Sigma}}{dp^2}(p^2)$ は質量核 $p^2 = -m^2$ の上で次の値を取ります:^{*20}

$$\tilde{\Sigma}(-m^2) = 0 \quad (1.4.36a)$$

$$\tilde{\Sigma}^{(1)}(-m^2) = 0 \quad (1.4.36b)$$

この時、自己エネルギー $\tilde{\Sigma}(p^2)$ の $p^2 = -m^2$ 周りでの Taylor 展開は $(p^2 + m^2)^2$ から始まるので、質量核近傍では連結 2 点 Green 関数は次の様に Laurent 展開されます:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p) &= \frac{1}{i} \frac{1}{p^2 + m^2 + O(p^2 + m^2)^2} \\ &= \frac{1}{i} \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{1}{1 + O(p^2 + m^2)} \\ &= \frac{1}{i} \frac{1}{p^2 + m^2} (1 + O(p^2 + m^2)) \\ &= \frac{1}{i} \frac{1}{p^2 + m^2} + O(1) \end{aligned} \quad (1.4.37)$$

よって、 $\tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}$ は p^2 の関数として $p^2 = -m^2$ に 1 位の極を持ち、そこでの留数は $1/i$ です。即ち、次を満たします:

$$\lim_{p^2 \rightarrow -m^2} i(p^2 + m^2) \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p) = 1 \quad (1.4.38)$$

今から見て行くように、連結 Green 関数は「(外線の連結 2 点 Green 関数の積) × (頂点関数と内線の連結 2 点 Green 関数の積)」という構造になっています。式 (1.4.38) より、LSZ 公式 (1.3.31) に現れる因子 $[\prod_j i(q_j^2 + m^2)][\prod_j i(p_j^2 + m^2)]$ は外線の連結 2 点 Green 関数をもぎ取る役割を果たすことになります。

3 点頂点関数

次に 3 点頂点関数を調べましょう。式 (1.4.26) を $\varphi(w)$ で汎関数微分すると次の様になります:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta}{\delta\varphi(w)} \int d^4z \frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(z)} \frac{\delta^2W[J]}{\delta J(z)\delta J(y)} \Bigg|_{J=J_c} \\ &= \int d^4z \frac{\delta^3\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(w)\delta\varphi(x)\delta\varphi(z)} \frac{\delta^2W[J]}{\delta J(z)\delta J(y)} \Bigg|_{J=J_c} + \int d^4z \int d^4z' \frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(z)} \frac{\delta J_c(z')}{\delta\varphi(w)} \frac{\delta^3W[J]}{\delta J(z')\delta J(z)\delta J(x)} \Bigg|_{J=J_c} \\ &= \int d^4z \frac{\delta^3\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(w)\delta\varphi(x)\delta\varphi(z)} \frac{\delta^2W[J]}{\delta J(z)\delta J(y)} \Bigg|_{J=J_c} - \int d^4z \int d^4z' \frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(z)} \frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(w)\delta\varphi(z')} \frac{\delta^3W[J]}{\delta J(z')\delta J(z)\delta J(x)} \Bigg|_{J=J_c} \end{aligned} \quad (1.4.39)$$

これと式 (1.4.26) を使って適宜逆演算子を掛けて積分すると、最終的に $\Gamma[\varphi]$ と $W[J]$ の 3 階汎関数微分が次の様に取り出せます:

$$\frac{\delta^3\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)\delta\varphi(x_3)} = - \left[\prod_{j=1}^3 \int d^4y_j \right] \frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(y_1)} \frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x_2)\delta\varphi(y_2)} \frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x_3)\delta\varphi(y_3)} \frac{\delta^3W[J]}{\delta J(y_1)\delta J(y_2)\delta J(y_3)} \Bigg|_{J=J_c} \quad (1.4.40a)$$

$$\frac{\delta^3W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)} \Bigg|_{J=J_c} = \left[\prod_{j=1}^3 \int d^4y_j \right] \frac{\delta^2W[J]}{\delta J(y_1)\delta J(x_1)} \Bigg|_{J=J_c} \frac{\delta^2W[J]}{\delta J(y_2)\delta J(x_2)} \Bigg|_{J=J_c} \frac{\delta^2W[J]}{\delta J(y_3)\delta J(x_3)} \Bigg|_{J=J_c} \frac{\delta^3\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(y_1)\delta\varphi(y_2)\delta\varphi(y_3)} \quad (1.4.40b)$$

^{*20} 式 (1.4.36a) は漸近場 ϕ_{as} が Klein-Gordon 方程式 (1.3.16a) を満たす事と関係し、式 (1.4.36b) は漸近場が正準交換関係 (1.3.16b) を満たす事と関係します。但し、実際上は式 (1.4.36a) (1.4.36b) を満たす様に模型のパラメータと場の規格化を決めるという事をします。これが (質量核上) 繰り込みで、式 (1.4.36a) (1.4.36b) が繰り込み条件です。

これと「 $\varphi = 0$ の時の方程式(1.4.18)の解は $J_c = 0$ しか無い」という仮定を使うと、連結3点 Green 関数及び3点頂点関数が次の様に書ける事が分かります:

$$i\Gamma^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \left[\prod_{j=1}^3 \int d^4 y_j \right] \frac{1}{i} \Gamma^{(2)}(x_1, y_1) \frac{1}{i} \Gamma^{(2)}(x_2, y_2) \frac{1}{i} \Gamma^{(2)}(x_3, y_3) G_{\text{con}}^{(3)}(y_1, y_2, y_3) \quad (1.4.41a)$$

$$G_{\text{con}}^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \left[\prod_{j=1}^3 \int d^4 y_j \right] G_{\text{con}}^{(2)}(x_1, y_1) G_{\text{con}}^{(2)}(x_2, y_2) G_{\text{con}}^{(2)}(x_3, y_3) i\Gamma^{(3)}(y_1, y_2, y_3) \quad (1.4.41b)$$

これらの表式は運動量表示ではもっと単純になって、式(1.4.12)(1.4.20)(1.4.30a)(1.4.30b)を代入して計算すると、最終的に次の様になります:

$$i\tilde{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{i} \tilde{\Gamma}^{(2)}(p_1) \frac{1}{i} \tilde{\Gamma}^{(2)}(p_2) \frac{1}{i} \tilde{\Gamma}^{(2)}(p_3) \tilde{G}_{\text{con}}^{(3)}(p_1, p_2, p_3) \quad \text{with } p_1 + p_2 + p_3 = 0 \quad (1.4.42a)$$

$$\tilde{G}_{\text{con}}^{(3)}(p_1, p_2, p_3) = \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p_1) \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p_2) \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p_3) i\tilde{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2, p_3) \quad \text{with } p_1 + p_2 + p_3 = 0 \quad (1.4.42b)$$

これらの表式から明らかですが、3点頂点関数とは連結3点 Green 関数から外線の連結2点 Green 関数をもぎ取ったものに他ならない事が分かります。連結2点 Green 関数を太線で、3点頂点関数に i を掛けたものを灰色の丸で表すことにすると、上の運動量表示連結3点 Green 関数(1.4.42b)は次の様な図で表せます:

$$\tilde{G}_{\text{con}}^{(3)}(p_1, p_2, p_3) = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \nearrow p_2 \\ \bullet \\ \searrow p_3 \end{array} \\ \text{---} p_1 \end{array} \quad (1.4.43)$$

但し、青色の矢印は運動量の向きで、頂点関数から出て行く方向を正の向きにしました。これは、始状態の運動量の向きを反転した時に、「粒子が入射して、相互作用し、放射される」という粒子散乱の描像と合致させる為です。(LSZ 公式(1.3.31)では始状態の運動量の符号は反転される事を思い出しましょう。)

4点頂点関数

最後に4点頂点関数を調べましょう。これは式(1.4.40a)の両辺を更に φ で汎関数微分すれば得られます。計算の仕方は今までと同じなので省略すると、最終的に答えは次の様になります:

$$\begin{aligned} i\Gamma^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \left[\prod_{j=1}^4 \int d^4 y_j \right] \frac{1}{i} \Gamma^{(2)}(x_1, y_1) \frac{1}{i} \Gamma^{(2)}(x_2, y_2) \frac{1}{i} \Gamma^{(2)}(x_3, y_3) \frac{1}{i} \Gamma^{(2)}(x_4, y_4) G_{\text{con}}^{(4)}(y_1, y_2, y_3, y_4) \\ &\quad - \left[\prod_{j=1}^2 \int d^4 y_j \right] i\Gamma^{(3)}(x_1, x_2, y_1) G_{\text{con}}^{(2)}(y_1, y_2) i\Gamma^{(3)}(y_2, x_3, x_4) \\ &\quad - \left[\prod_{j=1}^2 \int d^4 y_j \right] i\Gamma^{(3)}(x_1, x_3, y_1) G_{\text{con}}^{(2)}(y_1, y_2) i\Gamma^{(3)}(y_2, x_2, x_4) \\ &\quad - \left[\prod_{j=1}^2 \int d^4 y_j \right] i\Gamma^{(3)}(x_1, x_4, y_1) G_{\text{con}}^{(2)}(y_1, y_2) i\Gamma^{(3)}(y_2, x_2, x_3) \end{aligned} \quad (1.4.44)$$

逆に、連結4点 Green 関数は頂点関数と連結2点 Green 関数を用いて次の様に表されます:

$$\begin{aligned} G_{\text{con}}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \left[\prod_{j=1}^4 \int d^4 y_j \right] G_{\text{con}}^{(2)}(x_1, y_1) G_{\text{con}}^{(2)}(x_2, y_2) G_{\text{con}}^{(2)}(x_3, y_3) G_{\text{con}}^{(2)}(x_4, y_4) i\Gamma^{(4)}(y_1, y_2, y_3, y_4) \\ &\quad + \left[\prod_{j=1}^4 \int d^4 y_j \right] \left[\prod_{j=1}^2 \int d^4 z_j \right] G_{\text{con}}^{(2)}(x_1, y_1) G_{\text{con}}^{(2)}(x_2, y_2) i\Gamma^{(3)}(y_1, y_2, z_1) G_{\text{con}}^{(2)}(z_1, z_2) i\Gamma^{(3)}(z_2, y_3, y_4) G_{\text{con}}^{(2)}(y_3, x_3) G_{\text{con}}^{(2)}(y_4, x_4) \\ &\quad + \left[\prod_{j=1}^4 \int d^4 y_j \right] \left[\prod_{j=1}^2 \int d^4 z_j \right] G_{\text{con}}^{(2)}(x_1, y_1) G_{\text{con}}^{(2)}(x_3, y_2) i\Gamma^{(3)}(y_1, y_2, z_1) G_{\text{con}}^{(2)}(z_1, z_2) i\Gamma^{(3)}(z_2, y_3, y_4) G_{\text{con}}^{(2)}(y_3, x_2) G_{\text{con}}^{(2)}(y_4, x_4) \end{aligned}$$

$$+ \left[\prod_{j=1}^4 \int d^4 y_j \right] \left[\prod_{j=1}^2 \int d^4 z_j \right] G_{\text{con}}^{(2)}(x_1, y_1) G_{\text{con}}^{(2)}(x_4, y_2) i\tilde{\Gamma}^{(3)}(y_1, y_2, z_1) G_{\text{con}}^{(2)}(z_1, z_2) i\tilde{\Gamma}^{(3)}(z_2, y_3, y_4) G_{\text{con}}^{(2)}(y_3, x_2) G_{\text{con}}^{(2)}(y_4, x_3) \quad (1.4.45)$$

式(1.4.44)から明らかですが、4点頂点関数とは、連結4点Green関数の外線の連結2点Green関数をもぎ取ったもので、更に連結2点Green関数を内線に含んだ3点頂点関数の積として書ける部分を全て差引いたものとして与えられます。これが脚注*18で述べた1粒子既約な頂点関数と呼ばれる所以です。式(1.4.44)の最後の3項が1粒子可約で、この1粒子可約な部分を差引いたものとして与えられている訳です。

さて、上の表式は長いですが、運動量表示ではもっと単純な表式になります。式(1.4.12)(1.4.20)(1.4.30a)を式(1.4.45)に代入してひたすら計算すると、最終的に次の等式が得られます：

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\text{con}}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p_1) \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p_2) \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p_3) \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p_4) \\ &\quad \times \left[i\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) \right. \\ &\quad + i\tilde{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2, p_3 + p_4) \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p_3 + p_4) i\tilde{\Gamma}^{(3)}(-p_3 - p_4, p_3, p_4) \\ &\quad + i\tilde{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_3, p_2 + p_4) \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p_2 + p_4) i\tilde{\Gamma}^{(3)}(-p_2 - p_4, p_2, p_4) \\ &\quad \left. + i\tilde{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_4, p_2 + p_3) \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p_2 + p_3) i\tilde{\Gamma}^{(3)}(-p_2 - p_3, p_2, p_3) \right] \quad \text{with } p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0 \quad (1.4.46) \end{aligned}$$

連結2点Green関数を太線、3点及び4点頂点関数を i で割ったものを灰色の丸で表すと、上の運動量表示連結4点Green関数は次の様な図で表す事が出来ます：

$$\tilde{G}_{\text{con}}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \begin{array}{c} \begin{array}{c} p_3 \quad p_4 \\ \nearrow \quad \searrow \\ \text{---} i\tilde{\Gamma}^{(4)} \text{---} \\ \nwarrow \quad \swarrow \\ p_1 \quad p_2 \end{array} \\ + \begin{array}{c} p_3 \quad p_4 \\ \nearrow \quad \searrow \\ \text{---} i\tilde{\Gamma}^{(3)} \text{---} \\ \nwarrow \quad \swarrow \\ p_1 \quad p_2 \end{array} \\ + \begin{array}{c} p_3 \quad p_4 \\ \nearrow \quad \searrow \\ \text{---} i\tilde{\Gamma}^{(3)} \text{---} \xrightarrow{p_2 + p_4} \text{---} i\tilde{\Gamma}^{(3)} \text{---} \\ \nwarrow \quad \swarrow \quad \nwarrow \quad \swarrow \\ p_1 \quad p_2 \quad p_2 \quad p_4 \end{array} \\ + \begin{array}{c} p_3 \quad p_4 \\ \nearrow \quad \searrow \\ \text{---} i\tilde{\Gamma}^{(3)} \text{---} \xrightarrow{p_2 + p_3} \text{---} i\tilde{\Gamma}^{(3)} \text{---} \\ \nwarrow \quad \swarrow \quad \nwarrow \quad \swarrow \\ p_1 \quad p_2 \quad p_2 \quad p_3 \end{array} \end{array} \quad (1.4.47)$$

LSZ 公式(1.3.31)及び式(1.4.38)を使うと、2体散乱の散乱振幅 $\text{out}\langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle_{\text{in}}$ はこれから $\tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p_1) \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p_2) \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p_3) \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p_4)$ をもぎ取って、運動量 p_1 と p_2 の符号を変えれば得られる事が分かります：

$$\begin{aligned} \text{out}\langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle_{\text{in}} &= \lim_{p_i^2 \rightarrow -m^2} (2\pi)^4 \delta^4(-p_1 - p_2 + p_3 + p_4) \left[\prod_{j=1}^4 i(p_j^2 + m^2) \right] \tilde{G}_{\text{con}}^{(4)}(-p_1, -p_2, p_3, p_4) \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(-p_1 - p_2 + p_3 + p_4) \\ &\quad \times \left[i\tilde{\Gamma}^{(4)}(-p_1, -p_2, p_3, p_4) \right. \\ &\quad + i\tilde{\Gamma}^{(3)}(-p_1, -p_2, p_3 + p_4) \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p_3 + p_4) i\tilde{\Gamma}^{(3)}(-p_3 - p_4, p_3, p_4) \\ &\quad + i\tilde{\Gamma}^{(3)}(-p_1, p_3, -p_2 + p_4) \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(-p_2 + p_4) i\tilde{\Gamma}^{(3)}(p_2 - p_4, -p_2, p_4) \\ &\quad \left. + i\tilde{\Gamma}^{(3)}(-p_1, p_4, -p_2 + p_3) \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(-p_2 + p_3) i\tilde{\Gamma}^{(3)}(p_2 - p_3, -p_2, p_3) \right] \\ &= \begin{array}{c} \begin{array}{c} p_3 \quad p_4 \\ \nearrow \quad \searrow \\ \text{---} i\tilde{\Gamma}^{(4)} \text{---} \\ \nwarrow \quad \swarrow \\ p_1 \quad p_2 \end{array} \\ + \begin{array}{c} p_3 \quad p_4 \\ \nearrow \quad \searrow \\ \text{---} i\tilde{\Gamma}^{(3)} \text{---} \\ \nwarrow \quad \swarrow \\ p_1 \quad p_2 \end{array} \\ + \begin{array}{c} p_3 \quad p_4 \\ \nearrow \quad \searrow \\ \text{---} i\tilde{\Gamma}^{(3)} \text{---} \xrightarrow{-p_2 + p_4} \text{---} i\tilde{\Gamma}^{(3)} \text{---} \\ \nwarrow \quad \swarrow \quad \nwarrow \quad \swarrow \\ p_1 \quad p_2 \quad p_2 \quad p_4 \end{array} \\ + \begin{array}{c} p_3 \quad p_4 \\ \nearrow \quad \searrow \\ \text{---} i\tilde{\Gamma}^{(3)} \text{---} \xrightarrow{-p_2 + p_3} \text{---} i\tilde{\Gamma}^{(3)} \text{---} \\ \nwarrow \quad \swarrow \quad \nwarrow \quad \swarrow \\ p_1 \quad p_2 \quad p_2 \quad p_3 \end{array} \end{array} \quad (1.4.48) \end{aligned}$$

但し、図の太線の上に乗っている赤色のバツテン (×) は太線をもぎ取る操作を表します。式(1.4.48)が有質量実スカラー場の理論に於ける2体散乱振幅の一般的表式で、2体散乱のマスター公式とも呼ぶべきものです。この公式は基本的にLSZ公式と汎関数Legendre変換だけに基づくもので、従って摂動論に依らず厳密に成り立つ、という事を強調しておきましょう。因みに、式(1.4.48)最終行2項目の寄与を s チャンネル、3項目の寄与を t チャンネル、4項目の寄与を u チャンネルと呼んだりします。この s チャンネル、 t チャンネル、 u チャンネルという用語については、第2章2.5節で φ^4 理論の4点頂点関数を調べる時に改めて述べます。

式(1.4.48)は 2 体散乱の場合ですが、同様に他の多粒子散乱の散乱振幅も頂点関数と内線の連結 2 点 Green 関数だけで書き表す事が出来ます。この様に、場の量子論の散乱問題は連結 2 点 Green 関数と頂点関数さえ分かれば完全に解く事が出来ます。あとは連結 2 点 Green 関数と頂点関数を如何にして求めるか、という事が問題になる訳ですが、これは通常ループ展開と呼ばれる摂動展開を用いて近似的に求めます。このループ展開については第 2 章で学びます。

参考文献

LSZ 公式

この章の主な話題の 1 つは LSZ 公式でしたが、この公式は Harry Lehmann, Kurt Symanzik, Wolfhart Zimmermann らによる次の 2 部作で与えられました:

- [1] H. Lehmann, K. Symanzik, and W. Zimmermann, “Zur Formulierung quantisierter Feldtheorien,” *Nuovo Cim.* **1** (1955) 205–225
- [2] H. Lehmann, K. Symanzik, and W. Zimmermann, “On the formulation of quantized field theories. II,” *Nuovo Cim.* **6** (1957) 319–333

タイトルから明らかですが、[1] は独語で書かれているので、独語を勉強したことがなければ読むのは厳しいと思います。一方、[2] は英語で書かれていて、内容もとても明快です。但し、これらの論文を読むのなら代わりに次の講義録を読んだ方が良いでしょう:

- [3] R. Hagedorn, *Introduction to Field Theory and Dispersion Relations* (Pergamon Press, 1964); scanned version available at the CERN Document Server: <https://doi.org/10.5170/CERN-1961-006>

これは Lehmann と Zimmermann が 1959 年に CERN で行った講義を Rolf Hagedorn がまとめたもので、これも非常に明快です。今読んでもきっと勉強になると思います。もっと最近の教科書の方が良い人は、例えば次の本をお薦めします:

- [4] A. Duncan, *The Conceptual Framework of Quantum Field Theory* (Oxford University Press, 2012)
- [5] L. Baulieu, J. Iliopoulos, and R. Sénéor, *From Classical to Quantum Fields* (Oxford University Press, 2017)

[4] の第 9 章 4 節 (pp. 281–289) と [5] の第 12 章 4 節 (pp. 286–292) に導出も含めた LSZ 公式の詳しい議論が載っています。(但し、[5] は誤植が多いので注意が必要です。) また、上の教科書には LSZ 公式の基礎付けを与える Haag-Ruelle 散乱理論についても記述があります。Haag-Ruelle 散乱理論は質量ギャップがある場の量子論の散乱問題に対する基礎理論です。因みに、質量ギャップが無い場の量子論に対しては Buchholz の散乱理論というものがあるが、この散乱理論は偶数次元でのみ成り立つ Huygens の原理に基づいています。質量ギャップが有るのか無いのかと言ったこの辺の場の量子論の微妙な所に関する話はとても難しいのですが^{*21}、興味のある人は例えば次の Rudolf Haag の教科書か Franco Strocchi の教科書を見てみると良いでしょう:

- [6] R. Haag, *Local Quantum Physics*, 2nd ed. (Springer-Verlag, 1996)
- [7] F. Strocchi, *An Introduction to Non-Perturbative Foundations of Quantum Field Theory* (Oxford University Press, 2013)

どちらも数学的に非常に難しいですが、[6] の第 1 章は場の量子論の良い概観を与えているので、この箇所だけでも読む価値は充分にあります。

有効作用

この章の後半では有効作用を導入して、特に頂点関数の生成汎関数としての側面について説明しましたが、これに関しては相対論的場の量子論の教科書よりも統計物理の教科書の方が遥かに詳しいです。私が参考にしたのは次の 3 冊です:

- [8] J. J. Binney, N. J. Dowrick, A. J. Fisher, and M. E. J. Newman, *The Theory of Critical Phenomena* (Oxford University Press, 1992)
- [9] 江沢洋, 渡辺敬二, 鈴木増雄, 田崎晴明, 『くりこみ群の方法』(岩波書店, 2000 年)
- [10] J. Zinn-Justin, *Phase Transitions and Renormalization Group* (Oxford University Press, 2007)

特に [8] の第 8 章と [9] の第 5 章 2 節 (pp. 118–122) が参考になると思います。

また、有効作用から得られる重要な量としてもう 1 つ有効ポテンシャル (**effective potential**) というものがあります。これに関してはこの講義では取り扱いませんが、有効ポテンシャルは自発的対称性の破れを論じる時に特に重要な役割を果たします。この有効ポ

^{*21} 他には電荷が有るのか無いのかという事も散乱理論を構築する上で問題になって来ます。有名なのが QED の infraparticle の問題です。

テンソルと自発的対称性の破れについては, Sidney Coleman の講義録

[11] S. Coleman, *Aspects of Symmetry* (Cambridge University Press, 1985)

の第 5 章 “Secret Symmetry” を読むと良いでしょう.

第 2 章

ループ展開

第1章では、実スカラー場の理論の 2 体散乱を例に、散乱振幅は一般に連結 2 点 Green 関数 (2 点頂点関数の逆に虚数単位 i を掛けたもの) と頂点関数のみで書き表される事を見ました。従って、頂点関数さえ分かれば場の量子論の散乱問題は完全に解く事が出来ます。しかしながら、頂点関数が厳密に求まる事はまず無く、通常は何らかの近似計算を行って近似的に求めます。この章では、この様な近似計算の代表例であるループ展開 (loop expansion) と呼ばれる摂動展開について学びます。通常、頂点関数のループ計算は

- (i) まず全ての 1 粒子既約な連結 Feynman 図を列挙して
- (ii) 次にその 1 粒子既約な連結 Feynman 図を Feynman 則に従って計算する

という風にやります。しかし実際の所、この方法で計算するのはかなりの経験が必要で、慣れないうちは Feynman 図の見落としがあったり、後述する対称性因子 (symmetry factor) を間違ってしまうことがあります。勿論経験を積んでこの辺の計算が難なく行える様になるのが望ましいのですが、実は古典作用さえ与えれば、有効作用のループ展開の各次数の表式は (原理的には) 全て書き下す事が出来て、この表式から Feynman 図や Feynman 則など持ち出さなくても頂点関数は読み取る事が出来ます。特にループ展開の 1 次近似 (1 ループ近似) は一般に極めて単純な形を取ります。これを見るのがこの章の主題で、これから導出する様に、古典作用が

$$S[\phi] = \int d^d x \left[-\frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - V(\phi) \right]$$

で与えられる実スカラー場の理論の場合、1 ループ近似では有効作用は一般に次の形を取る事が言えます:

$$\Gamma[\varphi] = S[\varphi] - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \int d^d x_1 \cdots \int d^d x_n \Delta_F(x_1, x_2) \left[-iV^{(2)}(\varphi(x_2)) \right] \cdots \Delta_F(x_n, x_1) \left[-iV^{(2)}(\varphi(x_1)) \right] + O(2\text{-loop})$$

但し、 $V(\phi)$ は多項式ポテンシャルで、 $V^{(2)}(\phi) = \frac{d^2 V(\phi)}{d\phi^2}$ は ϕ に関する V の 2 階微分です。この表式から、Feynman 則など持ち出さなくても簡単に 1 ループ近似での頂点関数を読み取る事が出来るのです。

以下では、まずループ展開の説明から始め、実はループ展開は \hbar 展開と等しい事を見た後、有効作用の \hbar 展開の 1 次近似から上の 1 ループマスター公式を導出します。その後、摂動論的繰り込みについて簡単に述べた後、6 次元有質量 φ^3 理論と 4 次元有質量 φ^4 理論を例に頂点関数の 1 ループ計算を具体的に実行してみます。この章では特に断らない限り時空の次元は任意の自然数 d とします。

2.1 ループ展開と \hbar 展開

場の量子論の摂動計算と言うと Feynman 則がもてはやされていますが、この章では Feynman 則は前面に出さずに、有効作用のループ展開を評価する事で頂点関数を一気に全て求めるという事をやります。実際、これから見て行く様に、この方法が (繰り込みも含めて) 最も系統的な頂点関数の評価法を与えるのです。しかしながら、ループ展開という名前が示す様に、この評価法は Feynman 図に含まれるループ数による展開として発展して来たので、Feynman 図の説明をしない訳には行きません。第1章でも Feynman 図らしきもの*1は既に登場させたのですが、用語の整理も兼ねてここで改めて Feynman 図とは何かを簡単に説明しておきましょう。まず、Feynman 図 (Feynman diagram) とは頂点 (vertex) と線 (line) から成るグラフの事で、線は古典作用から読み取れる連結 2 点 Green 関数 (即ち Feynman 伝播関数) を表し、 $n(\geq 3)$ 本の線と繋がっている頂点は古典作用から読み取れる n 点頂点関数 (に i を掛けたもの) を表します。また、両端が頂点と繋がっている線を特に内線 (internal line) と呼び、片方の端点のみ頂点と繋がっている線を特に外線 (external line) と呼びます。更に、任意の頂点から出発して、内線を辿って行く事で全ての頂点へ辿り着く事が出来

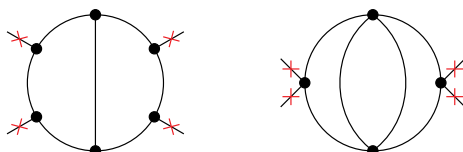
*1 第1.4.3節で登場した図では、太線は厳密な連結 2 点 Green 関数を表し、灰色の丸は厳密な頂点関数 (に i を掛けたもの) を表しているという点がここは違います。

る時、その Feynman 図を連結 Feynman 図と呼び、連結 Feynman 図でない Feynman 図を非連結 Feynman 図と呼びます。そして、 $N(\geq 1)$ 本の内線を切断しても非連結にならない連結 Feynman 図を N 粒子既約 (N -particle irreducible) な連結 Feynman 図と呼びます。前章で見た様に散乱振幅は $n(\geq 2)$ 点頂点関数さえ分かれば全て求まりますが、この n 点頂点関数に i を掛けたものは n 本の外線を全てもぎ取った 1 粒子既約な連結 Feynman 図 (の対称性因子も含めた適当な線形結合) に対応します。

以下では、まず任意の連結 Feynman 図に対して同一の値を取る不変量 $V - I + L$ を導入した後、これを用いて「連結 Feynman 図をループ数で分類する事は、その連結 Feynman 図に含まれる h の冪の次数で分類する事に等しい」という事を証明します。第2.2節で有効作用の h 展開を行う事で、前掲の 1 ループマスター公式を導出します。

2.1.1 連結 Feynman 図と不変量 $V - I + L$

任意の外線をもぎ取った 1 粒子既約な連結 Feynman 図を考えましょう。例えば次の様なものを想定しています：



ここで、黒丸は頂点、黒丸と黒丸を結ぶ線は内線、片方の端点が黒丸と結ばれていない線は外線を表します。また、赤色のバツテン (×) は外線をもぎ取る操作を表します。以下の議論では外線はどうでも良いので、これ以降もぎ取った外線は描かない事にします。

さて、この様な連結 Feynman 図に含まれる頂点の数を V 、内線の数を I 、ループの数を L としましょう。この時、実は $V - I + L$ という組み合わせは連結 Feynman 図に依存しない不変量で、一般に次の等式が成り立ちます：^{*2}

$$V - I + L = 1 \tag{2.1.1}$$

この等式の証明法は幾つかありますが^{*3}、以下ではループ数 L に関する帰納法で式(2.1.1)を証明する事にしましょう。

① $L = 0$ のとき

まず $L = 0$ の場合から初めましょう。この場合、外線をもぎ取った 1 粒子既約な連結 Feynman 図は、頂点 1 個だけから成る



しかありません。この場合、 $V = 1, I = 0, L = 0$ なので等式 $V - I + L = 1$ は確かに成り立ちます。


② $L = 1$ のとき

次に外線をもぎ取った 1 粒子既約な 1 ループ連結 Feynman 図を考えましょう。これは次に挙げるものしかありません：


1 ループ連結 Feynman 図	頂点の数 V	内線の数 I	ループの数 L	$V - I + L$
	1	1	1	1
	2	2	1	1
	3	3	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

^{*2} 等式(2.1.1)は本質的に Euler の多面体定理 (Euler's polyhedron formula) と同じで、不変量 $V - I + L$ は Euler 標数 (Euler characteristic) に対応します。(Euler の多面体定理とは、多面体の頂点の数 V 、辺の数 I 、面の数 F の間には必ず $V - I + F = 2$ が成り立つというものです。多面体はトポロジカルには平面連結グラフ (planar connected graph) を 2 次元球面 $S^2 \cong \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ に描いたものである事、平面連結グラフの余白部分が成す面も考慮すると $F = L + 1$ が成り立つ事、の 2 つに注意すると、 $V - I + L = 1$ と $V - I + F = 2$ は本質的に同じ主張である事が分かります。) 因みに、この節では頂点関数を念頭に置いているので 1 粒子既約な連結 Feynman 図だけを考えていますが、1 粒子既約でない連結 Feynman 図に対しても等式(2.1.1)は成り立ちます。ついでに言うと、代数的トポロジーの観点からはループ数 L は連結グラフの 1 次 Betti 数に他ならず、任意の連結グラフに対して $L = I - V + 1$ が成り立つ事は良く知られています。

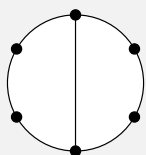
^{*3} 他の証明法としては Feynman 則を用いた次の様なものがあります。まず、頂点数 V 、内線数 I 、ループ数 L の任意の連結 Feynman 図が与えられたとしましょう。この時、Feynman 則を認めると、この図には内線の数 I だけ運動量積分が含まれる事になります。一方、各頂点には運動量保存のデルタ関数が付随するので、Feynman 図全体の全運動量保存を表すデルタ関数 1 個を除いた $V - 1$ 個の運動量積分は自明に実行出来て、最終的には $I - (V - 1)$ 個の運動量積分が残ります。ところで、ループ数 L は最終的に残る運動量積分の数に他ならないので、等式 $L = I - (V - 1) = I - V + 1$ が成り立つ事になります。

上の表から明らかですが、 V を1つ増やせば I も必ず1つ増えるので、 L を固定して V を1つ増やすという操作に対して $V - I$ は不変です。従って、最も単純な一番上の図  で $V - I + L$ を評価すれば、それが任意の1ループ連結 Feynman 図に対する $V - I + L$ を与えます。これは簡単に計算出来て、答えは上の表にある様に $V - I + L = 1$ となります。よって、 $L = 1$ のときは任意の1粒子既約な連結 Feynman 図に対して等式(2.1.1)が成り立つ事が分かりました。

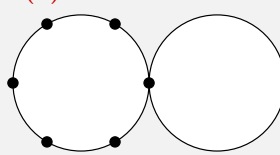
③ $L = 2$ のとき


次に $L = 2$ の場合を調べてみましょう。まず、任意の外線をもぎ取った1粒子既約な1ループ Feynman 図  が与えられたとします。この時、この Feynman 図に内線を1つだけ加えて1粒子既約な2ループ連結 Feynman 図を作る事を考えましょう。容易に分かる様に、この作り方は次の2通りしかありません。^{*4}

(a) 異なる頂点をつなぐ

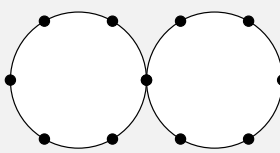
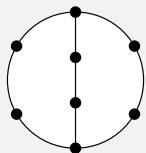


(b) 同一の頂点をつなぐ



(a)(b) どちらの場合も I を1つ増やすと L も1つ増えるので、 V を固定して I を1つ増やすという操作に対して $-I + L$ は不変です。従って、 $V - I + L$ という組み合わせは最初に与えた1ループ連結 Feynman 図  と同じ値1を取ります。

さて、上の操作で新しく挿入した内線に頂点を付け加えていけば、全ての1粒子既約な2ループ連結 Feynman 図が尽きます(下図参照):



ところで、②で見た様に L は固定して V を増やすという操作の下では $V - I$ は不変なので、 $V - I + L$ は1のままになります。以上により、 $L = 2$ のときも任意の1粒子既約な連結 Feynman 図に対して等式(2.1.1)が成り立つ事が分かりました。

④ $L = k + 1$ のとき

最後に、 $L = k$ ($k = 1, 2, \dots$) で等式(2.1.1)が成り立つと仮定して、 $L = k + 1$ の場合で成り立つかどうか考えてみましょう。まず、任意の外線をもぎ取った1粒子既約な k ループ連結 Feynman 図が与えられたとします。③でやった様に、まず V は固定してこの k ループ連結 Feynman 図に内線を1つだけ加える事で1粒子既約な $k + 1$ ループ連結 Feynman 図を作る事を考えましょう。この作り方は、(a) 異なる頂点をつなぐ、もしくは、(b) 同一の頂点をつなぐ、の2通りしか無く、③で見た様にどちらの場合でも $-I + L$ は不変に保たれます。更に、この様にして作った $k + 1$ ループ連結 Feynman 図に頂点を付け加えて行くと全ての $k + 1$ ループ連結 Feynman 図が尽きますが、②で見た様にこのとき $V - I$ は不変に保たれるので、結局、 $V - I + L$ という組み合わせは最初に与えた k ループ連結 Feynman 図と同じ値のままになります。よって、 $L = k$ で等式(2.1.1)が成り立つのなら、 $L = k + 1$ でも等式(2.1.1)が成り立つ事が分かりました。



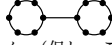
$k = 0, 1$ の場合は既に証明したので、以上で任意の外線をもぎ取った1粒子既約な連結 Feynman 図に対して等式(2.1.1)が成り立つ事が示せました。

2.1.2 ループ展開と \hbar 展開の等価性

さて、上の連結 Feynman 図に現れる内線と頂点は古典作用から読み取れる連結2点 Green 関数 (Feynman 伝播関数) と頂点関数を表すのでした。連結2点 Green 関数は2点頂点関数の逆 (に i を掛けたもの) である事を思い出すと、古典作用を

$$S[\phi] \rightarrow \frac{1}{a} S[\phi] \tag{2.1.2}$$

と $\frac{1}{a}$ 倍した場合、この $\frac{1}{a}$ 倍された理論では頂点は $\frac{1}{a}$ 倍され、内線は $\frac{1}{17a} = a$ 倍されます。この事を用いて、古典作用が $\frac{1}{a}$ 倍された理論で計算した1粒子既約な連結 Feynman 図に含まれる a の冪を勘定してみましょう。これは、頂点数 V 、内線数 I 、ループ数 L の1

^{*4} 2つの1ループ連結 Feynman 図  と  の頂点を繋ぐ事で2ループ連結 Feynman 図  を構成する事が出来ませんが、これは真ん中の内線を切断すると2つに分離する1粒子既約でない連結 Feynman 図なので、ここでは考えていません。(但し、この様な1粒子既約でない連結 Feynman 図に対しても等式(2.1.1)は成り立ちます。)

粒子既約な連結 Feynman 図に対しては次の様に評価されます:

$$(\text{頂点数 } V, \text{ 内線数 } I, \text{ ループ数 } L \text{ の 1 粒子既約な連結 Feynman 図}) \propto \left(\frac{1}{a}\right)^V a^I = a^{-V+I} = a^{L-1} \quad (2.1.3)$$

但し、最後の等号で等式 $V - I + L = 1$ を使いました。これより、1 粒子既約な連結 Feynman 図を a の冪によって分類する事は、ループ数 L で分類する事と等しい事が分かります。言い換えると、古典作用が $\frac{1}{a}$ 倍された理論で計算した頂点関数を a の関数だと思って a で冪級数展開すると、それはループ数による展開を与える事になります。これが頂点関数のループ展開 (loop expansion) です。ところで、有効作用は頂点関数の生成汎関数なので、頂点関数がループ展開出来るのであれば、有効作用もループ展開出来る事になります。これを見る為に、古典作用 $S[\phi]$ が $\frac{1}{a}$ 倍された理論で有効作用 $\Gamma[\varphi; a]$ を計算したとしましょう。この有効作用はもちろん a に依存しています。そこで、 $\Gamma[\varphi; a]$ を $a = 0$ 周りで冪級数展開しましょう:

$$\Gamma[\varphi; a] = \Gamma_0[\varphi] + a\Gamma_1[\varphi] + a^2\Gamma_2[\varphi] + \dots \quad (2.1.4)$$

これが有効作用のループ展開で、 $\Gamma_L[\varphi]$ はループ数 L の 1 粒子既約な連結 Feynman 図に対応する頂点関数の生成汎関数となります。上の展開を最初の $L + 1$ 項で打ち切る近似を L ループ近似 (L -loop approximation) と呼び、特にゼロループ近似を樹木近似 (tree-level approximation) と呼びます。

さて、上で出て来たパラメータ a ですが、このパラメータは新たに導入しなくても既に手持ちに対応物があって、それが今までずっと 1 に置いてきた \hbar です。実際、導出はしませんが、式(1.4.3)で定義した Green 関数の生成汎関数 $Z[J]$ は次の汎関数積分で与えられる事が言えます:

$$\begin{aligned} Z[J] &:= \langle 0 | \text{T exp} \left(\frac{i}{\hbar} \int d^d x \phi(x) J(x) \right) | 0 \rangle \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left[S[\phi] + \int d^d x \phi(x) J(x) \right] \right) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

但し、

$$\int \mathcal{D}\phi := \prod_x \int_{-\infty}^{\infty} d\phi(x) \quad (2.1.6)$$

また、 \mathcal{N} は $Z[0] = 1$ を保証する為の規格化因子です。容易に分かる様に、次の様に選んでおけば条件 $Z[0] = 1$ は満たされます:

$$\mathcal{N} = \left(\int \mathcal{D}\phi \exp \left(\frac{i}{\hbar} S[\phi] \right) \right)^{-1} \quad (2.1.7)$$

式(2.1.5)2行目の表式から明らかな様に、 \hbar は $\frac{1}{\hbar} S[\phi]$ の組み合わせで入って来るので、ちょうど式(2.1.2)のパラメータ a の役割を果たす事が分かります。以上により、ループ展開とは \hbar に関する冪級数展開— \hbar 展開 (\hbar expansion)—に他ならないという事が分かりました。

以下では、 $Z[J]$ が汎関数積分(2.1.5)で与えられる事は取り敢えず認めて、 \hbar が形式的に「小さい」として汎関数積分(2.1.5)を評価し、それをを用いて有効作用の \hbar 展開を導出して行きます。

2.2 有効作用の \hbar 展開

前節で外線をもぎ取った 1 粒子既約な連結 Feynman 図 (これは頂点関数を表す) のループ数による分類は、その連結 Feynman 図に含まれる \hbar の冪の次数による分類と等しいことを見ました。この事を用いて、以下では有効作用を \hbar の冪で展開することで、1 ループ近似での頂点関数を一気に全て求めましょう。次の手順で有効作用の \hbar 展開を行います:

- (i) 形式的に \hbar が「小さい」として、Green 関数の生成汎関数(2.1.5)を鞍点近似 (停留位相法) で評価する
 - (ii) 上で得た $Z[J]$ の対数を取って、連結 Green 関数の生成汎関数 $W[J] = -i\hbar \log Z[J]$ の \hbar 展開を求める
 - (iii) 上で得た $W[J]$ の汎関数 Legendre 変換を行って、有効作用 $\Gamma[\varphi] = W[J] - \int d^d x \varphi(x) J(x)$ の \hbar 展開を求める
- (i) と (ii) の計算は慣れれば割と簡単ですが、(iii) の汎関数 Legendre 変換が実はかなり面倒です。そこで、以下ではまず式(2.1.5)を最大限簡略化した 1 次元積分で上の (i) から (iii) と同様の操作を行って、その後、汎関数積分の場合へと拡張する事にしましょう。

2.2.1 おもちゃの例 1: 1 変数関数の場合

まず手始めに汎関数積分(2.1.5)を模した次の 1 次元積分で定義される 1 変数関数 $Z(J)$ を考えましょう:

$$Z(J) = \mathcal{N} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \exp\left(\frac{i}{\hbar} [S(\phi) + \phi J]\right) \quad (2.2.1)$$

但し, J は実定数, \mathcal{N} は $Z(0) = 1$ となる為の規格化定数で次の様に与えられます:

$$\mathcal{N} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\phi \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(\phi)\right) \right)^{-1} \quad (2.2.2)$$

また, $S(\phi)$ は ϕ の 1 変数関数で, 次の形を仮定します:

$$S(\phi) = \frac{1}{2!} \phi i \Delta_F^{-1} \phi - \mathcal{V}(\phi) \quad (2.2.3)$$

但し, Δ_F は定数で, $\mathcal{V}(\phi)$ は ϕ の多項式だとします. 以下, ϕ を実スカラー場, $S(\phi)$ を実スカラー場の理論の古典作用, Δ_F を Feynman 伝播関数, $\mathcal{V}(\phi)$ を相互作用項, $Z(J)$ を Green 関数の生成汎関数と見立てて, 上述の (i) から (iii) のステップに従ってこのおもちゃの 1 次元積分の理論で有効作用の \hbar 展開を求めて行く事にします.

ステップ 1: $Z(J)$ の鞍点近似

まず, \hbar が形式的に「小さい」として, 積分(2.2.1)を鞍点近似 (停留位相法) で評価して行きましょう. これは次の様にやります. まず, J を任意に固定します. この時, ϕ_0 を関数 $S(\phi) + \phi J$ の停留点, 即ち, 次の方程式の解としましょう:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (S(\phi) + \phi J) = 0 \quad (2.2.4)$$

言い換えると, ϕ_0 は次を満たします:

$$\left. \frac{\partial S(\phi)}{\partial \phi} \right|_{\phi=\phi_0} = -J \quad (2.2.5)$$

この様にして決まる ϕ_0 は勿論 J に依存するので, ϕ_0 は J の関数 $\phi_0 = \phi_0(J)$ となる事に注意しましょう.

さて, 関数 $S(\phi) + \phi J$ を $\phi = \phi_0$ 周りで Taylor 展開すると次の様になります:

$$\begin{aligned} S(\phi) + \phi J &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n}{\partial \phi^n} (S(\phi) + \phi J) \right|_{\phi=\phi_0} (\phi - \phi_0)^n \\ &= S(\phi_0) + \phi_0 J + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} S^{(n)}(\phi_0) (\phi - \phi_0)^n \quad \text{with} \quad S^{(n)}(\phi_0) = \left. \frac{\partial^n S(\phi)}{\partial \phi^n} \right|_{\phi=\phi_0} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

ここで, $\phi - \phi_0$ の 1 次の項は無い事に注意しましょう. この Taylor 展開を使うと, 積分(2.2.1)は次の様に評価する事が出来ます:

$$\begin{aligned} Z(J) &= \mathcal{N} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \exp\left(\frac{i}{\hbar} [S(\phi) + \phi J]\right) \\ &= \mathcal{N} \exp\left(\frac{i}{\hbar} [S(\phi_0) + \phi_0 J]\right) \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} S^{(n)}(\phi_0) (\phi - \phi_0)^n\right) \\ &= \mathcal{N} \exp\left(\frac{i}{\hbar} [S(\phi_0) + \phi_0 J]\right) \sqrt{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i\hbar^{\frac{n-2}{2}}}{n!} S^{(n)}(\phi_0) \xi^n\right) \\ &= \mathcal{N} \exp\left(\frac{i}{\hbar} [S(\phi_0) + \phi_0 J]\right) \sqrt{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(\frac{i}{2} S^{(2)}(\phi_0) \xi^2\right) \exp\left(\sum_{n=3}^{\infty} \frac{i\hbar^{\frac{n-2}{2}}}{n!} S^{(n)}(\phi_0) \xi^n\right) \\ &= \mathcal{N} \exp\left(\frac{i}{\hbar} [S(\phi_0) + \phi_0 J]\right) \sqrt{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(\frac{i}{2} S^{(2)}(\phi_0) \xi^2\right) \\ &\quad \times \left[1 + \left(\sum_{n=3}^{\infty} \frac{i\hbar^{\frac{n-2}{2}}}{n!} S^{(n)}(\phi_0) \xi^n\right) + \frac{1}{2!} \left(\sum_{n=3}^{\infty} \frac{i\hbar^{\frac{n-2}{2}}}{n!} S^{(n)}(\phi_0) \xi^n\right)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{N} \exp\left(\frac{i}{\hbar} [S(\phi_0) + \phi_0 J]\right) \sqrt{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(\frac{i}{2} S^{(2)}(\phi_0) \xi^2\right) \\
&\quad \times \left[1 + \hbar \left(\frac{i}{4!} S^{(4)}(\phi_0) \xi^4 + \frac{i^2}{2!(3!)^2} S^{(3)}(\phi_0) S^{(3)}(\phi_0) \xi^6\right) + O(\hbar^2)\right] \\
&= \mathcal{N} \exp\left(\frac{i}{\hbar} [S(\phi_0) + \phi_0 J]\right) \sqrt{\frac{2\pi i \hbar}{S^{(2)}(\phi_0)}} \\
&\quad \times \left[1 + \hbar \left(\frac{1}{2^3} i S^{(4)}(\phi_0) \Delta(\phi_0) \Delta(\phi_0) + \frac{5}{2^3 \cdot 3} i S^{(3)}(\phi_0) i S^{(3)}(\phi_0) \Delta(\phi_0) \Delta(\phi_0) \Delta(\phi_0)\right) + O(\hbar^2)\right] \quad (2.2.7)
\end{aligned}$$

但し、3番目の等号は変数変換 $\phi - \phi_0 = \sqrt{\hbar} \xi$ から従い、5番目の等号は指数関数の Taylor 展開から従います。また、6番目の等号は奇関数の積分はゼロになる事から従い、最後の等号は次の Gauss 型積分の積分公式から従います：

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi^{2n} \exp\left(\frac{i}{2} S^{(2)}(\phi_0) \xi^2\right) = \sqrt{\frac{2\pi i}{S^{(2)}(\phi_0)}} (2n-1)!! (\Delta(\phi_0))^n \quad \text{for } n \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad (2.2.8)$$

但し、 $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1$ は二重階乗 (double factorial) で、 $n=0$ の時はこの因子は1だと理解します。また、 $\Delta(\phi_0)$ は次式で定義されます：

$$\Delta(\phi_0) := i(S^{(2)}(\phi_0))^{-1} \quad (2.2.9)$$

結局、鞍点近似の下では $Z(J)$ は次の形を取る事が分かりました：^{*5}

$$\begin{aligned}
Z(J) &= \sqrt{2\pi i \hbar} \mathcal{N} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left[S(\phi_0) + \phi_0 J + \frac{i\hbar}{2} \log S^{(2)}(\phi_0)\right]\right) \\
&\quad \times \left[1 + \hbar \left(\frac{1}{2^3} i S^{(4)}(\phi_0) \Delta(\phi_0) \Delta(\phi_0) + \frac{5}{2^3 \cdot 3} i S^{(3)}(\phi_0) i S^{(3)}(\phi_0) \Delta(\phi_0) \Delta(\phi_0) \Delta(\phi_0)\right) + O(\hbar^2)\right] \quad (2.2.10)
\end{aligned}$$

1行目の $\phi_0 J$ の項を除いて、この関数の J 依存性は全て $\phi_0 = \phi_0(J)$ を通してのみ現れる事に注意しましょう。

さて、上の表式では大括弧の中身は \hbar の1次のオーダーまでしか書いていませんが、式(2.2.7)で行った Taylor 展開の高次の項も含めて積分公式(2.2.8)を使っていけば、原理的には \hbar の任意のオーダーまで計算する事が可能です。これから見る様に、式(2.2.10)大括弧の中身の \hbar の0次までが1ループ近似に対応し、 \hbar の1次までが2ループ近似に対応します。有効作用の \hbar 展開がどの様になされるのかを見る為に、以下では式(2.2.10)を使ってこのおもちゃの理論における有効作用を2ループまで導出する事にしましょう。

ステップ2: $W(J)$ の \hbar 展開

次に、式(2.2.10)を使って、この1次元積分のおもちゃの理論における連結 Green 関数の生成汎関数の対応物 $W(J) = -i\hbar \log Z(J)$ を計算しましょう。対数関数 $\log(1+x)$ の $x=0$ 周りでの Taylor 展開

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{for } |x| < 1 \quad (2.2.11)$$

を形式的に適用して $W(J) = -i\hbar \log Z(J)$ を \hbar の冪級数として表すと次の様になります：

$$\begin{aligned}
W(J) &= -i\hbar \log Z(J) \\
&= -i\hbar \log(\sqrt{2\pi i \hbar} \mathcal{N}) + S(\phi_0) + \phi_0 J + \frac{i\hbar}{2} \log S^{(2)}(\phi_0)
\end{aligned}$$

^{*5} 式(2.2.10)大括弧の中身の \hbar のオーダーの項は、次の2ループ連結 Feynman 図で表す事が出来ます：

$$\frac{1}{2^3} i S^{(4)}(\phi_0) \Delta(\phi_0) \Delta(\phi_0) + \frac{5}{2^3 \cdot 3} i S^{(3)}(\phi_0) i S^{(3)}(\phi_0) \Delta(\phi_0) \Delta(\phi_0) \Delta(\phi_0) = \frac{1}{2^3} \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \frac{1}{2 \cdot 3!} \text{---} \bigcirc \text{---} + \frac{1}{2^3} \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---}$$

但し、内線は $\Delta(\phi_0)$ を表し、4本の線と繋がっている頂点は $iS^{(4)}(\phi_0)$ 、3本の線と繋がっている頂点は $iS^{(3)}(\phi_0)$ を表しています。正確には今のおもちゃの例では \bigcirc と \bigcirc は区別されずに両方とも $iS^{(3)}(\phi_0) iS^{(3)}(\phi_0) \Delta(\phi_0) \Delta(\phi_0) \Delta(\phi_0)$ で表されてしましますが、場の理論ではこれらはちゃんと区別される事になります。(等式 $\frac{5}{2^3 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 3!} + \frac{1}{2^3}$ が成り立つ事に注意しましょう。) また、数因子 $\frac{1}{2^3}$, $\frac{1}{2 \cdot 3!}$, $\frac{1}{2^3}$ には幾何学的・代数的意味があつて、これらの数因子の分母は上の連結 Feynman 図を不変に保つ有限群 G の位数 $|G|$ (簡単に言うと連結 Feynman 図を不変に保つ離散的対称性変換の総数) を表しています。この様な数因子を対称性因子 (symmetry factor) と呼び、通常の Feynman 則に基づく摂動論ではまず連結 Feynman 図を描いて、「この図形の持つ対称性は何だろう？」などと考えてこの数因子を決定します。しかし、このやり方は相当な経験を積まないと直ぐに間違えてしまうので非常に危険です。慣れないうちは図形の対称性など考えずに、Taylor 展開の係数 $\frac{1}{n!}$ や積分公式(2.2.8)の係数 $(2n-1)!!$ などが掛け合わさって最終的に残る因子として対称性因子を決定するのが無難です。

$$\begin{aligned}
& -i\hbar \log \left[1 + \hbar \left(\frac{1}{2^3} iS^{(4)}(\phi_0) \Delta(\phi_0) \Delta(\phi_0) + \frac{5}{2^3 \cdot 3} iS^{(3)}(\phi_0) iS^{(3)}(\phi_0) \Delta(\phi_0) \Delta(\phi_0) \Delta(\phi_0) \right) + O(\hbar^2) \right] \\
&= -i\hbar \log(\sqrt{2\pi i\hbar} \mathcal{N}) \\
&+ S(\phi_0) + \phi_0 J \\
&+ \frac{i\hbar}{2} \log S^{(2)}(\phi_0) \\
&- i\hbar^2 \left(\frac{1}{2^3} iS^{(4)}(\phi_0) \Delta(\phi_0) \Delta(\phi_0) + \frac{5}{2^3 \cdot 3} iS^{(3)}(\phi_0) iS^{(3)}(\phi_0) \Delta(\phi_0) \Delta(\phi_0) \Delta(\phi_0) \right) + O(\hbar^3)
\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

但し、3番目の等号では Taylor 展開(2.2.11)を使って \hbar の 2 次までの項を残しました。 $W(J)$ の計算はこれで完了です。この $W(J)$ に関しても、 $\phi_0 J$ の項を除いて J 依存性は $\phi_0 = \phi_0(J)$ を通してのみ現れる事に注意しましょう。

最後に、規格化因子 \mathcal{N} について 1 つ注意を与えておきます。 \mathcal{N} は条件 $Z(0) = 1$ を満たす様に既に式(2.2.2)によって決まっていますが、この表式は一旦忘れて、 \mathcal{N} を条件 $W(0) = -i\hbar \log Z(0) = 0$ を満たす様に決めても全く同じ \mathcal{N} になります。ところで、 $W(0) = 0$ は「関数 $W(J)$ には J に依存しない定数項は無い」という事を意味するので、条件 $W(0) = 0$ は「 $W(J)$ を計算して行った時に J に依存しない定数項が出て来た場合は何も考えずに捨てて良い」という事を保証します。例えば、式(2.2.12)の $-i\hbar \log(\sqrt{2\pi i\hbar} \mathcal{N})$ や他の項から出て来る定数項は何も考えずに捨てて良いです。この視点は実際に $W(J)$ を計算する時に便利なので知っておくと良いでしょう。

ステップ 3: $W(J)$ の Legendre 変換

最後に $W(J)$ の Legendre 変換をしましょう。 Lagrangian から Hamiltonian を作る時にやる様に、 $W(J)$ の Legendre 変換は

- (i) J に共役な変数 φ を $\varphi = \frac{\partial W(J)}{\partial J}$ で導入し、
- (ii) 方程式 $\varphi = \frac{\partial W(J)}{\partial J}$ を J について解いて J を φ の関数 $J = J(\varphi)$ として表し、
- (iii) $\Gamma(\varphi) = W(J) - \varphi J$ を計算する

で得られます。しかしながら、今の場合方程式 $\varphi = \frac{\partial W(J)}{\partial J}$ を J について解くのは非常に困難です。これは計算してみれば直ぐに分かります。しかし幸いな事に、 $W(J)$ の J 依存性は ($\phi_0 J$ の項を除いて) 全て $\phi_0 = \phi_0(J)$ を通してのみ現れるので、方程式 $\varphi = \frac{\partial W(J)}{\partial J}$ を ϕ_0 について解いて ϕ_0 を φ の関数として表し、それを用いて $W(J) - \varphi J$ を計算すれば良いです。これは次の様にやります:

① ϕ_0 を φ で表す

まず最初のステップは J に共役な変数 φ を ϕ_0 の関数として表す事です。その前に、すぐ後で必要になるので、まず $\phi_0 = \phi_0(J)$ の J 微分を計算しておきましょう。まず、式(2.2.5)から等式 $0 = \frac{\partial S(\phi)}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_0(J)} + J = S^{(1)}(\phi_0(J)) + J$ が従いますが、合成関数の微分を使ってこの両辺を J で微分すると次が得られます:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial J} \left(\frac{\partial S(\phi)}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_0} + J \right) \\
&= \frac{\partial^2 S(\phi)}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi=\phi_0} \frac{\partial \phi_0}{\partial J} + 1
\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

これより $\frac{\partial \phi_0}{\partial J}$ は次の様に表される事が分かります:

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial J} = -(S^{(2)}(\phi_0))^{-1} = i\Delta(\phi_0) \tag{2.2.14}$$

但し、2番目の等号で式(2.2.9)を用いました。次にこれを使って J に共役な変数 $\varphi = \frac{\partial W(J)}{\partial J}$ を計算しましょう。式(2.2.12)と合成関数の微分を使うと、 φ は \hbar の 1 次のオーダーで次の様になります:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{\partial W(J)}{\partial J} \\
&= \frac{\partial}{\partial J} \left(S(\phi_0) + \phi_0 J + \frac{i\hbar}{2} \log S^{(2)}(\phi_0) + O(\hbar^2) \right) \\
&= \frac{\partial S(\phi)}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_0} \frac{\partial \phi_0}{\partial J} + \frac{\partial \phi_0}{\partial J} J + \phi_0 + \frac{i\hbar}{2} (S^{(2)}(\phi_0))^{-1} \frac{\partial^3 S(\phi)}{\partial \phi^3} \Big|_{\phi=\phi_0} \frac{\partial \phi_0}{\partial J} + O(\hbar^2) \\
&= \left(\frac{\partial S(\phi)}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_0} + J \right) \frac{\partial \phi_0}{\partial J} + \phi_0 + \frac{i\hbar}{2} \Delta(\phi_0) S^{(3)}(\phi_0) \Delta(\phi_0) + O(\hbar^2) \\
&= \phi_0 + \frac{\hbar}{2} \Delta(\phi_0) iS^{(3)}(\phi_0) \Delta(\phi_0) + O(\hbar^2)
\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

ここで、3行目で合成関数の微分を行い、4行目で式(2.2.14)を使い、5行目で式(2.2.5)を使いました。次にこれを ϕ_0 について解きます。式(2.2.15)より $\varphi = \phi_0 + O(\hbar)$ 、即ち、 $\phi_0 = \varphi + O(\hbar)$ である事が分かるので、これを使って式(2.2.15)を ϕ_0 について逐次的に解くと、 \hbar の1次のオーダーで次のようになります:

$$\begin{aligned}\phi_0 &= \varphi - \frac{\hbar}{2}\Delta(\phi_0)iS^{(3)}(\phi_0)\Delta(\phi_0) + O(\hbar^2) \\ &= \varphi - \frac{\hbar}{2}\Delta(\varphi + O(\hbar))iS^{(3)}(\varphi + O(\hbar))\Delta(\varphi + O(\hbar)) + O(\hbar^2) \\ &= \varphi - \frac{\hbar}{2}\Delta(\varphi)iS^{(3)}(\varphi)\Delta(\varphi) + O(\hbar^2)\end{aligned}\quad (2.2.16)$$

ここで、2行目で $\phi_0 = \varphi + O(\hbar)$ を使い、3行目で Taylor 展開を行って \hbar の1次のオーダーの項だけ残しました。以上より、 \hbar の1次のオーダーでは ϕ_0 は φ の関数として次の様に表される事が分かりました:

$$\phi_0 = \varphi + \delta\varphi \quad \text{with} \quad \delta\varphi = -\frac{\hbar}{2}\Delta(\varphi)iS^{(3)}(\varphi)\Delta(\varphi) + O(\hbar^2)\quad (2.2.17)$$

② J を $J = -\frac{\partial S(\phi)}{\partial \phi}\Big|_{\phi=\phi_0}$ から決まる ϕ_0 の関数 $J = J(\phi_0) = J(\varphi + \delta\varphi)$ と思って $\Gamma(\varphi)$ を計算する

次に J も φ の関数として表す事を考えましょう。式(2.2.5)で見た様に、 ϕ_0 は J を与えた時の方程式 $S^{(1)}(\phi_0) = J$ の解として定義されていますが、これを見方を変えて、 ϕ_0 を与えた時に J が ϕ_0 の関数 $J = J(\phi_0)$ として方程式 $J(\phi_0) = S^{(1)}(\phi_0)$ により定まると読み替えましょう。こうすると、式(2.2.17)により ϕ_0 は φ の関数として表す事が出来ているので、 J も φ の関数として表す事が可能です。この「 J は ϕ_0 の関数 $J = J(\phi_0)$ である」という理解の下、式(2.2.12)の $W(J)$ を $\Gamma(\varphi) = W(J) - \varphi J$ にそのまま代入すると次が得られます:

$$\begin{aligned}\Gamma(\varphi) &= W(J(\phi_0)) - \varphi J(\phi_0) \\ &= -i\hbar \log(\sqrt{2\pi i\hbar\mathcal{N}}) \\ &\quad + S(\phi_0) + (\phi_0 - \varphi)J(\phi_0) \\ &\quad + \frac{i\hbar}{2} \log S^{(2)}(\phi_0) \\ &\quad - i\hbar^2 \left(\frac{1}{2^3} iS^{(4)}(\phi_0)\Delta(\phi_0)\Delta(\phi_0) + \frac{5}{2^3 \cdot 3} iS^{(3)}(\phi_0)iS^{(3)}(\phi_0)\Delta(\phi_0)\Delta(\phi_0)\Delta(\phi_0) \right) \\ &\quad + O(\hbar^3)\end{aligned}\quad (2.2.18)$$

次に、 $\phi_0 = \varphi + \delta\varphi$ を使って、 $S(\phi_0)$ 、 $(\phi_0 - \varphi)J(\phi_0)$ 、 $\frac{i\hbar}{2} \log S^{(2)}(\phi_0)$ を $\phi_0 = \varphi$ 周りで Taylor 展開して φ の関数として表しましょう。 \hbar の2次のオーダーまでで計算すると、これは次のようになります:

$$\begin{aligned}S(\phi_0) &= S(\varphi + \delta\varphi) \\ &= S(\varphi) + S^{(1)}(\varphi)\delta\varphi + \frac{1}{2!}S^{(2)}(\varphi)\delta\varphi\delta\varphi + O(\hbar^3) \\ &= S(\varphi) - J(\varphi)\delta\varphi + \frac{1}{2!}S^{(2)}(\varphi)\delta\varphi\delta\varphi + O(\hbar^3)\end{aligned}\quad (2.2.19a)$$

$$\begin{aligned}(\phi_0 - \varphi)J(\phi_0) &= J(\varphi + \delta\varphi)\delta\varphi \\ &= J(\varphi)\delta\varphi + \frac{\partial J(\varphi)}{\partial \varphi}\delta\varphi\delta\varphi + O(\hbar^3) \\ &= J(\varphi)\delta\varphi - S^{(2)}(\varphi)\delta\varphi\delta\varphi + O(\hbar^3)\end{aligned}\quad (2.2.19b)$$

$$\begin{aligned}\frac{i\hbar}{2} \log S^{(2)}(\phi_0) &= \frac{i\hbar}{2} \log S^{(2)}(\varphi + \delta\varphi) \\ &= \frac{i\hbar}{2} \log S^{(2)}(\varphi) + \frac{i\hbar}{2} (S^{(2)}(\varphi))^{-1} S^{(3)}(\varphi)\delta\varphi + O(\hbar^3) \\ &= \frac{i\hbar}{2} \log S^{(2)}(\varphi) + \frac{\hbar}{2} \Delta(\varphi)S^{(3)}(\varphi)\delta\varphi + O(\hbar^3)\end{aligned}\quad (2.2.19c)$$

但し、3行目と6行目で式(2.2.5)を使い、9行目で式(2.2.14)を使いました。式(2.2.17)を使ってこれらを式(2.2.18)に代入し、 \hbar の2次のオーダーでは式(2.2.18)の下から2行目の項は引数を単に ϕ_0 から φ に変えれば良い事、及び等式 $\frac{5}{2^3 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 3!} + \frac{1}{2^3}$ に注意すると、 $\Gamma(\varphi)$ は次の様に表されます:*6

$$\begin{aligned}\Gamma(\varphi) &= -i\hbar \log(\sqrt{2\pi i\hbar\mathcal{N}}) \\ &\quad + S(\varphi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i\hbar}{2} \log S^{(2)}(\varphi) \\
& - i\hbar^2 \left(\frac{1}{2^3} iS^{(4)}(\varphi) \Delta(\varphi) \Delta(\varphi) + \frac{1}{2 \cdot 3!} iS^{(3)}(\varphi) iS^{(3)}(\varphi) \Delta(\varphi) \Delta(\varphi) \Delta(\varphi) \right) \\
& + O(\hbar^3)
\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

最後に、式(2.2.20)第1項目の定数項について注意を与えておきましょう。定数 \mathcal{N} は規格化条件 $Z(0) = 1$ または $W(0) = 0$ を満たす様に決められていましたが、これは $\Gamma(0) = 0$ を満たす様に決めても良いです。言い換えると、 φ に依存しない定数項が出て来た場合は、何も考えずに捨てて構いません。これ以降、 φ に依存しない定数項は特に断らずに捨てて行く事にします。

さて、式(2.2.20)から φ に依存しない定数項を差っ引いたものがこのおもちゃの理論における2ループ有効作用なのですが、この表式を摂動計算で使い易い様に書き換えましょう。まず、式(2.2.3)を使うと、導関数 $S^{(n)}(\varphi)$ は次の様に表される事が分かります：

$$\begin{aligned}
S^{(2)}(\varphi) &= \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{1}{2!} \varphi i\Delta_F^{-1} \varphi - \mathcal{V}(\varphi) \right) \\
&= i\Delta_F^{-1} - \mathcal{V}^{(2)}(\varphi) \\
&= i\Delta_F^{-1} \left(1 - \Delta_F \left[-i\mathcal{V}^{(2)}(\varphi) \right] \right)
\end{aligned} \tag{2.2.21a}$$

$$S^{(n)}(\varphi) = -\mathcal{V}^{(n)}(\varphi) \quad \text{for } n \geq 3 \tag{2.2.21b}$$

また、式(2.2.21a)を使うと、 $\log S^{(2)}(\varphi)$ と $\Delta(\varphi)$ は次の様に級数展開される事が分かります：

$$\begin{aligned}
\log S^{(2)}(\varphi) &= \log \left(i\Delta_F^{-1} \left(1 - \Delta_F \left[-i\mathcal{V}^{(2)}(\varphi) \right] \right) \right) \\
&= \log \left(i\Delta_F^{-1} \right) + \log \left(1 - \Delta_F \left[-i\mathcal{V}^{(2)}(\varphi) \right] \right) \\
&= \log \left(i\Delta_F^{-1} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\Delta_F \left[-i\mathcal{V}^{(2)}(\varphi) \right] \right)^n
\end{aligned} \tag{2.2.22a}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(\varphi) &= i(S^{(2)}(\varphi))^{-1} \\
&= i \left(i\Delta_F^{-1} \left(1 - \Delta_F \left[-i\mathcal{V}^{(2)}(\varphi) \right] \right) \right)^{-1} \\
&= i \left(1 - \Delta_F \left[-i\mathcal{V}^{(2)}(\varphi) \right] \right)^{-1} \frac{1}{i} \Delta_F \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\Delta_F \left[-i\mathcal{V}^{(2)}(\varphi) \right] \right)^n \Delta_F
\end{aligned} \tag{2.2.22b}$$

但し、式(2.2.22a)2行目で対数関数の Taylor 展開 $\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ を使い、式(2.2.22b)4行目で幾何級数展開 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ を使いました。結局、 $\Gamma(\varphi)$ の \hbar 展開は次の様になる事が分かりました：

$$\Gamma(\varphi) = \Gamma_0(\varphi) + \hbar \Gamma_1(\varphi) + \hbar^2 \Gamma_2(\varphi) + O(\hbar^3) \tag{2.2.23}$$

但し、

$$i\Gamma_0(\varphi) = iS(\varphi) = -\frac{1}{2!} \varphi i\Delta_F^{-1} \varphi - i\mathcal{V}(\varphi) \tag{2.2.24a}$$

$$i\Gamma_1(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \left(\Delta_F \left[-i\mathcal{V}^{(2)}(\varphi) \right] \right)^n \tag{2.2.24b}$$

$$i\Gamma_2(\varphi) = \frac{1}{2^3} \left[-i\mathcal{V}^{(4)}(\varphi) \right] \Delta(\varphi) \Delta(\varphi) + \frac{1}{2 \cdot 3!} \left[-i\mathcal{V}^{(3)}(\varphi) \right]^2 \Delta(\varphi) \Delta(\varphi) \Delta(\varphi) \tag{2.2.24c}$$

これがこのおもちゃの理論における有効作用の2ループマスター公式です。

例：おもちゃの φ^4 理論の2ループ有効作用

以上、一般論をやってきたので、ここで簡単な例を挙げておきましょう。ポテンシャルが次で与えられるおもちゃの φ^4 理論を考えます：

$$\mathcal{V}(\varphi) = \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \tag{2.2.25}$$

*6 $Z(J)$ や $W(J)$ に含まれていた1粒子既約でない2ループ連結 Feynman 図  の寄与は式(2.2.19a)–(2.2.19c)の \hbar の2次の項と上手く相殺します。

式(2.2.22b)を使ってこれを式(2.2.24a)–(2.2.24c)に代入すると、次が得られます:

$$i\Gamma_0(\varphi) = -\frac{1}{2!}\varphi\Delta_F^{-1}\varphi + \frac{-i\lambda}{4!}\varphi^4 \quad (2.2.26a)$$

$$i\Gamma_1(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^n}{2^{n+1}n} \Delta_F^n \varphi^{2n} \quad (2.2.26b)$$

$$i\Gamma_2(\varphi) = \sum_{\substack{n,m=0 \\ n+m \neq 0}}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^{n+m+1}}{2^{n+m+3}} \Delta_F^{n+m+2} \varphi^{2(n+m)} + \sum_{n,m,l=0}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^{n+m+l+2}}{2^{n+m+l+1} \cdot 3!} \Delta_F^{n+m+l+3} \varphi^{2(n+m+l+1)} \quad (2.2.26c)$$

但し、 φ に依存しない定数項は捨てました。(φ^4 理論の場合、 $\mathcal{V}^{(4)}(\varphi) = \lambda$ が定数なので式(2.2.24c)を使うと式(2.2.22b)の $n = 0$ の項から φ に依存しない定数項が出て来る事に注意しましょう。)

次にこの有効作用を使って頂点関数と連結2点Green関数を計算してみましょう。まず、このおもちゃの理論に於いては、頂点関数は有効作用の $\varphi = 0$ での微係数で与えられます:

$$\Gamma^{(n)} = \left. \frac{\partial^n \Gamma(\varphi)}{\partial \varphi^n} \right|_{\varphi=0} \quad (2.2.27)$$

式(2.2.26a)–(2.2.26c)を使ってこの微係数を計算すると、2点頂点関数と4点頂点関数は2ループ近似で次の様になる事が分かります:

$$i\Gamma^{(2)} = -\Delta_F^{-1} + \hbar \frac{(-i\lambda)}{2} \Delta_F + \hbar^2 \frac{5(-i\lambda)^2}{12} \Delta_F^3 + O(\hbar^3) \quad (2.2.28a)$$

$$i\Gamma^{(4)} = (-i\lambda) + \hbar \frac{3(-i\lambda)^2}{2} \Delta_F^2 + \hbar^2 \frac{21(-i\lambda)^3}{4} \Delta_F^4 + O(\hbar^3) \quad (2.2.28b)$$

次に連結2点Green関数を計算してみましょう。これは2点頂点関数の逆数に i を掛けたものなので、 \hbar の2次のオーダーでは次の様になります:

$$\begin{aligned} G_{\text{con}}^{(2)} &= \frac{i}{\Gamma^{(2)}} \\ &= \frac{1}{\Delta_F^{-1} - \hbar \frac{(-i\lambda)}{2} \Delta_F - \hbar^2 \frac{5(-i\lambda)^2}{12} \Delta_F^3 + O(\hbar^3)} \\ &= \frac{\Delta_F}{1 - \left(\hbar \frac{(-i\lambda)}{2} \Delta_F^2 + \hbar^2 \frac{5(-i\lambda)^2}{12} \Delta_F^4 + O(\hbar^3) \right)} \\ &= \Delta_F \left[1 + \left(\hbar \frac{(-i\lambda)}{2} \Delta_F^2 + \hbar^2 \frac{5(-i\lambda)^2}{12} \Delta_F^4 + O(\hbar^3) \right) + \left(\hbar \frac{(-i\lambda)}{2} \Delta_F^2 + \hbar^2 \frac{5(-i\lambda)^2}{12} \Delta_F^4 + O(\hbar^3) \right)^2 + \dots \right] \\ &= \Delta_F \left[1 + \hbar \frac{(-i\lambda)}{2} \Delta_F^2 + \hbar^2 \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{2^2} \right) (-i\lambda)^2 \Delta_F^4 + O(\hbar^3) \right] \\ &= \Delta_F + \hbar \frac{(-i\lambda)}{2} \Delta_F^3 + \hbar^2 \frac{2(-i\lambda)^2}{3} \Delta_F^5 + O(\hbar^3) \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

最後に、上の結果をFeynman図で表してみよう。まず今の場合、古典作用 $S(\varphi) = \frac{1}{2!}\varphi i\Delta_F^{-1}\varphi - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$ から読み取れる頂点関数は、2点頂点関数が $\left. \frac{\partial^2 S(\varphi)}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=0} = i\Delta_F^{-1}$ 、4点頂点関数が $\left. \frac{\partial^4 S(\varphi)}{\partial \varphi^4} \right|_{\varphi=0} = -\lambda$ で、他の頂点関数は全てゼロです。連結2点Green関数は2点頂点関数の逆に i を掛けたものなので、古典作用から読み取れる連結2点Green関数は $\frac{i}{i\Delta_F^{-1}} = \Delta_F$ となります。Feynman図では、この古典作用から読み取れる連結2点Green関数と4点頂点関数に i を掛けたものを次の図で表します:

$$\Delta_F = \text{---} \quad (2.2.30a)$$

$$-i\lambda = \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \quad (2.2.30b)$$

但し、赤色のバツテン(\times)は外線をもぎ取る操作を表します。この記法を使うと、例えば2点頂点関数に i を掛けたもの(2.2.28a)と連結2点Green関数(2.2.29)は次の図で表す事が出来ます。*7

$$i\Gamma^{(2)} = - \left(\text{---} \right)^{-1} + \hbar \left(\frac{1}{2} \text{---} \times \text{---} \right) + \hbar^2 \left(\frac{1}{3!} \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \times \text{---} + \frac{1}{2^2} \text{---} \times \text{---} \right) + O(\hbar^3) \quad (2.2.31a)$$

*7 正確にはこのおもちゃの例では $\text{---} \times \text{---} \times \text{---} \times \text{---}$ や $\text{---} \times \text{---} \times \text{---}$ は区別されずに全て $(-i\lambda)^2 \Delta_F^3$ で表されてしまいますが、場の理論ではちゃんと区別されます。

$$G_{\text{con}}^{(2)} = \text{---} + \hbar \left(\frac{1}{2} \text{---} \circ \text{---} \right) + \hbar^2 \left(\frac{1}{3!} \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \frac{1}{2^2} \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \frac{1}{2^2} \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \right) + O(\hbar^3) \quad (2.2.31b)$$

実際、式(2.2.30a)(2.2.30b)に従って内線と頂点を全て掛け合わせていけば、上の図が式(2.2.28a)(2.2.29)を再現する事は直ぐに分かります。この時、等式 $\frac{1}{3!} + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{12}$ 及び $\frac{1}{3!} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{2}{3}$ が成り立つ事に注意しましょう。

2.2.2 おもちゃの例 2: N 変数関数の場合

前節では 1 次元積分のおもちゃの例で有効作用の \hbar 展開をやってみました。この節では前節の内容を N 次元積分に拡張したものでもうしばらく遊んでみる事にします。今から見る様に、これが出来れば汎関数積分への拡張はたやすく行う事が出来ます。まず、Green 関数の生成汎関数(2.1.5)を模した次の N 次元積分で定義される N 変数関数 $Z(\mathbf{J})$ を考えましょう:

$$Z(\mathbf{J}) = \mathcal{N} \left[\prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_j \right] \exp \left(\frac{i}{\hbar} [S(\phi) + \phi \cdot \mathbf{J}] \right) \quad (2.2.32)$$

但し、 $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_N)$ 、 $\mathbf{J} = (J_1, \dots, J_N)$ は N 次元実ベクトルで、 \mathcal{N} は $Z(\mathbf{0}) = 1$ となる為の規格化定数で次で与えられます:

$$\mathcal{N} = \left(\left[\prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_j \right] \exp \left(\frac{i}{\hbar} S(\phi) \right) \right)^{-1} \quad (2.2.33)$$

また、 $S(\phi)$ は ϕ の N 変数関数で、実スカラー場の理論の古典作用を真似て次の形を仮定します:

$$\begin{aligned} S(\phi) &= \frac{1}{2!} \phi \cdot i\Delta_{\text{F}}^{-1} \phi - \mathcal{V}(\phi) \\ &= \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \phi_j i(\Delta_{\text{F}}^{-1})_{jk} \phi_k - \mathcal{V}(\phi) \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

ここで、 $\Delta_{\text{F}} = (\Delta_{\text{F}jk})$ は $N \times N$ の正則行列で、 $\Delta_{\text{F}}^{-1} = ((\Delta_{\text{F}}^{-1})_{jk})$ は Δ_{F} の逆行列です。また、 $\mathcal{V}(\phi)$ は ϕ の適当な多項式です。以下では、前節でやった様にまず $Z(\mathbf{J})$ を鞍点近似(停留位相法)で評価し、それを用いて $W(\mathbf{J}) = -i\hbar \log Z(\mathbf{J})$ 及び $\Gamma(\varphi) = W(\mathbf{J}) - \varphi \cdot \mathbf{J}$ の \hbar 展開を求める事にします。計算の流れは前節と全く同じなので、以下では主要な計算だけを書く事にします。また、前節では 2 ループ近似まで計算しましたが、この節では簡単の為 1 ループ近似で留めておく事にします。

まず積分(2.2.32)を鞍点近似(停留位相法)で評価しましょう。その為に、まず $\phi_0 = (\phi_{01}, \dots, \phi_{0N})$ を次の方程式の解としましょう:

$$\frac{\partial}{\partial \phi_j} (S(\phi) + \phi \cdot \mathbf{J}) = 0 \quad (2.2.35)$$

即ち、 ϕ_0 は次を満たすとします:

$$\left. \frac{\partial S(\phi)}{\partial \phi_j} \right|_{\phi=\phi_0} = -J_j \quad (2.2.36)$$

この ϕ_0 を用いて関数 $S(\phi) + \phi \cdot \mathbf{J}$ を $\phi = \phi_0$ 周りで多変数関数 Taylor 展開すると次の様になります:

$$\begin{aligned} S(\phi) + \phi \cdot \mathbf{J} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j_1=1}^N \cdots \sum_{j_n=1}^N \frac{\partial^n}{\partial \phi_{j_1} \cdots \partial \phi_{j_n}} (S(\phi) + \phi \cdot \mathbf{J}) \Big|_{\phi=\phi_0} (\phi_{j_1} - \phi_{0j_1}) \cdots (\phi_{j_n} - \phi_{0j_n}) \\ &= S(\phi_0) + \phi_0 \cdot \mathbf{J} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j_1=1}^N \cdots \sum_{j_n=1}^N S_{j_1 \cdots j_n}^{(n)}(\phi_0) (\phi_{j_1} - \phi_{0j_1}) \cdots (\phi_{j_n} - \phi_{0j_n}) \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

但し、

$$S_{j_1 \cdots j_n}^{(n)}(\phi_0) := \left. \frac{\partial^n S(\phi)}{\partial \phi_{j_1} \cdots \partial \phi_{j_n}} \right|_{\phi=\phi_0} \quad (2.2.38)$$

展開係数 $S_{j_1 \cdots j_n}^{(n)}(\phi_0)$ は添え字 j_1, \dots, j_n の入れ替えに対して完全対称である事に注意しましょう。

さて、 \hbar が形式的に「小さい」として、多変数関数 Taylor 展開(2.2.37)を積分(2.2.32)に代入して \hbar の幂で展開して行くと次のようになります:

$$\begin{aligned}
Z(\mathbf{J}) &= \mathcal{N} \left[\prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_j \right] \exp \left(\frac{i}{\hbar} [S(\phi) + \phi \cdot \mathbf{J}] \right) \\
&= \mathcal{N} \exp \left(\frac{i}{\hbar} [S(\phi_0) + \phi_0 \cdot \mathbf{J}] \right) \left[\prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_j \right] \exp \left(\frac{i}{\hbar} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j_1=1}^N \cdots \sum_{j_n=1}^N S_{j_1 \cdots j_n}^{(n)}(\phi_0) (\phi_{j_1} - \phi_{0j_1}) \cdots (\phi_{j_n} - \phi_{0j_n}) \right) \\
&= \mathcal{N} \exp \left(\frac{i}{\hbar} [S(\phi_0) + \phi_0 \cdot \mathbf{J}] \right) \left[\hbar^{\frac{N}{2}} \prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_j \right] \exp \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i\hbar^{\frac{n-2}{2}}}{n!} \sum_{j_1=1}^N \cdots \sum_{j_n=1}^N S_{j_1 \cdots j_n}^{(n)}(\phi_0) \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_n} \right) \\
&= \mathcal{N} \exp \left(\frac{i}{\hbar} [S(\phi_0) + \phi_0 \cdot \mathbf{J}] \right) \\
&\quad \times \left[\hbar^{\frac{N}{2}} \prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_j \right] \exp \left(\frac{i}{2!} \sum_{j_1=1}^N \sum_{j_2=1}^N S_{j_1 j_2}^{(2)}(\phi_0) \xi_{j_1} \xi_{j_2} \right) \exp \left(\sum_{n=3}^{\infty} \frac{i\hbar^{\frac{n-2}{2}}}{n!} \sum_{j_1=1}^N \cdots \sum_{j_n=1}^N S_{j_1 \cdots j_n}^{(n)}(\phi_0) \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_n} \right) \\
&= \mathcal{N} \exp \left(\frac{i}{\hbar} [S(\phi_0) + \phi_0 \cdot \mathbf{J}] \right) \left[\hbar^{\frac{N}{2}} \prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_j \right] \exp \left(\frac{i}{2!} \sum_{j_1=1}^N \sum_{j_2=1}^N S_{j_1 j_2}^{(2)}(\phi_0) \xi_{j_1} \xi_{j_2} \right) [1 + O(\hbar)] \\
&= \mathcal{N} \exp \left(\frac{i}{\hbar} [S(\phi_0) + \phi_0 \cdot \mathbf{J}] \right) \sqrt{\frac{(2\pi i \hbar)^N}{\det S^{(2)}(\phi_0)}} [1 + O(\hbar)] \tag{2.2.39}
\end{aligned}$$

但し、3行目で変数変換 $\phi_j - \phi_{0j} = \sqrt{\hbar} \xi_j$ を行い、5行目で指数関数の Taylor 展開を行い、6行目で次の積分公式を使いました:^{*8}

$$\left[\prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_j \right] \exp \left(\frac{i}{2} \sum_{j_1=1}^N \sum_{j_2=1}^N S_{j_1 j_2}^{(2)}(\phi_0) \xi_{j_1} \xi_{j_2} \right) = \sqrt{\frac{(2\pi i)^N}{\det S^{(2)}(\phi_0)}} \tag{2.2.40}$$

ここで、 $S^{(2)}(\phi_0)$ は、 jk 成分が $S_{jk}^{(2)}(\phi_0)$ で与えられる N 次正方形行列を表します。 $Z(\mathbf{J})$ の鞍点近似 (停留位相法) は以上で完了です。

次に、連結 Green 関数の生成汎関数の対応物 $W(\mathbf{J}) = -i\hbar \log Z(\mathbf{J})$ を計算しましょう。式(2.2.39)の対数を取って \hbar の1次までで計算すると次のようになります:

$$\begin{aligned}
W(\mathbf{J}) &= -i\hbar \log Z(\mathbf{J}) \\
&= -i\hbar \log \left(\sqrt{(2\pi i \hbar)^N \mathcal{N}} \right) + S(\phi_0) + \phi_0 \cdot \mathbf{J} + \frac{i\hbar}{2} \log \det S^{(2)}(\phi_0) + O(\hbar^2) \tag{2.2.41}
\end{aligned}$$

$W(\mathbf{J})$ の \hbar 展開はこれで完了です。

最後に $W(\mathbf{J})$ を Legendre 変換して有効作用の対応物 $\Gamma(\varphi) = W(\mathbf{J}) - \varphi \cdot \mathbf{J}$ を求めましょう。まず、合成関数の微分を使って \mathbf{J} に共役な変数 $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ を \hbar の0次までで計算すると次のようになります:^{*9}

$$\varphi_j = \frac{\partial W(\mathbf{J})}{\partial J_j}$$

^{*8} 2ループ有効作用まで求める場合は、Wick の定理を使って式(2.2.39)の $O(\hbar)$ の項を計算する必要があります。余力のある人は自分でやってみましょう。

^{*9} 2ループ有効作用まで求める場合は、式(2.2.42)の $O(\hbar)$ の項まで計算する必要があります。この時、任意の正則な行列値関数 $M(t)$ に対して成り立つ次の Jacobi の公式 (Jacobi's formula) が必要になります:

$$\frac{d}{dt} \log \det M(t) = \text{Tr} \left(M^{-1}(t) \dot{M}(t) \right)$$

但し、ドット ($\dot{}$) は t 微分を表します。この公式は次の様に微分の定義を用いれば簡単に証明出来ます:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \log \det M(t) &= \frac{1}{\det M(t)} \frac{d}{dt} \det M(t) = \frac{1}{\det M(t)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\det M(t+\epsilon) - \det M(t)}{\epsilon} \\
&= \frac{1}{\det M(t)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\det(M(t) + \epsilon \dot{M}(t) + O(\epsilon^2)) - \det M(t)}{\epsilon} = \frac{1}{\det M(t)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\det(M(t)(\mathbf{1} + \epsilon M^{-1}(t) \dot{M}(t) + O(\epsilon^2))) - \det M(t)}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\det(\mathbf{1} + \epsilon M^{-1}(t) \dot{M}(t) + O(\epsilon^2)) - 1}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(1 + \epsilon \text{Tr}(M^{-1}(t) \dot{M}(t)) + O(\epsilon^2)) - 1}{\epsilon} = \text{Tr} \left(M^{-1}(t) \dot{M}(t) \right)
\end{aligned}$$

ここで、3番目の等号で Taylor 展開を行い、4番目の等号で行列式の性質 $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ を使いました。5番目の等号は行列式の性質 $\det(\mathbf{1} + \epsilon A) = 1 + \epsilon \text{Tr} A + O(\epsilon^2)$ から従います。この Jacobi の公式と合成関数の微分を使えば、前節の式(2.2.15)の対応物が得られます。余力のある人は自分で計算してみましょう。

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial J_j} (S(\phi_0) + \phi_{0k} J_k + O(\hbar)) \\
&= \left. \frac{\partial S(\phi)}{\partial \phi_k} \right|_{\phi=\phi_0} \frac{\partial \phi_{0k}}{\partial J_j} + \frac{\partial \phi_{0k}}{\partial J_j} J_k + \phi_{0k} \delta_{kj} + O(\hbar) \\
&= \left(\left. \frac{\partial S(\phi)}{\partial \phi_k} \right|_{\phi=\phi_0} + J_k \right) \frac{\partial \phi_{0k}}{\partial J_j} + \phi_{0j} + O(\hbar) \\
&= \phi_{0j} + O(\hbar)
\end{aligned} \tag{2.2.42}$$

但し, 5 行目で式(2.2.36)を使いました. よって, $\phi_0 = \varphi + O(\hbar)$ である事が分かります. 前節の結果(2.2.17)を真似てこれを $\phi = \varphi + \delta\varphi$ (但し, $\delta\varphi$ は \hbar のオーダー) と書く事にし, また, \mathbf{J} は式(2.2.36)によって決まる ϕ_0 の関数 $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\phi_0)$ だと思い直す事にすると, $\Gamma(\varphi)$ は \hbar の 1 次のオーダーで次の様に計算されます:

$$\begin{aligned}
\Gamma(\varphi) &= W(\mathbf{J}(\phi_0)) - \varphi_j J_j(\phi_0) \\
&= -i\hbar \log \left(\sqrt{(2\pi i\hbar)^N \mathcal{N}} \right) + S(\phi_0) + (\phi_{0j} - \varphi_j) J_j(\phi_0) + \frac{i\hbar}{2} \log \det S^{(2)}(\phi_0) + O(\hbar^2) \\
&= -i\hbar \log \left(\sqrt{(2\pi i\hbar)^N \mathcal{N}} \right) + S(\varphi + \delta\varphi) + \delta\varphi_j J_j(\varphi + \delta\varphi) + \frac{i\hbar}{2} \log \det S^{(2)}(\varphi + \delta\varphi) + O(\hbar^2) \\
&= -i\hbar \log \left(\sqrt{(2\pi i\hbar)^N \mathcal{N}} \right) + S(\varphi) + S_j^{(1)}(\varphi) \delta\varphi_j + \delta\varphi_j J_j(\varphi) + \frac{i\hbar}{2} \log \det S^{(2)}(\varphi) + O(\hbar^2) \\
&= -i\hbar \log \left(\sqrt{(2\pi i\hbar)^N \mathcal{N}} \right) + S(\varphi) + (S_j^{(1)}(\varphi) + J_j(\varphi)) \delta\varphi_j + \frac{i\hbar}{2} \log \det S^{(2)}(\varphi) + O(\hbar^2) \\
&= -i\hbar \log \left(\sqrt{(2\pi i\hbar)^N \mathcal{N}} \right) + S(\varphi) + \frac{i\hbar}{2} \log \det S^{(2)}(\varphi) + O(\hbar^2)
\end{aligned} \tag{2.2.43}$$

但し, 4 行目で多変数関数 Taylor 展開 $S(\phi_0) = S(\varphi + \delta\varphi) = S(\varphi) + S_j^{(1)}(\varphi) \delta\varphi_j + O(\hbar^2)$ 及び $J_j(\phi_0) = J_j(\varphi + \delta\varphi) = J_j(\varphi) + O(\hbar)$ を使い, 6 行目で等式(2.2.36)を使いました. $\Gamma(\varphi)$ の \hbar 展開の 1 次近似は以上で完了です.

次に, 式(2.2.43)を摂動計算で使い易い様に更に書き換えて行きましょう. まず, 古典作用(2.2.34)の引数を φ に変えたものの 2 階偏導関数 $S_{jk}^{(2)}(\varphi) = i(\Delta_{\mathbf{F}}^{-1})_{jk} - \mathcal{V}_{jk}^{(2)}(\varphi)$ (但し, $\mathcal{V}_{jk}^{(2)}(\varphi) = \frac{\partial^2 \mathcal{V}(\varphi)}{\partial \varphi_j \partial \varphi_k}$) を行列要素とする N 次正方行列 $S^{(2)}(\varphi)$ を次の様に書きます:

$$\begin{aligned}
S^{(2)}(\varphi) &= i\Delta_{\mathbf{F}}^{-1} - \mathcal{V}^{(2)}(\varphi) \\
&= i\Delta_{\mathbf{F}}^{-1} \left(\mathbf{1} - \Delta_{\mathbf{F}} \left[-i\mathcal{V}^{(2)}(\varphi) \right] \right)
\end{aligned} \tag{2.2.44}$$

但し, $\mathbf{1}$ は単位行列を表します. この表式を使うと, 式(2.2.43)の 3 項目は次の様に書き換える事が出来ます:

$$\begin{aligned}
\log \det S^{(2)}(\varphi) &= \log \det(i\Delta_{\mathbf{F}}^{-1}) + \log \det \left(\mathbf{1} - \Delta_{\mathbf{F}} \left[-i\mathcal{V}^{(2)}(\varphi) \right] \right) \\
&= \log \det(i\Delta_{\mathbf{F}}^{-1}) + \text{Tr} \log \left(\mathbf{1} - \Delta_{\mathbf{F}} \left[-i\mathcal{V}^{(2)}(\varphi) \right] \right) \\
&= \log \det(i\Delta_{\mathbf{F}}^{-1}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr} \left(\Delta_{\mathbf{F}} \left[-i\mathcal{V}^{(2)}(\varphi) \right] \right)^n
\end{aligned} \tag{2.2.45}$$

但し, 2 行目と 3 行目で任意の正則行列 M に対して成り立つ次の等式を使いました:^{*10}

$$\log \det M = \text{Tr} \log M \tag{2.2.46a}$$

^{*10} 行列の対数などはスペクトル分解 (spectral decomposition) で定義します. まず $n \times n$ の正則行列 M の固有値を λ_i , 固有値 λ_i の 1 次元固有空間への射影演算子を P_i とすると, M は次の様にスペクトル分解されます:

$$M = \sum_i \lambda_i P_i$$

但し, 射影演算子は $P_i P_j = \delta_{ij} P_j$, $\sum_j P_j = \mathbf{1}$, $\text{Tr} P_j = 1$ を満たすとしてします. (これらはそれぞれ規格直交性, 完全性, 固有空間は 1 次元である事を表しています.) このスペクトル分解を使うと, 行列 M の関数 $f(M)$ は次で定義する事が出来ます:

$$f(M) = \sum_i f(\lambda_i) P_i$$

このスペクトル分解を使うと, 等式(2.2.46a)は次の様に証明されます:

$$\text{Tr} \log M = \text{Tr} \left(\sum_i \log(\lambda_i) P_i \right) = \sum_i \log(\lambda_i) \text{Tr} P_i = \sum_i \log(\lambda_i) = \log \left(\prod_i \lambda_i \right) = \log \det M$$

但し, 2 番目の等号でトレースの線形性を使い, 3 番目の等号で $\text{Tr} P_i = 1$ を使い, 最後の等号で行列式は固有値の積である事 ($\det M = \prod_i \lambda_i$) を使いました.

$$\log(\mathbf{1} - M) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} M^n \quad (2.2.46b)$$

式(2.2.45)を式(2.2.43)に代入し、 $-i\hbar \log(\sqrt{(2\pi i\hbar)^N \mathcal{N}})$ や $\log \det(i\Delta_F^{-1})$ などの φ に依存しない定数項は全て捨てると、最終的に有効作用 $\Gamma(\varphi)$ に i を掛けたものの \hbar 展開は次の様になる事が分かります:

$$\begin{aligned} i\Gamma(\varphi) &= iS(\varphi) + \hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \text{Tr} \left(\Delta_F \left[-i\mathcal{V}^{(2)}(\varphi) \right] \right)^n + O(\hbar^2) \\ &= -\frac{1}{2!} \varphi \cdot \Delta_F^{-1} \varphi - i\mathcal{V}(\varphi) \\ &\quad + \hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \sum_{j_1=1}^N \sum_{k_1=1}^N \cdots \sum_{j_n=1}^N \sum_{k_n=1}^N \Delta_{Fj_1 k_1} \left[-i\mathcal{V}_{k_1 j_2}^{(2)}(\varphi) \right] \Delta_{Fj_2 k_2} \left[-i\mathcal{V}_{k_2 j_3}^{(2)}(\varphi) \right] \cdots \Delta_{Fj_n k_n} \left[-i\mathcal{V}_{k_n j_1}^{(2)}(\varphi) \right] \\ &\quad + O(\hbar^2) \end{aligned} \quad (2.2.47)$$

これがこのおもちゃの理論に於ける有効作用の1ループマスター公式です。

2.2.3 実スカラー場の理論の1ループ有効作用

以上、1変数関数及び N 変数関数の場合のおもちゃの例で有効作用の \hbar 展開を見て来た訳ですが、最後にこれまでの結果を拡張する事で実スカラー場の理論に対する有効作用の \hbar 展開の1次近似の表式を導出しましょう。まず、第2.1.2節で述べた様に、実スカラー場の理論に対する Green 関数の生成汎関数 $Z[J]$ は次の汎関数積分で与えられるのでした:

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left[S[\phi] + \int d^d x \phi(x) J(x) \right] \right) \quad \text{with} \quad \int \mathcal{D}\phi = \prod_x \int_{-\infty}^{\infty} d\phi(x) \quad (2.2.48)$$

ここで、 $S[\phi]$ は実スカラー場の理論の古典作用で、以下では次の形のものと考えます:

$$S[\phi] = \int d^d x \left[-\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi(x)) (\partial^\mu \phi(x)) - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right] - \mathcal{V}[\phi] \quad \text{with} \quad \mathcal{V}[\phi] = \int d^d x V(\phi(x)) \quad (2.2.49)$$

但し、 $V(\phi(x))$ はポテンシャルで $\phi(x)$ の多項式とします。前節までの内容と対応付けさせる為に、この古典作用を次の様に書き換えておきましょう:

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \int d^d x \left[-\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi(x)) (\partial^\mu \phi(x)) - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right] - \mathcal{V}[\phi] \\ &= \int d^d x \left[\frac{1}{2!} \phi(x) (\partial^2 - m^2) \phi(x) \right] - \mathcal{V}[\phi] \\ &= \frac{1}{2!} \int d^d x \int d^d y \phi(x) (\partial_x^2 - m^2) \delta^d(x-y) \phi(y) - \mathcal{V}[\phi] \end{aligned} \quad (2.2.50)$$

但し、2行目で部分積分を行い、3行目でデルタ関数を入れて積分を1つ増やしました。部分積分をすると表面項が出て来ますが、 $\phi(x)$ が無限遠で十分早くゼロに収束するとして表面項は捨てています。

さて、前節までやって来た様に、 \hbar が形式的に「小さい」として式(2.2.48)を鞍点近似(停留位相法)で評価し、その結果の対数を取って連結 Green 関数の生成汎関数 $W[J]$ を求め、それを汎関数 Legendre 変換すれば有効作用 $\Gamma[\varphi]$ の \hbar 展開が得られます。この計算をまた繰り返しても良いのですが、本質的に前節までの計算と全く同じなので、ここでは繰り返さない事にしましょう。代わりに、ここでは前節の結果(2.2.47)を適当に読み替える事で正しい答えを導出する事にします。まず、 N 変数関数の場合の古典作用(2.2.34)と実スカラー場の理論の古典作用(2.2.50)を見比べると、次の対応が成り立つ事が分かります:

$$\sum_{j=1}^N \longleftrightarrow \int d^d x \quad (2.2.51a)$$

また、等式(2.2.46b)は次の様に証明されます:

$$\log(\mathbf{1} - M) = \log \left(\sum_i (1 - \lambda_i) P_i \right) = \sum_i \log(1 - \lambda_i) P_i = \sum_i \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \lambda_i^n \right) P_i = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_i \lambda_i^n P_i \right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} M^n$$

但し、1番目の等号で $\sum_i P_i = \mathbf{1}$ を使い、3番目の等号で対数関数 $\log(1-x)$ の $x=0$ 周りでの Taylor 展開 $\log(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ を形式的に適用しました。

$$\phi_j \longleftrightarrow \phi(x) \quad (2.2.51b)$$

$$i(\Delta_F^{-1})_{jk} \longleftrightarrow (\partial_x^2 - m^2)\delta^d(x-y) \quad (2.2.51c)$$

$$\mathcal{V}(\phi) \longleftrightarrow \mathcal{V}[\phi] \quad (2.2.51d)$$

また、行列 $i\Delta_F^{-1}$ の逆に i を掛けたものは $\frac{i}{i\Delta_F^{-1}} = \Delta_F$ ですが、第1章の式(1.2.42)や式(1.4.28)で見た様に、Klein-Gordon 演算子 $(\partial_x^2 - m^2)\delta^d(x-y)$ の逆に i を掛けたものは Feynman 伝播関数 $\Delta_F(x,y)$ なので、次の対応が成り立つ事も分かります：

$$\Delta_{Fjk} \longleftrightarrow \Delta_F(x,y) \quad (2.2.52)$$

次に、前節の1ループ有効作用の表式(2.2.47)には相互作用項 $\mathcal{V}(\varphi)$ の2階偏導関数 $\mathcal{V}_{jk}^{(2)}(\varphi) = \frac{\partial^2 \mathcal{V}(\varphi)}{\partial \varphi_j \partial \varphi_k}$ が入って来ますが、式(2.2.51d)よりこの項は実スカラー場の理論では汎関数 $\mathcal{V}[\varphi]$ を2回汎関数微分したものに对应します：^{*11}

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}(\phi)}{\partial \phi_j \partial \phi_k} \longleftrightarrow \frac{\delta^2 \mathcal{V}[\phi]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} = \frac{\delta^2}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \int d^d z V(\phi(z)) = V^{(2)}(\phi(x)) \delta^d(x-y) \quad (2.2.53)$$

但し、 $V^{(2)}(\phi) = \frac{d^2 V(\phi)}{d\phi^2}$ は ϕ に関する $V(\phi)$ の2階微分を表します。

以上の対応付けの下、 N 変数関数の場合の \hbar 展開の結果(2.2.47)を添え字や積分変数を適当に変えて実スカラー場の理論の有効作用の \hbar 展開へと読み替えると、次が得られます：

$$\begin{aligned} i\Gamma[\varphi] &= iS[\varphi] + \hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \int d^d x_1 \int d^d y_1 \cdots \int d^d x_n \int d^d y_n \Delta_F(x_1, y_1) \left[-i \frac{\delta^2 \mathcal{V}[\phi]}{\delta \phi(y_1) \delta \phi(x_2)} \right] \Delta_F(x_2, y_2) \left[-i \frac{\delta^2 \mathcal{V}[\phi]}{\delta \phi(y_2) \delta \phi(x_2)} \right] \\ &\quad \times \cdots \times \Delta_F(x_n, y_n) \left[-i \frac{\delta^2 \mathcal{V}[\phi]}{\delta \phi(y_n) \delta \phi(x_1)} \right] + O(\hbar^2) \\ &= iS[\varphi] + \hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \int d^d x_1 \int d^d y_1 \cdots \int d^d x_n \int d^d y_n \Delta_F(x_1, y_1) \left[-iV^{(2)}(\varphi(y_1))\delta^d(y_1 - x_2) \right] \\ &\quad \times \Delta_F(x_2, y_2) \left[-iV^{(2)}(\varphi(y_2))\delta^d(y_2 - x_3) \right] \cdots \Delta_F(x_n, y_n) \left[-iV^{(2)}(\varphi(y_n))\delta^d(y_n - x_1) \right] + O(\hbar^2) \\ &= \int d^d x \left[\frac{i}{2!} \varphi(x)(\partial^2 - m^2)\varphi(x) - iV(\varphi(x)) \right] \\ &\quad + \hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \int d^d x_1 \cdots \int d^d x_n \Delta_F(x_1, x_2) \left[-iV^{(2)}(\varphi(x_2)) \right] \Delta_F(x_2, x_3) \left[-iV^{(2)}(\varphi(x_3)) \right] \cdots \Delta_F(x_n, x_1) \left[-iV^{(2)}(\varphi(x_1)) \right] \\ &\quad + O(\hbar^2) \end{aligned} \quad (2.2.54)$$

但し、3番目の等号では n 個あるデルタ関数を使って y 積分を全て実行しました。以上で計算は終わり、式(2.2.54)が実スカラー場の理論に於ける有効作用の1ループマスター公式です。但し、前節までのおもちゃの例と違って、実は上の有効作用から読み取れる頂点関数はそのままでは一般に無限大に発散しており意味を成しません。無限大の無い有限な頂点関数を得る為には、模型のパラメータを \hbar 展開の各オーダー毎に巧みに選ぶ必要があります。この「模型のパラメータを巧みに選ぶ」という操作が摂動論的場の量子論に於ける繰り込み (renormalization) で、実用上は相殺項と呼ばれるものを改めてポテンシャル V に加えて無限大を差引くという形で行います。これを見る為の準備として、次節で繰り込み操作の代表例である質量核上繰り込みについて簡単に述べる事にします。実際に模型のパラメータを巧みに選んで無限大を差引くことは第2.4節と第2.5節で行います。

2.3 質量核上繰り込み

簡単な為、相互作用ポテンシャルが $V(\varphi) = \frac{\lambda_0}{k!} \varphi^k$ (k : 正の整数) の単項式ポテンシャルの場合を考えましょう。この時、古典作用(2.2.49)は次で与えられます：

$$S[\varphi_0] = \int d^d x \left[-\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_0)(\partial^\mu \varphi_0) - \frac{m_0^2}{2} \varphi_0^2 - \frac{\lambda_0}{k!} \varphi_0^k \right] \quad (2.3.1)$$

^{*11} 式(2.2.53)右辺は、 N 変数関数の場合で相互作用項が $\mathcal{V}(\phi) = \sum_{i=1}^N V(\phi_i)$ (但し、 $V(\phi_i)$ は ϕ_i だけの関数) と書ける時に成り立つ等式

$$\frac{\partial^2}{\partial \phi_j \partial \phi_k} \sum_{i=1}^N V(\phi_i) = \frac{\partial^2}{\partial \phi_j \partial \phi_k} (V(\phi_1) + \cdots + V(\phi_N)) = \frac{d^2 V(\phi_j)}{d\phi_j^2} \delta_{jk}$$

の汎関数版です。

この理論の厳密な運動量表示 2 点頂点関数が計算出来たとして、これを次の様に書きましょう:

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = -p^2 - m_0^2 - \tilde{\Sigma}(p^2) \quad (2.3.2)$$

但し、 $\tilde{\Sigma}$ は第1.4.3節で登場した自己エネルギーです。

さて、自由場の理論では自己エネルギーはゼロで、従って $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ を p^2 の関数として見た時、 $p^2 = -m_0^2$ は $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ の 1 位の零点となります*12。しかし、相互作用項があると一般に $p^2 = -m_0^2$ は $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ の 1 位の零点にはなりません。いま、 $p^2 = -m^2$ を $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ を p^2 の関数として見た時の $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ の 1 位の零点としましょう。即ち、次が成り立つとします:

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) \Big|_{p^2=-m^2} = 0 \quad (2.3.3a)$$

$$\frac{d}{dp^2} \tilde{\Gamma}^{(2)}(p) \Big|_{p^2=-m^2} \neq 0 \quad (2.3.3b)$$

この時、式(2.3.3a)より次が成り立ちます:

$$0 = \tilde{\Gamma}^{(2)}(p) \Big|_{p^2=-m^2} = m^2 - m_0^2 - \tilde{\Sigma}(-m^2) \quad (2.3.4)$$

これより、 m_0^2 と m^2 の間には次の関係が成り立っている事が分かります:

$$m_0^2 = Z_m m^2 \quad \text{with} \quad Z_m = 1 - \frac{1}{m^2} \tilde{\Sigma}(-m^2) \quad (2.3.5)$$

この Z_m を質量の繰り込み (mass renormalization) と呼びます。これは相互作用による質量パラメータのずれを表します。

次に、 $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ を $p^2 = -m^2$ 周りで Taylor 展開してみましょう。すると、式(2.3.3b)より次が得られます:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{(2)}(p) &= \tilde{\Gamma}^{(2)}(p) \Big|_{p^2=-m^2} + \frac{d}{dp^2} \tilde{\Gamma}^{(2)}(p) \Big|_{p^2=-m^2} (p^2 + m^2) + O(p^2 + m^2)^2 \\ &= 0 + \left(-1 - \tilde{\Sigma}^{(1)}(-m^2) \right) (p^2 + m^2) + O(p^2 + m^2)^2 \\ &= - \left(1 + \tilde{\Sigma}^{(1)}(-m^2) \right) (p^2 + m^2) + O(p^2 + m^2)^2 \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

但し、2 番目の等号で式(2.3.3a)を使いました。この Taylor 展開を使うと、連結 2 点 Green 関数は $p^2 = -m^2$ 近傍では次の様に Laurent 展開される事が分かります:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p) &= \frac{i}{\tilde{\Gamma}^{(2)}(p)} \\ &= \frac{1}{i} \frac{1}{(1 + \tilde{\Sigma}^{(1)}(-m^2))(p^2 + m^2) + O(p^2 + m^2)^2} \\ &= \frac{1}{i} \frac{1}{(1 + \tilde{\Sigma}^{(1)}(-m^2))(p^2 + m^2)} \frac{1}{1 + O(p^2 + m^2)} \\ &= \frac{1}{i} \frac{1}{(1 + \tilde{\Sigma}^{(1)}(-m^2))(p^2 + m^2)} (1 + O(p^2 + m^2)) \\ &= \frac{Z_\varphi}{i(p^2 + m^2)} + O(1) \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

但し、4 行目で幾何級数展開 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + O(x^2)$ を使いました。また、最終行の Z_φ は次式で定義される定数です:

$$Z_\varphi = \frac{1}{1 + \tilde{\Sigma}^{(1)}(-m^2)} \quad (2.3.8)$$

この Z_φ を波動関数の繰り込み (wavefunction renormalization) と呼びます。これは相互作用による場の規格化のずれを表します。

*12 一般に $x = x_0$ が関数 $f(x)$ の n 位の零点であるとは、 $x = x_0$ 近傍で $f(x)$ が次の様に Taylor 展開される事を言います:

$$f(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \text{with} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

言い換えると、 $k < n$ に対しては $f^{(k)}(x_0) = 0$ で、 $k = n$ に対しては $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ である時、 $x = x_0$ を関数 $f(x)$ の n 位の零点と呼びます。

さて、LSZ 公式では連結 2 点 Green 関数は $p^2 = -m^2$ に 1 位の極を持ち、そこでの留数は $1/i$ と仮定していましたが、上の議論から相互作用があると留数は一般に Z_φ/i にずれてしまう事が分かりました。しかしこのずれは簡単に解消出来て、単に場 φ_0 を次の様に再規格化すれば良いだけです:

$$\varphi_0 = \sqrt{Z_\varphi} \varphi \quad (2.3.9)$$

実際、繰り込まれた連結 n 点 Green 関数 $G_{\text{con,R}}^{(n)}$ を

$$\begin{aligned} G_{\text{con,R}}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &:= \langle 0 | T \{ \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \} | 0 \rangle \Big|_{\text{連結部分}} \\ &= Z_\varphi^{-n/2} \langle 0 | T \{ \varphi_0(x_1) \cdots \varphi_0(x_n) \} | 0 \rangle \Big|_{\text{連結部分}} \\ &= Z_\varphi^{-n/2} G_{\text{con}}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

と定義すると、 $\tilde{G}_{\text{con,R}}^{(2)}(p)$ は $p^2 = -m^2$ に 1 位の極を持ち、そこでの留数は正しく $1/i$ となります:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\text{con,R}}^{(2)}(p) &= Z_\varphi^{-1} \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p) \\ &= Z_\varphi^{-1} \left(\frac{Z_\varphi}{i(p^2 + m^2)} + O(1) \right) \\ &= \frac{1}{i(p^2 + m^2)} + O(1) \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

また、応用上重要なのは頂点関数ですが、場の再定義(2.3.9)の下では有効作用 (頂点関数の生成汎関数) の展開係数関数 (頂点関数) は次の様に定数倍だけずれます:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^d x_1 \cdots \int d^d x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \varphi_0(x_1) \cdots \varphi_0(x_n) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^d x_1 \cdots \int d^d x_n Z_\varphi^{n/2} \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

従って、連結 n 点 Green 関数(2.3.10)とは逆に、繰り込まれた n 点頂点関数 $\Gamma_{\text{R}}^{(n)}$ は次で与えられる事になります:

$$\Gamma_{\text{R}}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = Z_\varphi^{n/2} \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \quad (2.3.13)$$

式(2.3.10)と式(2.3.13)では Z_φ の冪が互いに逆なので、 $G_{\text{con}}^{(2)}$ と $\Gamma^{(2)}$ が関係式 $\int d^d z \frac{1}{i} \Gamma^{(2)}(x, z) G_{\text{con}}^{(2)}(z, y) = \delta^d(x - y)$ を満たしていれば、 $G_{\text{con,R}}^{(2)}$ と $\Gamma_{\text{R}}^{(2)}$ も関係式 $\int d^d z \frac{1}{i} \Gamma_{\text{R}}^{(2)}(x, z) G_{\text{con,R}}^{(2)}(z, y) = \delta^d(x - y)$ を満たす事に注意しましょう。従って、 $\tilde{\Gamma}_{\text{R}}^{(2)}(p)$ も $\tilde{G}_{\text{con,R}}^{(2)}(p)$ の逆に i を掛けたものになります。これと Laurent 展開(2.3.11)に注意すると、繰り込まれた 2 点頂点関数 $\tilde{\Gamma}_{\text{R}}^{(2)}(p)$ は $p^2 = -m^2$ を 1 位の零点として持ち、 $p^2 = -m^2$ 周りで Taylor 展開すると $\tilde{\Gamma}_{\text{R}}^{(2)}(p) = -(p^2 + m^2) + O(p^2 + m^2)^2$ と振る舞う事が分かります。言い換えると、繰り込まれた 2 点頂点関数は次の条件を満たします:

$$\tilde{\Gamma}_{\text{R}}^{(2)}(p) \Big|_{p^2 = -m^2} = 0 \quad (2.3.14a)$$

$$\frac{d}{dp^2} \tilde{\Gamma}_{\text{R}}^{(2)}(p) \Big|_{p^2 = -m^2} = -1 \quad (2.3.14b)$$

以上、厳密な 2 点頂点関数が分かったとして、 Z_m や Z_φ が厳密な自己エネルギーを用いて式(2.3.5)や式(2.3.8)で与えられるという事を見て来ましたが、実際は厳密な 2 点頂点関数は (少なくとも初めからは) 分かりません。実際のループ計算では Z_m や Z_φ は取り敢えずパラメータとして扱って、上の条件式(2.3.14a)(2.3.14b)を満たす様に後で決定します。繰り込み定数を決定する為のこの様な条件式を一般に繰り込み条件 (**renormalization condition**) と呼び、特に式(2.3.14a)(2.3.14b)は質量核上での条件なので、この条件で繰り込み定数を決定する事を **質量核上繰り込み (on-shell renormalization)** と呼びます。

さて、相互作用があると連結 2 点 Green 関数の 1 位の極の位置や場の規格化がずれる事を見て来ましたが、同様に相互作用があると結合定数 λ_0 の値自身もずれて行きます。これは上の議論だけからは分かりませんが、これを見越して繰り込まれた結合定数 λ を次で導入しましょう:

$$\lambda_0 = Z_\lambda \lambda \quad (2.3.15)$$

この Z_λ を結合定数の繰り込み (coupling renormalization) と呼び、 k 点頂点関数に対して繰り込み条件を 1 つ課す事で決定します。 Z_φ や Z_m と異なり、 Z_λ を決定する為の普遍的な条件は無いのですが、計算が簡単なのは例えば次の繰り込み条件です：

$$\Gamma_R^{(k)}(p_1, \dots, p_k) \Big|_{p_1 = \dots = p_k = 0} = -\lambda \quad (2.3.16)$$

以上、質量の繰り込み、波動関数の繰り込み、結合定数の繰り込みを導入しましたが、式(2.3.5)(2.3.9)(2.3.15)を式(2.3.1)に代入して全て繰り込まれた量で書き直すと、古典作用は次の様に書き表す事が出来ます：

$$\begin{aligned} S[\varphi] &= \int d^d x \left[-\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_0)(\partial^\mu \varphi_0) - \frac{m_0^2}{2}\varphi_0^2 - \frac{\lambda_0}{k!}\varphi_0^k \right] \\ &= \int d^d x \left[-\frac{Z_\varphi}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{Z_m Z_\varphi m^2}{2}\varphi^2 - \frac{Z_\lambda Z_\varphi^{k/2} \lambda}{k!}\varphi^k \right] \\ &= \int d^d x \left[-\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{m^2}{2}\varphi^2 \right] - \mathcal{V}[\varphi] \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

但し、 $\mathcal{V}[\varphi]$ は次で与えられる汎関数です：

$$\mathcal{V}[\varphi] = \int d^d x \left[-\frac{1}{2}(Z_\varphi - 1)(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2}(Z_m Z_\varphi - 1)m^2\varphi^2 + \frac{1}{k!}Z_\lambda Z_\varphi^{k/2} \lambda \varphi^k \right] \quad (2.3.18)$$

この $\mathcal{V}[\varphi]$ を改めて相互作用項だと思えば、今まで議論してきた有効作用の \hbar 展開(2.2.54)がそっくりそのまま使えます。但し、1 つ重要な注意点があって、それは上の $\mathcal{V}[\varphi]$ は実は \hbar に依存しているという点です。以下、これを見ておきましょう。まず、有効作用の \hbar 展開の最低次の項は古典作用でしたが、古典作用から読み取れる頂点関数を見れば直ぐに分かる様に、古典論に対しては $Z_m, Z_\varphi, Z_\lambda$ は全て 1 です。従って、繰り込み定数の 1 からのずれは全て \hbar に依存する事になります。言い換えると、繰り込み定数も次の様に \hbar 展開されます：

$$Z_\varphi = 1 + \hbar Z_\varphi^{(1)} + \hbar^2 Z_\varphi^{(2)} + O(\hbar^3) \quad (2.3.19a)$$

$$Z_m = 1 + \hbar Z_m^{(1)} + \hbar^2 Z_m^{(2)} + O(\hbar^3) \quad (2.3.19b)$$

$$Z_\lambda = 1 + \hbar Z_\lambda^{(1)} + \hbar^2 Z_\lambda^{(2)} + O(\hbar^3) \quad (2.3.19c)$$

これを使うと、式(2.3.18)に現れる $Z_\varphi - 1, Z_m Z_\varphi - 1,$ 及び $Z_\lambda Z_\varphi^{k/2}$ は次の様に \hbar 展開される事になります：

$$Z_\varphi - 1 = \hbar Z_\varphi^{(1)} + \hbar^2 Z_\varphi^{(2)} + O(\hbar^3) \quad (2.3.20a)$$

$$Z_m Z_\varphi - 1 = \hbar \left(Z_m^{(1)} + Z_\varphi^{(1)} \right) + \hbar^2 \left(Z_m^{(2)} + Z_\varphi^{(2)} + Z_m^{(1)} Z_\varphi^{(1)} \right) + O(\hbar^3) \quad (2.3.20b)$$

$$Z_\lambda Z_\varphi^{k/2} = 1 + \hbar \left(Z_\lambda^{(1)} + \frac{k}{2} Z_\varphi^{(1)} \right) + \hbar^2 \left(Z_\lambda^{(2)} + \frac{k}{2} Z_\varphi^{(2)} + \frac{k}{2} Z_\lambda^{(1)} Z_\varphi^{(1)} + \frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} - 1 \right) (Z_\varphi^{(1)})^2 \right) + O(\hbar^3) \quad (2.3.20c)$$

この表式を式(2.3.18)に代入すると、 $\mathcal{V}[\varphi]$ は次の様に \hbar 展開される事が分かります：

$$\mathcal{V}[\varphi] = \mathcal{V}_0[\varphi] + \hbar \mathcal{V}_1[\varphi] + O(\hbar^2) \quad (2.3.21)$$

但し、

$$\mathcal{V}_0[\varphi] = \int d^d x \frac{\lambda}{k!} \varphi^k(x) \quad (2.3.22a)$$

$$\mathcal{V}_1[\varphi] = \int d^d x \left[-\frac{Z_\varphi^{(1)}}{2}(\partial_\mu \varphi(x))(\partial^\mu \varphi(x)) - \frac{(Z_m^{(1)} + Z_\varphi^{(1)})m^2}{2}\varphi^2(x) + \frac{(Z_\lambda^{(1)} + \frac{k}{2}Z_\varphi^{(1)})\lambda}{k!}\varphi^k(x) \right] \quad (2.3.22b)$$

式(2.3.17)及び式(2.3.21)を有効作用の \hbar 展開(2.2.54)の 1 行目の表式に代入して、改めて \hbar の冪の次数毎にまとめると、 \hbar の 1 次のオーダーでは有効作用は最終的に次の形を取ります：^{*13}

$$i\Gamma[\varphi] = iS[\varphi] + \hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \int d^d x_1 \int d^d y_1 \cdots \int d^d x_n \int d^d y_n \Delta_F(x_1, y_1) \left[-i \frac{\delta^2 \mathcal{V}[\varphi]}{\delta \varphi(x_1) \delta \varphi(x_2)} \right] \cdots \Delta_F(x_n, y_n) \left[-i \frac{\delta^2 \mathcal{V}[\varphi]}{\delta \varphi(y_n) \delta \varphi(x_1)} \right]$$

^{*13} 式(2.3.21)の 2 階汎関数微分 $\frac{\delta^2 \mathcal{V}[\varphi]}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)} = \frac{\delta^2 \mathcal{V}_0[\varphi]}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)} + \hbar \frac{\delta^2 \mathcal{V}_1[\varphi]}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)} + O(\hbar^2)$ を使います。ここで、各項は次で与えられます：

$$\frac{\delta^2 \mathcal{V}_0[\varphi]}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)} = \frac{\lambda}{(k-2)!} \varphi^{k-2}(x) \delta^d(x-y)$$

$$\frac{\delta^2 \mathcal{V}_1[\varphi]}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)} = \left[Z_\varphi^{(1)} \partial_x^2 - (Z_m^{(1)} + Z_\varphi^{(1)})m^2 + \frac{(Z_\lambda^{(1)} + \frac{k}{2}Z_\varphi^{(1)})\lambda}{(k-2)!} \right] \delta^d(x-y)$$

1 ループ近似では 1 行目の表式しか使いませんが、2 ループ近似では 2 行目の表式も使います。2 行目の表式は 2 ループ計算に必要な相殺項 (の一部) を与えます。

$$\begin{aligned}
& + O(\hbar^2) \\
& = i\Gamma_0[\varphi] + \hbar i\Gamma_1[\varphi] + O(\hbar^2)
\end{aligned} \tag{2.3.23}$$

但し,

$$i\Gamma_0[\varphi] = \int d^d x \left[\frac{i}{2!} \varphi (\partial^2 - m^2) \varphi + \frac{-i\lambda}{k!} \varphi^k \right] \tag{2.3.24a}$$

$$\begin{aligned}
i\Gamma_1[\varphi] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{-i\lambda}{(k-2)!}\right)^n}{2n} \int d^d x_1 \cdots \int d^d x_n \Delta_F(x_1, x_2) \cdots \Delta_F(x_n, x_1) \varphi^{k-2}(x_1) \cdots \varphi^{k-2}(x_n) \\
&+ \int d^d x \left[\frac{i}{2!} \varphi \left(Z_\varphi^{(1)} \partial^2 - (Z_m^{(1)} + Z_\varphi^{(1)}) m^2 \right) \varphi + \frac{-i(Z_\lambda^{(1)} + \frac{k}{2} Z_\varphi^{(1)}) \lambda}{k!} \varphi^k \right]
\end{aligned} \tag{2.3.24b}$$

式(2.3.24b)2行目の項を1ループ近似に於ける相殺項 (counter term) と呼びます. 式(2.3.24a)と(2.3.24b)が相殺項も含めた有効作用の1ループマスター公式です. この有効作用にはパラメータが $\{m^2, \lambda, Z_\varphi^{(1)}, Z_m^{(1)}, Z_\lambda^{(1)}\}$ の5つ入っていますが, 繰り込み定数の方は \hbar 展開の各オーダー毎で繰り込み条件(2.3.14a)(2.3.14b)(2.3.16)を満たす様に決めます. 一方, m^2 や λ の値は実験で決めます.

以上, 一般論を繰り広げてきたので, 次節以降で $k=3$ の場合 (φ^3 理論) と $k=4$ の場合 (φ^4 理論) を例に, 1ループ近似で実際に頂点関数を計算してみましょう. 以下では記法を簡単化する為に $\hbar=1$ と置く事にします. また, これ以降全て繰り込まれた量しか登場しないので, 繰り込まれた連結 Green 関数や頂点関数に付けていた添え字 R も省略する事にします.

2.4 例 1: 6次元有質量 φ^3 理論

まずポテンシャルが $V(\varphi) = \frac{\lambda}{3!} \varphi^3$ で与えられる φ^3 理論を6次元で考えてみましょう. これは基本的に前節の1ループ有効作用(2.3.23)で $k=3, d=6$ とすれば良いのですが, 1つだけ注意すべき点があります. それは, $k=3$ の場合, 式(2.3.24b)の $n=1$ の箇所から φ の1次の項がループ効果で生成されるという点です. 有効作用に現れる φ の1次の項は非ゼロの1点頂点関数の存在を意味しますが, この様な1点頂点関数があるとこれまでの仮定に反するので都合が悪くなります. しかしながら, ポテンシャル $V(\varphi)$ に相殺項として φ の1次の項を付け加えて, ループ効果で生成される1次の項を打ち消す様にパラメータを上手く選べば, 1点頂点関数は簡単にゼロにする事が出来ます. そこで, $V(\varphi)$ として次のポテンシャルを考えましょう.

$$V(\varphi) = \kappa \varphi + \frac{\lambda}{3!} \varphi^3 \tag{2.4.1}$$

但し, パラメータ κ は \hbar の1次のオーダーから始まるとして, 式(2.3.24b)の $n=1$ の項を打ち消す様に選びます. ポテンシャルに φ の1次式を付け加えても2階導関数に影響は無いので, 結果的には公式(2.3.24b)の $n=1$ の項を取り除けば良いだけになります. この理解の下, 式(2.3.24a)(2.3.24b)に $k=3$ を代入すると, φ^3 理論の1ループ有効作用は次で与えられる事が分かります:

$$\begin{aligned}
i\Gamma[\varphi] &= \int d^d x \left[\frac{i}{2!} \varphi (\partial^2 - m^2) \varphi + \frac{-i\lambda}{3!} \varphi^3 \right] \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^n}{2n} \int d^d x_1 \cdots \int d^d x_n \Delta_F(x_1, x_2) \cdots \Delta_F(x_n, x_1) \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \\
&+ \int d^d x \left[\frac{i}{2!} \varphi \left(Z_\varphi^{(1)} \partial^2 - (Z_m^{(1)} + Z_\varphi^{(1)}) m^2 \right) \varphi + \frac{-i(Z_\lambda^{(1)} + \frac{3}{2} Z_\varphi^{(1)}) \lambda}{3!} \varphi^3 \right] + O(2\text{-loop})
\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

次に上の有効作用を運動量空間で書き直しましょう. 実スカラー場 φ と Feynman 伝播関数 Δ_F の Fourier 積分表示

$$\varphi(x) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \tilde{\varphi}(p) e^{ipx} \tag{2.4.3a}$$

$$\Delta_F(x, y) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_F(p) e^{ip(x-y)} \quad \text{with} \quad \tilde{\Delta}_F(p) = \frac{1}{i(p^2 + m^2 - i\epsilon)} \tag{2.4.3b}$$

を式(2.4.2)に代入してひたすら計算すると, 最終的に次の形を取る事が分かります:

$$\begin{aligned}
i\Gamma[\varphi] &= \frac{1}{2!} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} i\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) \tilde{\varphi}(-p) \tilde{\varphi}(p) \\
&+ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{d^d p_1}{(2\pi)^d} \cdots \int \frac{d^d p_n}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta^d(p_1 + \cdots + p_n) i\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \cdots, p_n) \tilde{\varphi}(-p_1) \cdots \tilde{\varphi}(-p_n)
\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

但し, $\tilde{\Gamma}^{(n)}$ は運動量表示の n 点頂点関数で, 例えば $n = 2, 3, 4$ の場合は次で与えられます:^{*14}

$$i\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = i(-p^2 - m^2) + \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_F(q) \tilde{\Delta}_F(q-p) + i \left(-Z_\varphi^{(1)} p^2 - (Z_\varphi^{(1)} + Z_m^{(1)}) m^2 \right) + O(2\text{-loop}) \quad (2.4.5a)$$

$$i\tilde{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2, p_3) = -i\lambda + (-i\lambda)^3 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_F(q) \tilde{\Delta}_F(q-p_1) \tilde{\Delta}_F(q+p_2) - i \left(Z_\lambda^{(1)} + \frac{3}{2} Z_\varphi^{(1)} \right) \lambda + O(2\text{-loop}) \quad (2.4.5b)$$

$$\begin{aligned} i\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= (-i\lambda)^4 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_F(q) \tilde{\Delta}_F(q-p_1) \tilde{\Delta}_F(q-p_1-p_2) \tilde{\Delta}_F(q+p_4) \\ &\quad + (-i\lambda)^4 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_F(q) \tilde{\Delta}_F(q-p_1) \tilde{\Delta}_F(q-p_1-p_2) \tilde{\Delta}_F(q+p_3) \\ &\quad + (-i\lambda)^4 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_F(q) \tilde{\Delta}_F(q-p_1) \tilde{\Delta}_F(q-p_1-p_3) \tilde{\Delta}_F(q+p_4) + O(2\text{-loop}) \end{aligned} \quad (2.4.5c)$$

以下の議論では全く必要無いのですが, 折角なので上の 1 ループ頂点関数を Feynman 図で表してみましょう. まず, 有効作用の \hbar 展開の 0 次の項 (即ち古典作用) から読み取れる連結 2 点 Green 関数 (即ち Feynman 伝播関数) と 3 点頂点関数に i を掛けたものをそれぞれ次の様に表します:

$$\tilde{\Delta}_F(p) = \frac{p}{\longrightarrow} \quad (2.4.6a)$$

$$-i\lambda = \begin{array}{c} \times \\ \times \\ \bullet \\ \times \\ \times \end{array} \quad (2.4.6b)$$

φ^3 理論の全ての頂点関数はこの線と頂点から構成される 1 粒子既約な連結 Feynman 図として表されて, 式(2.4.5a)–(2.4.5c)の場合は次の様に表されます:

$$i\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = - \left(\frac{p}{\longrightarrow} \right)^{-1} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} q-p \\ \times \\ \times \\ \bullet \\ \times \\ \times \\ q \end{array} + (\text{counter term}) + O(2\text{-loop}) \quad (2.4.7a)$$

$$i\tilde{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2, p_3) = \begin{array}{c} \times \\ \times \\ \bullet \\ \times \\ \times \end{array} \begin{array}{c} p_1 \\ \times \\ \times \\ \bullet \\ \times \\ \times \end{array} + \begin{array}{c} q-p_1 \\ \times \\ \times \\ \bullet \\ \times \\ \times \\ q \end{array} + (\text{counter term}) + O(2\text{-loop}) \quad (2.4.7b)$$

$$\begin{aligned} i\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \begin{array}{c} \times \\ \times \\ \bullet \\ \times \\ \times \end{array} \begin{array}{c} q+p_4 \\ \times \\ \times \\ \bullet \\ \times \\ \times \end{array} \begin{array}{c} p_3 \\ \times \\ \times \\ \bullet \\ \times \\ \times \end{array} \begin{array}{c} p_2 \\ \times \\ \times \\ \bullet \\ \times \\ \times \end{array} + \begin{array}{c} q+p_3 \\ \times \\ \times \\ \bullet \\ \times \\ \times \\ q \end{array} \begin{array}{c} p_4 \\ \times \\ \times \\ \bullet \\ \times \\ \times \end{array} \begin{array}{c} p_2 \\ \times \\ \times \\ \bullet \\ \times \\ \times \end{array} + \begin{array}{c} q+p_4 \\ \times \\ \times \\ \bullet \\ \times \\ \times \end{array} \begin{array}{c} p_2 \\ \times \\ \times \\ \bullet \\ \times \\ \times \end{array} \begin{array}{c} p_3 \\ \times \\ \times \\ \bullet \\ \times \\ \times \end{array} \\ &\quad + O(2\text{-loop}) \end{aligned} \quad (2.4.7c)$$

但し, 第1.4.3節で述べた様に, 外線の運動量の向きは頂点から出て行く方向を正の向きとしています.

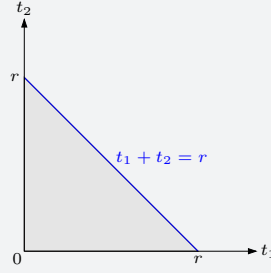
以下では 2 点頂点関数と 3 点頂点関数に限り 1 ループ計算を実際に行ってみましょう.

2.4.1 自己エネルギーの 1 ループ近似

まず, 自己エネルギーを計算しましょう. 2 点頂点関数 $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ と自己エネルギー $\tilde{\Sigma}$ の関係は $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = -p^2 - m^2 - \tilde{\Sigma}(p^2)$ である事を思い出すと, 式(2.4.5a)から自己エネルギー (を i で割ったもの) が次の様に読み取れます:

$$\frac{1}{i} \tilde{\Sigma}(p^2) = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_F(q) \tilde{\Delta}_F(q-p) + i \left(-Z_\varphi^{(1)} p^2 - (Z_\varphi^{(1)} + Z_m^{(1)}) m^2 \right) \quad (2.4.8)$$

^{*14} 2 点頂点関数(2.4.5a)と 3 点頂点関数(2.4.5b)は有効作用の φ の 2 次の項と 3 次の項に式(2.4.3a)(2.4.3b)を代入して係数関数を読み取れば簡単に得られます. 4 点頂点関数も場の 4 次の項から読み取れますが, $\tilde{\varphi}(-p_1)\tilde{\varphi}(-p_2)\tilde{\varphi}(-p_3)\tilde{\varphi}(-p_4)$ が運動量 $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ の入れ替えに対して完全対称なので, 係数関数 $\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ は運動量の入替えに対して完全対称化しておく必要があります. 式(2.4.5c)は (運動量保存を考慮した) 完全対称化した表式です.

図2.1: $t_1 + t_2 = r$ の直線.

この自己エネルギーを使うと、繰り込み条件(2.3.14a)(2.3.14b)は次の様に表される事に注意しましょう:

$$\tilde{\Sigma}(-m^2) = 0 \quad (2.4.9a)$$

$$\tilde{\Sigma}^{(1)}(-m^2) = 0 \quad (2.4.9b)$$

以下、式(2.4.8)の積分を実行して、 $Z_\varphi^{(1)}$ 、 $Z_m^{(1)}$ 、 $\tilde{\Sigma}$ の具体的表式を求めてみます。この積分計算が結構面倒なのですが、以下に示す Feynman パラメータ積分と次元正則化の2つのステップで行うのが最も簡単です。

① Feynman パラメータ積分

まず、次の等式が成り立つ事に注意しましょう:

$$\frac{1}{A} = \int_0^\infty dt e^{-At} \quad \text{for } \text{Re } A > 0 \quad (2.4.10)$$

実際、右辺の積分を計算すれば左辺に一致する事が直ぐに分かります。これを使うと、 $\frac{1}{AB}$ は次の2重積分で表せる事が分かります:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^\infty dt_1 \int_0^\infty dt_2 e^{-(At_1+Bt_2)} \quad (2.4.11)$$

次にこの2重積分を書き換えて行きましょう。まず次の変数変換を行います(図2.1参照):

$$t_1 = rx \quad (2.4.12a)$$

$$t_2 = r - t_1 = r(1-x) \quad (2.4.12b)$$

但し、 $x \in [0, 1]$ 、 $r \in [0, \infty)$ です。この変数変換の Jacobi 行列式を計算すると次の様になります:

$$\det \left(\frac{\partial(t_1, t_2)}{\partial(x, r)} \right) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial t_1}{\partial x} & \frac{\partial t_1}{\partial r} \\ \frac{\partial t_2}{\partial x} & \frac{\partial t_2}{\partial r} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} r & x \\ -r & 1-x \end{pmatrix} = r \quad (2.4.13)$$

よって、上の変数変換を行うと $\frac{1}{AB}$ は最終的に次の積分で表される事が分かります:

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} &= \int_0^\infty dt_1 \int_0^\infty dt_2 e^{-(At_1+Bt_2)} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^\infty dr \left| \det \left(\frac{\partial(t_1, t_2)}{\partial(x, r)} \right) \right| e^{-(Arx+Br(1-x))} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^\infty dr r e^{-r(Ax+B(1-x))} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{[Ax+B(1-x)]^2} \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

但し、4行目で積分公式 $\int_0^\infty dr r e^{-\alpha r} = -\frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty dr e^{-\alpha r} = -\frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha^2}$ を使いました。式(2.4.14)を Feynman パラメータ積分とか Feynman パラメータ公式と呼びます。これを使うと、式(2.4.8)に現れる Feynman 伝播関数の2つの積は次の様に書き表せます:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_F(q)\tilde{\Delta}_F(q-p) &= \frac{1}{i^2} \frac{1}{(q^2+m^2-i\epsilon)((q-p)^2+m^2-i\epsilon)} \\ &= \frac{1}{i^2} \int_0^1 dx \frac{1}{[(q-p)^2+m^2-i\epsilon]x + (q^2+m^2-i\epsilon)(1-x)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{i^2} \int_0^1 dx \frac{1}{[(q-xp)^2 + x(1-x)p^2 + m^2 - i\epsilon]^2} \quad (2.4.15)$$

これを式(2.4.8)1項目の q 積分に代入すると次が得られます:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_F(q) \tilde{\Delta}_F(q-p) &= \frac{1}{i^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(q-xp)^2 + x(1-x)p^2 + m^2 - i\epsilon]^2} \\ &= \frac{1}{i^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[q^2 + x(1-x)p^2 + m^2 - i\epsilon]^2} \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

但し, 2行目で積分変数を $q \rightarrow q - xp$ と変数変換しました.

② 次元正則化

式(2.4.16)の q 積分は実は4次元以上では無限大に発散していて well-defined ではありません. そこで, ひとまず理論を少しだけ変更して積分が有限になる様にしましょう. この様に, 理論を少しだけ変更して積分を有限にさせる操作を一般に正則化 (**regularization**) と呼びます. 正則化にも色々ありますが, 計算が簡単なのは次元をずらして積分を有限にする次元正則化 (**dimensional regularization**) です. 次の置き換えを行います:

$$d = 6 - \epsilon \quad (2.4.17a)$$

$$\lambda \rightarrow \lambda \mu^{\frac{6-d}{2}} = \lambda \mu^{\frac{\epsilon}{2}} \quad (2.4.17b)$$

但し, $\mu > 0$ は質量次元1を持った任意のパラメータで, d 次元でも結合定数 λ が無次元になる為に導入しました. また, ϵ は最終的にはゼロに持って行くべき正のパラメータです. 欲しいのはこの様にして正則化した理論の $\epsilon \rightarrow 0$ の極限で, 今から見る様に, この極限が存在する為には $Z_\varphi^{(1)}$ や $Z_m^{(1)}$ に ϵ 依存性を持たせなければなりません.

さて, 次元正則化の下では自己エネルギー(2.4.8)は次の様に計算されます:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \tilde{\Sigma}(p^2) &= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \cdot \frac{1}{i^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[q^2 + x(1-x)p^2 + m^2 - i\epsilon]^2} + i \left(-Z_\varphi^{(1)} p^2 - (Z_\varphi^{(1)} + Z_m^{(1)}) m^2 \right) \\ &= \frac{(-i\lambda \mu^{\frac{\epsilon}{2}})^2}{2} \frac{1}{i^2} \frac{i\Gamma(\frac{\epsilon}{2} - 1)}{(4\pi)^{3-\frac{\epsilon}{2}}} \int_0^1 dx [x(1-x)p^2 + m^2]^{1-\frac{\epsilon}{2}} + i \left(-Z_\varphi^{(1)} p^2 - (Z_\varphi^{(1)} + Z_m^{(1)}) m^2 \right) \\ &= \frac{i\lambda^2}{2(4\pi)^3} \Gamma(\frac{\epsilon}{2} - 1) \int_0^1 dx [x(1-x)p^2 + m^2] \left(\frac{4\pi\mu^2}{x(1-x)p^2 + m^2} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} + i \left(-Z_\varphi^{(1)} p^2 - (Z_\varphi^{(1)} + Z_m^{(1)}) m^2 \right) \quad \text{for } p^2 > -4m^2 \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

但し, 2行目で任意の正数 D に対して成り立つ次の積分結果を使いました:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + D - i\epsilon)^n} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq^0}{2\pi} \int \frac{d^{d-1} \mathbf{q}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{(-(q^0)^2 + |\mathbf{q}|^2 + D - i\epsilon)^n} \\ &= \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dq^0}{2\pi} \int \frac{d^{d-1} \mathbf{q}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{(-(q^0)^2 + |\mathbf{q}|^2 + D)^n} \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_E^0}{2\pi} \int \frac{d^{d-1} \mathbf{q}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{((q_E^0)^2 + |\mathbf{q}|^2 + D)^n} \\ &= \frac{i\Omega(d)}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dq_E^0 q_E^{d-1} \frac{1}{(q_E^2 + D)^n} \\ &= \frac{i\Omega(d)}{2(2\pi)^d} D^{\frac{d}{2}-n} \int_0^\infty dt \frac{t^{\frac{d}{2}-1}}{(1+t)^n} \\ &= \frac{i\Omega(d)}{2(2\pi)^d} D^{\frac{d}{2}-n} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \\ &= \frac{i\Gamma(n-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(n)} D^{\frac{d}{2}-n} \quad \text{for } D > 0 \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

この計算は少し説明が必要でしょう. まず2行目では積分経路を複素 q^0 平面で反時計回りに90度回転しました(図2.2参照). この積分経路の変形を特に **Wick 回転 (Wick rotation)** と呼びます. この経路変形は被積分関数が複素 q^0 平面の第一象限と第三象限に特異点を持たず, また無限遠で充分早くゼロに収束する場合は常に正当化出来ます. また, 3行目では変数変換 $q^0 = e^{i\pi/2} q_E^0$ を行い, 4

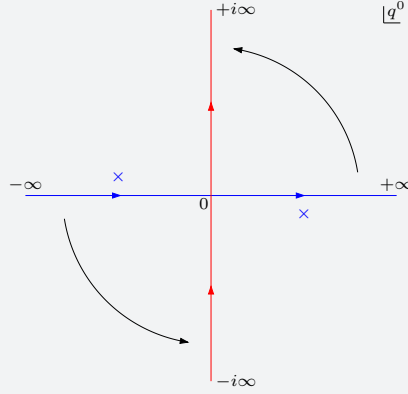


図2.2: 複素 q^0 平面での積分経路の変形 (Wick 回転). 青色のバツテン (×) は $q^0 = \pm\sqrt{|\mathbf{q}|^2 + D} \mp i\epsilon$ における n 位の極の位置を表します.

行目では d 次元球座標に移行して角度積分を実行しました. 但し, $q_E = \sqrt{(q_E^0)^2 + |\mathbf{q}|^2 + D}$ は動径座標です. また, $\Omega(d)$ は $d-1$ 次元単位球面 \mathbb{S}^{d-1} の表面積で, 次式で与えられます:

$$\Omega(d) = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \quad (2.4.20)$$

更に, 式(2.4.19)の5行目では変数変換 $q_E = \sqrt{Dt}$ を行い, 6行目では次のベータ関数の積分公式を使いました:

$$B(p, q) = \int_0^{\infty} dt \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad \text{for } \text{Re } p > 0 \ \& \ \text{Re } q > 0 \quad (2.4.21)$$

式(2.4.18)では D に対応するのは $x(1-x)p^2 + m^2$ ですが, $0 \leq x \leq 1$ では $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ なので, 条件 $D > 0$ は全ての $x \in [0, 1]$ に対して $p^2 > -\frac{1}{x(1-x)}m^2$ が成り立てという条件, 即ち, 外線運動量 p^μ に対する条件 $p^2 > -4m^2$ に対応する事に注意しましょう. さて, ϵ は最終的にゼロに持って行きたいので, 式(2.4.18)の ϵ に依存する部分を次の様に $\epsilon = 0$ 周りで展開しましょう:

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) = -\left(\frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma\right) + O(\epsilon) \quad (2.4.22a)$$

$$\left(\frac{4\pi\mu^2}{x(1-x)p^2 + m^2}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} = \exp\left[\frac{\epsilon}{2} \log\left(\frac{4\pi\mu^2}{x(1-x)p^2 + m^2}\right)\right] = 1 + \frac{\epsilon}{2} \log\left(\frac{4\pi\mu^2}{x(1-x)p^2 + m^2}\right) + O(\epsilon^2) \quad (2.4.22b)$$

ここで, $\gamma \approx 0.577$ は Euler-Mascheroni 定数です. これらを式(2.4.18)に代入すると次が得られます:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \tilde{\Sigma}(p^2) &= \frac{i\lambda^2}{2(4\pi)^3} \int_0^1 dx [x(1-x)p^2 + m^2] \left[-\left(\frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma\right) - \log\left(\frac{4\pi\mu^2}{x(1-x)p^2 + m^2}\right) + O(\epsilon) \right] \\ &\quad + i \left(-Z_\varphi^{(1)} p^2 - (Z_\varphi^{(1)} + Z_m^{(1)}) m^2 \right) \quad \text{for } p^2 > -4m^2 \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

以上で計算は終わりなのですが, これを質量核上繰り込みで使い易い様に少し変形しておきましょう. まず, 等式

$$\frac{4\pi\mu^2}{x(1-x)p^2 + m^2} = \frac{4\pi\mu^2}{(1-x(1-x))m^2 + x(1-x)(p^2 + m^2)} = \frac{4\pi\mu^2/m^2}{1-x(1-x)} \frac{1}{1 + \frac{x(1-x)}{1-x(1-x)} \frac{p^2 + m^2}{m^2}} \quad (2.4.24)$$

に注意します. すると, 式(2.4.23)は次の様に書き換える事が出来ます:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \tilde{\Sigma}(p^2) &= \frac{i\lambda^2}{2(4\pi)^3} \int_0^1 dx [(1-x(1-x))m^2 + x(1-x)(p^2 + m^2)] \\ &\quad \times \left[-\left(\frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma\right) - \log\left(\frac{4\pi\mu^2/m^2}{1-x(1-x)}\right) + \log\left(1 + \frac{x(1-x)}{1-x(1-x)} \frac{p^2 + m^2}{m^2}\right) + O(\epsilon) \right] \\ &\quad + i \left(-Z_m^{(1)} m^2 - Z_\varphi^{(1)} (p^2 + m^2) \right) \quad \text{for } p^2 > -4m^2 \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

以上で, 積分計算が終わったので, 次に質量核上繰り込みを行きましょう. まず, 式(2.4.25)を使って $p^2 = -m^2$ での自己エネルギー

一の値 $\tilde{\Sigma}(-m^2)$ と微係数 $\tilde{\Sigma}^{(1)}(-m^2) = \frac{d}{dp^2} \tilde{\Sigma}(p^2) \Big|_{p^2=-m^2}$ を計算すると次の様になります:

$$\frac{1}{i} \tilde{\Sigma}(-m^2) = \frac{i\lambda^2}{2(4\pi)^3} \int_0^1 dx (1-x(1-x)) m^2 \left[-\left(\frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma\right) - \log\left(\frac{4\pi\mu^2/m^2}{1-x(1-x)}\right) + O(\epsilon) \right] + i(-Z_m^{(1)} m^2) \quad (2.4.26a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \tilde{\Sigma}^{(1)}(-m^2) &= \frac{i\lambda^2}{2(4\pi)^3} \int_0^1 dx x(1-x) \left[-\left(\frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma\right) - \log\left(\frac{4\pi\mu^2/m^2}{1-x(1-x)}\right) + O(\epsilon) \right] \\ &+ \frac{i\lambda^2}{2(4\pi)^3} \int_0^1 dx (1-x(1-x)) m^2 \cdot \frac{x(1-x)}{1-x(1-x)} \frac{1}{m^2} + i(-Z_\varphi^{(1)}) \end{aligned} \quad (2.4.26b)$$

次にこれらがゼロになれという繰り込み条件(2.4.9a)(2.4.9b)を課しましょう. すると, 繰り込み定数が次の様に決まります.*15

$$\begin{aligned} Z_m^{(1)} &= \frac{\lambda^2}{2(4\pi)^3} \int_0^1 dx (1-x(1-x)) \left[-\left(\frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma\right) - \log\left(\frac{4\pi\mu^2/m^2}{1-x(1-x)}\right) \right] \\ &= -\frac{5\lambda^2}{12(4\pi)^3} \left(\frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma + \log\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) + \frac{19}{15} - \frac{\sqrt{3}\pi}{5} \right) \end{aligned} \quad (2.4.27a)$$

$$\begin{aligned} Z_\varphi^{(1)} &= \frac{\lambda^2}{2(4\pi)^3} \int_0^1 dx x(1-x) \left[-\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma\right) - \log\left(\frac{4\pi\mu^2/m^2}{1-x(1-x)}\right) \right] \\ &= -\frac{\lambda^2}{12(4\pi)^3} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) - \frac{17}{3} + \sqrt{3}\pi \right) \end{aligned} \quad (2.4.27b)$$

この様にして決めた $Z_\varphi^{(1)}$ と $Z_m^{(1)}$ を改めて式(2.4.25)に代入すると, 自己エネルギーの $\epsilon \rightarrow 0$ の極限が正しく存在して, 最終的に次の表式が得られます:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \tilde{\Sigma}(p^2) &= \frac{i\lambda^2}{2(4\pi)^3} m^2 \int_0^1 dx (1-x(1-x)) \left\{ \log\left(1 + \frac{x(1-x)}{1-x(1-x)} \frac{p^2 + m^2}{m^2}\right) - \frac{x(1-x)}{1-x(1-x)} \frac{p^2 + m^2}{m^2} \right\} \\ &+ \frac{i\lambda^2}{2(4\pi)^3} (p^2 + m^2) \int_0^1 dx x(1-x) \log\left(1 + \frac{x(1-x)}{1-x(1-x)} \frac{p^2 + m^2}{m^2}\right) \quad \text{for } p^2 > -4m^2 \end{aligned} \quad (2.4.28)$$

これが質量核上で繰り込んだ場合の6次元 φ^3 理論の1ループ自己エネルギーです. 以上で計算は完了なのですが, 上の結果だけを見ても殆どの人には何のこともやらさっぱり分からないと思います. 実際, 自己エネルギーの積分表示(2.4.28)を求めただけでは殆ど何の役にも立ちません. しかし, 実は上手い変数変換があって, 式(2.4.28)の積分変数を適当に変えらるともっと見通しの良い形に変形出来ます. 次にこの変数変換を行ってこの自己エネルギーの計算を終える事にしましょう.

2.4.2 Källén-Lehmann のスペクトル表示

まず, 唐突ですが式(2.4.28)の積分変数を $y = 1 - 2x$ と変数変換しましょう. 計算すると次の様になります:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \tilde{\Sigma}(p^2) &= \frac{i\lambda^2}{2(4\pi)^3} m^2 \int_0^1 dy \frac{3+y^2}{4} \left[\log\left(1 + \frac{1-y^2}{3+y^2} \frac{p^2 + m^2}{m^2}\right) - \frac{1-y^2}{3+y^2} \frac{p^2 + m^2}{m^2} \right] \\ &+ \frac{i\lambda^2}{2(4\pi)^3} (p^2 + m^2) \int_0^1 dy \frac{1-y^2}{4} \log\left(1 + \frac{1-y^2}{3+y^2} \frac{p^2 + m^2}{m^2}\right) \end{aligned} \quad (2.4.29)$$

*15 次の定積分の結果を使いました:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx (1-x(1-x)) \log(1-x(1-x)) &= \int_0^1 dy \frac{3+y^2}{4} \log\left(\frac{3+y^2}{4}\right) = \left[\left(\frac{3}{4}y + \frac{1}{12}y^3\right) \log\left(\frac{3+y^2}{4}\right) \right]_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 dy \left(\frac{3}{4}y + \frac{1}{12}y^3\right) \frac{2y}{3+y^2} \\ &= \int_0^1 dy \left(-\frac{1}{6}y^2 - 1 + \frac{3}{y^2+3}\right) = -\frac{19}{18} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \\ \int_0^1 dx x(1-x) \log(1-x(1-x)) &= \int_0^1 dy \frac{1-y^2}{4} \log\left(\frac{3+y^2}{4}\right) = \left[\left(\frac{1}{4}y - \frac{1}{12}y^3\right) \log\left(\frac{3+y^2}{4}\right) \right]_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 dy \left(\frac{1}{4}y - \frac{1}{12}y^3\right) \frac{2y}{3+y^2} \\ &= \int_0^1 dy \left(\frac{1}{6}y^2 - 1 + \frac{3}{y^2+3}\right) = -\frac{17}{18} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \end{aligned}$$

但し, 最初の等号で $y = 1 - 2x$ と変数変換し, 2番目の等号で $\frac{3+y^2}{4} = \frac{d}{dy} \left(\frac{3}{4}y + \frac{1}{12}y^3\right)$ 及び $\frac{1-y^2}{4} = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{4}y - \frac{1}{12}y^3\right)$ を使って部分積分を行いました. また, 最後の等号は変数変換 $y = \sqrt{3} \tan \theta$ から従う等式 $\int_0^1 dy \frac{3}{y^2+3} = \sqrt{3} \int_0^{\pi/6} d\theta = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$ を使いました.

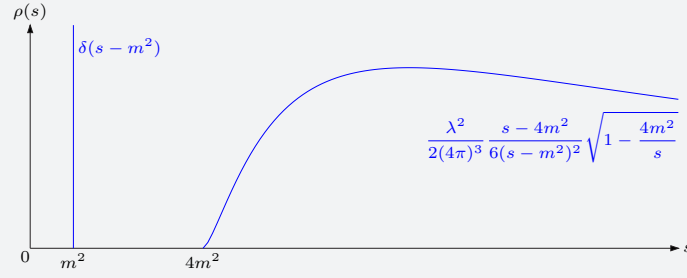


図2.3: 6次元 φ^3 理論の1ループスペクトル関数. $s = m^2$ でのデルタ関数は漸近場が記述する1粒子状態に対応します. また, $s = 4m^2 = (m+m)^2$ は質量 m の2粒子系の取り得るエネルギーの最低値2乗で, ここから多粒子状態の連続スペクトルが始まります. スペクトル関数は正定値関数である事, 及び $s \rightarrow \infty$ ではおおよそ $1/s$ でゼロに収束する事に注意しましょう.

次に, これも唐突ですが $\frac{3+y^2}{4} = \frac{d}{dy}(\frac{3}{4}y + \frac{1}{12}y^3)$ と $\frac{1-y^2}{4} = \frac{d}{dy}(\frac{1}{4}y - \frac{1}{12}y^3)$ を使って式(2.4.29)を部分積分しましょう. 計算は単純なので省略すると, 結果は次の様になります:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \tilde{\Sigma}(p^2) &= \frac{i\lambda^2}{2(4\pi)^3} (p^2 + m^2)^2 \int_0^1 dy \frac{(\frac{3}{4}y + \frac{1}{12}y^3) \frac{d}{dy}(\frac{1-y^2}{3+y^2})}{p^2 + \frac{4m^2}{1-y^2}} \\ &\quad - \frac{i\lambda^2}{2(4\pi)^3} (p^2 + m^2)^2 \int_0^1 dy \frac{(\frac{1}{4}y - \frac{1}{12}y^3) \frac{3+y^2}{1-y^2} \frac{d}{dy}(\frac{1-y^2}{3+y^2})}{p^2 + \frac{4m^2}{1-y^2}} \end{aligned} \quad (2.4.30)$$

最後に式(2.4.30)の積分変数を $s = \frac{4m^2}{1-y^2}$ と変数変換しましょう. これは計算すると次の様になります:

$$\frac{1}{i} \tilde{\Sigma}(p^2) = \frac{i\lambda^2}{2(4\pi)^3} (p^2 + m^2)^2 \int_{4m^2}^{\infty} ds \frac{\frac{s-4m^2}{6(s-m^2)^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}}{p^2 + s} \quad (2.4.31)$$

以上の一連の変数変換により, 自己エネルギーを $p^2 = -m^2$ 周りで Taylor 展開すると $\tilde{\Sigma}(p^2) = (p^2 + m^2)^2 [\text{const} + O(p^2 + m^2)]$ の形を取る事, 即ち, $p^2 = -m^2$ は関数 $\tilde{\Sigma}(p^2)$ の2位の零点である事が明白になりました. これは質量核上繰り込みの条件式(2.4.9a)(2.4.9b)から当然そうなるべきもので, 部分積分をする前の表式(2.4.28)ではこの事が全く明白では無かった事に注意しましょう.

さて, 折角1ループ自己エネルギーを計算したので, 最後にこれを使って運動量表示の連結2点 Green 関数も求めてみましょう. これは第1章の式(1.4.34)で導出した連結2点 Green 関数 $\tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p)$ の級数表示を使えば求まります. この級数表示と式(2.4.31)を使うと, $\tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p)$ は1ループ近似で次の様に表される事が分かります:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p) &= \frac{1}{i(p^2 + m^2)} + \frac{1}{i(p^2 + m^2)} \left[\frac{1}{i} \tilde{\Sigma}(p^2) \right] \frac{1}{i(p^2 + m^2)} + O(2\text{-loop}) \\ &= \int_0^{\infty} ds \frac{\rho(s)}{i(p^2 + s)} \end{aligned} \quad (2.4.32)$$

但し,

$$\rho(s) = \delta(s - m^2) + \theta(s - 4m^2) \left[\frac{\lambda^2}{2(4\pi)^3} \frac{s - 4m^2}{6(s - m^2)^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} + O(2\text{-loop}) \right] \quad (2.4.33)$$

式(2.4.32)を連結2点 Green 関数に対する Källén-Lehmann のスペクトル表示 (spectral representation) と呼び, 式(2.4.33)の $\rho(s)$ をスペクトル関数 (spectral function) と呼びます. 証明はしませんが, このスペクトル表示は適当な仮定の下で摂動論に依らず一般に成り立ちます. また, 式(2.4.32)に現れる因子 $\frac{1}{i(p^2+s)}$ は Feynman 伝播関数 $\frac{1}{i(p^2+m^2)}$ の2乗質量 m^2 が積分変数 s に置き換わったものに他なりません. 従って, スペクトル表示が主張している事を標語的に言うと,

「連結2点 Green 関数はスペクトル関数 $\rho(s)$ を重みとしてありとあらゆる2乗質量について Feynman 伝播関数を足し上げたもの」となります. そして, この重み関数 $\rho(s)$ が場の量子論のスペクトルの情報 (どういう1粒子状態があるのか等といった情報) を与えます. 図2.3に1ループ近似での6次元 φ^3 理論のスペクトル関数(2.4.33)の概形を図示しました.

2.4.3 3点頂点関数の1ループ近似

次に3点頂点関数を計算してみましょう。この計算は前節の計算と本質的には同じなのですが、式(2.4.5b)にある様に3点頂点関数はFeynman伝播関数の3つの積の積分で与えられるので、これを計算する為には前節のFeynmanパラメータ積分(2.4.14)を拡張したものが必要となります。まずそれを導出して、次に次元正則化をするという手順で計算して行きましょう。

① Feynmanパラメータ積分

まず、式(2.4.10)を使うと $\frac{1}{ABC}$ は次の3重積分で書き表される事が分かります:

$$\frac{1}{ABC} = \int_0^\infty dt_1 \int_0^\infty dt_2 \int_0^\infty dt_3 e^{-(At_1+Bt_2+Ct_3)} \quad (2.4.34)$$

次にこの3重積分を書き換えて行きましょう。次の変数変換を行います(図2.4参照):

$$t_1 = rx \quad (2.4.35a)$$

$$t_2 = ry \quad (2.4.35b)$$

$$t_3 = r - t_1 - t_2 = r(1-x-y) \quad (2.4.35c)$$

但し、 $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1-x]$, $r \in [0, \infty)$ です。この変数変換のJacobi行列式を計算すると

$$\det \left(\frac{\partial(t_1, t_2, t_3)}{\partial(x, y, r)} \right) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial t_1}{\partial x} & \frac{\partial t_1}{\partial y} & \frac{\partial t_1}{\partial r} \\ \frac{\partial t_2}{\partial x} & \frac{\partial t_2}{\partial y} & \frac{\partial t_2}{\partial r} \\ \frac{\partial t_3}{\partial x} & \frac{\partial t_3}{\partial y} & \frac{\partial t_3}{\partial r} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} r & 0 & x \\ 0 & r & y \\ -r & -r & 1-x-y \end{pmatrix} = r^2 \quad (2.4.36)$$

となります。よって、上の変数変換を行うと式(2.4.34)は次の積分で表せる事が分かります:

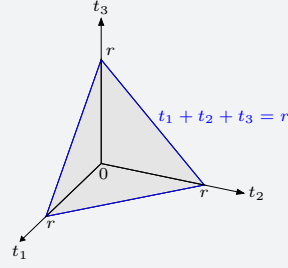
$$\begin{aligned} \frac{1}{ABC} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^\infty dr \left| \det \left(\frac{\partial(t_1, t_2, t_3)}{\partial(x, y, r)} \right) \right| e^{-(Arx+Br y+Cr(1-x-y))} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^\infty dr r^2 e^{-r(Ax+By+C(1-x-y))} \\ &= 2! \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[Ax+By+C(1-x-y)]^3} \end{aligned} \quad (2.4.37)$$

但し、3行目で積分公式 $\int_0^\infty dr r^2 e^{-\alpha r} = \frac{d^2}{d\alpha^2} \int_0^\infty dr e^{-\alpha r} = \frac{d^2}{d\alpha^2} \frac{1}{\alpha} = \frac{2!}{\alpha^3}$ を使いました。このFeynmanパラメータ積分を用いると、3点頂点関数(2.4.5b)に現れるFeynman伝播関数の3つの積は次の様に書けます:

$$\begin{aligned} &\tilde{\Delta}_F(q)\tilde{\Delta}_F(q-p_1)\tilde{\Delta}_F(q+p_2) \\ &= \frac{1}{i^3} \frac{1}{(q^2+m^2-i\epsilon)((q-p_1)^2+m^2-i\epsilon)((q+p_2)^2+m^2-i\epsilon)} \\ &= \frac{2!}{i^3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[(q-p_1)^2+m^2-i\epsilon)x + ((q+p_2)^2+m^2-i\epsilon)y + (q^2+m^2-i\epsilon)(1-x-y)]^3} \\ &= \frac{2!}{i^3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[(q-xp_1+yp_2)^2 + x(1-x)p_1^2 + y(1-y)p_2^2 + 2xyp_1p_2 + m^2-i\epsilon]^3} \\ &= \frac{2!}{i^3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[(q-xp_1+yp_2)^2 + x(1-x-y)p_1^2 + y(1-x-y)p_2^2 + xyp_3^2 + m^2-i\epsilon]^3} \end{aligned} \quad (2.4.38)$$

但し、最終行で等式 $2p_1p_2 = p_3^2 - p_1^2 - p_2^2$ を使いました。これは、等式 $(p_1+p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2$ 及び運動量保存 $p_1+p_2+p_3=0$ から従う等式 $(p_1+p_2)^2 = p_3^2$ から従います。次に式(2.4.38)を式(2.4.5b)2項目の q 積分に代入すると次が得られます:

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_F(q)\tilde{\Delta}_F(q-p_1)\tilde{\Delta}_F(q+p_2) \\ &= \frac{2!}{i^3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(q-xp_1+yp_2)^2 + x(1-x-y)p_1^2 + y(1-x-y)p_2^2 + xyp_3^2 + m^2-i\epsilon]^3} \\ &= \frac{2!}{i^3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[q^2 + x(1-x-y)p_1^2 + y(1-x-y)p_2^2 + xyp_3^2 + m^2-i\epsilon]^3} \end{aligned}$$

図2.4: $t_1 + t_2 + t_3 = r$ の平面.

$$= \frac{1}{i^3} \frac{i\Gamma(3 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [x(1-x-y)p_1^2 + y(1-x-y)p_2^2 + xyp_3^2 + m^2]^{\frac{d}{2}-3} \quad (2.4.39)$$

但し, 2 行目で変数変換 $q \rightarrow q + xp_1 - yp_2$ を行い, 3 行目で公式(2.4.19)を使いました.

② 次元正則化

次に式(2.4.17a)(2.4.17b)に従って置き換え $d = 6 - \epsilon$ と $\lambda \rightarrow \lambda\mu^{\frac{\epsilon}{2}}$ を行くと, 式(2.4.5b)を $-i\lambda$ で割ったものは次の様に計算されます:

$$\begin{aligned} & 1 + (-i\lambda\mu^{\frac{6-d}{2}})^2 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_F(q)\tilde{\Delta}_F(q-p_1)\tilde{\Delta}_F(q+p_2) + Z_\lambda^{(1)} + \frac{3}{2}Z_\varphi^{(1)} \\ &= 1 + (-i\lambda\mu^{\frac{\epsilon}{2}})^2 \cdot \frac{1}{i^3} \frac{i\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{(4\pi)^{3-\frac{\epsilon}{2}}} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [x(1-x-y)p_1^2 + y(1-x-y)p_2^2 + xyp_3^2 + m^2]^{-\frac{\epsilon}{2}} + Z_\lambda^{(1)} + \frac{3}{2}Z_\varphi^{(1)} \\ &= 1 + \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3} \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(\frac{4\pi\mu^2}{x(1-x-y)p_1^2 + y(1-x-y)p_2^2 + xyp_3^2 + m^2} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} + Z_\lambda^{(1)} + \frac{3}{2}Z_\varphi^{(1)} \\ &= 1 + \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log \left(\frac{4\pi\mu^2}{x(1-x-y)p_1^2 + y(1-x-y)p_2^2 + xyp_3^2 + m^2} \right) + O(\epsilon) \right] + Z_\lambda^{(1)} + \frac{3}{2}Z_\varphi^{(1)} \quad (2.4.40) \end{aligned}$$

但し, 3 番目の等号でガンマ関数 $\Gamma(\frac{\epsilon}{2})$ の $\epsilon = 0$ 周りでの Laurent 展開を使いました:

$$\Gamma(\frac{\epsilon}{2}) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon) \quad (2.4.41)$$

次に繰り込み条件を課して繰り込み定数 $Z_\lambda^{(1)}$ を決定しましょう. まず, 前節の繰り込み条件(2.3.16)に対応するのは, 今の場合 3 点頂点関数に対する次の条件です:

$$\tilde{\Gamma}^{(3)}(0, 0, 0) = -\lambda \quad (2.4.42)$$

式(2.4.40)を使うと外線の運動量が全てゼロの時の 3 点頂点関数は次の様になる事が分かります:

$$i\tilde{\Gamma}^{(3)}(0, 0, 0) = -i\lambda \left[1 + \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + O(\epsilon) \right] + Z_\lambda^{(1)} + \frac{3}{2}Z_\varphi^{(1)} \right] \quad (2.4.43)$$

これを用いて繰り込み条件(2.4.42)を課すと次の条件式が得られます:

$$\begin{aligned} Z_\lambda^{(1)} + \frac{3}{2}Z_\varphi^{(1)} &= -\frac{\lambda^2}{(4\pi)^3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right) \\ &= -\frac{\lambda^2}{2(4\pi)^3} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right) \quad (2.4.44) \end{aligned}$$

これと $Z_\varphi^{(1)}$ の表式(2.4.27b)を使うと, $Z_\lambda^{(1)}$ が次の様に決まります:

$$Z_\lambda^{(1)} = -\frac{3\lambda^2}{8(4\pi)^3} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + \frac{17}{9} - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} \right) \quad (2.4.45)$$

この様にして決めた $Z_\lambda^{(1)} + \frac{3}{2}Z_\varphi^{(1)}$ を改めて式(2.4.40)に代入すると, $\epsilon \rightarrow 0$ の極限が正しく存在して最終的に次の 3 点頂点関数が得られます:

$$\tilde{\Gamma}^{(3)}(p_1, p_2, p_3) = -\lambda + \frac{\lambda^3}{(4\pi)^3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \log \left(1 + x(1-x-y)\frac{p_1^2}{m^2} + y(1-x-y)\frac{p_2^2}{m^2} + xy\frac{p_3^2}{m^2} \right) + O(2\text{-loop}) \quad (2.4.46)$$

これが6次元 φ^3 理論に於ける1ループ3点頂点関数です。

以上、2点頂点関数と3点頂点関数に限って計算して来ましたが、多点の頂点関数も同様にして計算出来ます。

2.5 例2: 4次元有質量 φ^4 理論

続いて φ^4 理論を4次元で調べてみましょう。 φ^4 理論は相対論的場の量子論の雛形であるだけでなく、統計物理学で登場する Ising 模型の臨界現象とも密接に関係している重要な模型です。まず1ループ有効作用を書き下しておきます。これは単に第2.3節で導出した公式(2.3.24a)(2.3.24b)に $k=4$ を代入すれば良く、全部まとめると次の表式が得られます：

$$\begin{aligned} i\Gamma[\varphi] &= \int d^d x \left[\frac{i}{2!} \varphi (\partial^2 - m^2) \varphi + \frac{-i\lambda}{4!} \varphi^4 \right] \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i\frac{\lambda}{2})^n}{2n} \int d^d x_1 \cdots \int d^d x_n \Delta_F(x_1, x_2) \cdots \Delta_F(x_n, x_1) \varphi^2(x_1) \cdots \varphi^2(x_n) \\ &+ \int d^d x \left[\frac{i}{2!} \varphi \left(Z_\varphi^{(1)} \partial^2 - (Z_m^{(1)} + Z_\varphi^{(1)}) m^2 \right) \varphi + \frac{-i(Z_\lambda^{(1)} + 2Z_\varphi^{(1)})\lambda}{4!} \varphi^4 \right] + O(2\text{-loop}) \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

あとはこれを運動量空間で書き直して式(2.4.4)の形にまとめ上げると、運動量表示での1ループ頂点関数が原理的には全て読み取れます。計算は単純なので省略すると、例えば2点頂点関数と4点頂点関数は次で与えられる事が分かります。^{*16}

$$i\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = i(-p^2 - m^2) + \frac{-i\lambda}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_F(q) + i \left(-Z_\varphi^{(1)} p^2 - (Z_\varphi^{(1)} + Z_m^{(1)}) m^2 \right) + O(2\text{-loop}) \quad (2.5.2a)$$

$$\begin{aligned} i\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -i\lambda + \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_F(q) \tilde{\Delta}_F(q - p_1 - p_2) + \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_F(q) \tilde{\Delta}_F(q - p_1 - p_3) \\ &+ \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_F(q) \tilde{\Delta}_F(q - p_1 - p_4) - i \left(Z_\lambda^{(1)} + 2Z_\varphi^{(1)} \right) \lambda + O(2\text{-loop}) \end{aligned} \quad (2.5.2b)$$

以下ではこの2点頂点関数と4点頂点関数を計算して行くのですが、その前にこれらを Feynman 図で表しておきましょう。 φ^3 理論の時と同じ様に、まず有効作用の \hbar 展開の0次の項(即ち古典作用)から読み取れる連結2点 Green 関数(即ち Feynman 伝播関数)と4点頂点関数に i を掛けたものを次の様に表します：

$$\tilde{\Delta}_F(p) = \frac{p}{\longrightarrow} \quad (2.5.3a)$$

$$-i\lambda = \begin{array}{c} \times \\ \times \\ \bullet \\ \times \\ \times \end{array} \quad (2.5.3b)$$

φ^4 理論の全ての頂点関数は上の線と頂点から成る1粒子既約な連結 Feynman 図として表す事が可能です。例えば、1ループ近似での2点頂点関数(2.5.2a)と4点頂点関数(2.5.2b)は次の様に表す事が出来ます：

$$i\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = - \left(\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \right)^{-1} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} q \\ \curvearrowright \\ \times \\ \times \\ \bullet \\ \times \\ \times \end{array} + (\text{counter term}) + O(2\text{-loop}) \quad (2.5.4a)$$

$$\begin{aligned} i\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \begin{array}{c} p_3 \quad p_4 \\ \times \\ \times \\ \bullet \\ \times \\ \times \\ p_1 \quad p_2 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} p_3 \quad p_4 \\ \times \\ \times \\ \bullet \\ \times \\ \times \\ p_1 \quad p_2 \\ q \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} q - p_1 - p_3 \\ \times \\ \times \\ \bullet \\ \times \\ \times \\ p_4 \\ p_2 \\ q \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} q - p_1 - p_4 \\ \times \\ \times \\ \bullet \\ \times \\ \times \\ p_3 \\ p_2 \\ q \end{array} \\ &+ (\text{counter term}) + O(2\text{-loop}) \end{aligned} \quad (2.5.4b)$$

^{*16} 4点頂点関数(2.5.2b)は外線運動量 $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ の入れ替えに関して完全対称になる様に(運動量保存を考慮して)対称化を施しているのに注意しましょう。この対称化の操作が良く分からなければ、愚直に次の汎関数微分を行えば同じ結果が得られます：

$$(2\pi)^d \delta^d(p_1 + \cdots + p_n) \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \cdots, p_n) = \frac{\delta^n \Gamma[\varphi]}{\delta \tilde{\varphi}(-p_1) \cdots \delta \tilde{\varphi}(-p_n)}$$

但し, 第1.4.2節で述べた様に, 外線の運動量の向きは頂点から出て効く方向を正の向きとしています.

以下, φ^3 理論の時と同様に 2 点頂点関数と 4 点頂点関数を計算してみましょう. 計算に必要な道具は前節で全て揃っているのて, 以下では要点だけを述べる事にします.

2.5.1 自己エネルギーの 1 ループ近似

まず自己エネルギーを計算しましょう. 自己エネルギー $\tilde{\Sigma}$ と 2 点頂点関数 $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ の関係は $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = -p^2 - m^2 - \tilde{\Sigma}(p^2)$ である事に注意すると, 式(2.5.2a)から自己エネルギー (を i で割ったもの) が次の様に読み取れます:

$$\frac{1}{i}\tilde{\Sigma}(p^2) = \frac{-i\lambda}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_F(q) + i \left(-Z_\varphi^{(1)}(p^2 + m^2) - Z_m^{(1)}m^2 \right) \quad (2.5.5)$$

公式(2.4.19)の $n = 1$ の場合を使うと右辺 1 項目の積分は次元正則化の下で簡単に計算出来て, 答えは次の様になります:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}_F(q) &= \frac{1}{i} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + m^2 - i\epsilon} \\ &= \frac{1}{i} \frac{i\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} (m^2)^{\frac{d}{2}-1} \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

次にパラメータ d と λ を次の様に置き換えます:

$$d = 4 - \epsilon \quad (2.5.7a)$$

$$\lambda \rightarrow \lambda\mu^{4-d} = \lambda\mu^\epsilon \quad (2.5.7b)$$

但し, $\mu > 0$ は質量次元 1 を持った任意パラメータで, d 次元でも結合定数 λ が無次元になる様に導入しました. また, ϵ は最終的にはゼロに持って行くべきパラメータです. この置き換え(2.5.7a)(2.5.7b)及び式(2.5.6)を使うと, 自己エネルギー(2.5.5)は次の様に表されます:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i}\tilde{\Sigma}(p^2) &= \frac{-i\lambda\mu^\epsilon \Gamma(\frac{\epsilon}{2} - 1)}{2} \frac{1}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}} (m^2)^{1-\frac{\epsilon}{2}} + i \left(-Z_\varphi^{(1)}(p^2 + m^2) - Z_m^{(1)}m^2 \right) \\ &= \frac{-i\lambda m^2}{2(4\pi)^2} \Gamma(\frac{\epsilon}{2} - 1) \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} + i \left(-Z_\varphi^{(1)}(p^2 + m^2) - Z_m^{(1)}m^2 \right) \\ &= \frac{-i\lambda m^2}{2(4\pi)^2} \left[-\left(\frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma \right) - \log \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + O(\epsilon) \right] + i \left(-Z_\varphi^{(1)}(p^2 + m^2) - Z_m^{(1)}m^2 \right) \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

但し, 3 行目で $\Gamma(\frac{\epsilon}{2} - 1)$ と $(\frac{4\pi\mu^2}{m^2})^{\epsilon/2}$ を $\epsilon = 0$ 周りで展開しました. これより, 自己エネルギーの $p^2 = -m^2$ での値と微係数は次で与えられる事が分かります:

$$\frac{1}{i}\tilde{\Sigma}(-m^2) = \frac{-i\lambda m^2}{2(4\pi)^2} \left[-\left(\frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma \right) - \log \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + O(\epsilon) \right] + i \left(-Z_m^{(1)}m^2 \right) \quad (2.5.9a)$$

$$\frac{1}{i}\tilde{\Sigma}^{(1)}(-m^2) = i \left(-Z_\varphi^{(1)} \right) \quad (2.5.9b)$$

これに繰り込み条件(2.4.9a)(2.4.9b)を課しましょう. すると, 繰り込み定数が次の様に決まります:

$$Z_\varphi^{(1)} = 0 \quad (2.5.10a)$$

$$Z_m^{(1)} = \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma + \log \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right) \quad (2.5.10b)$$

この様にして決めた繰り込み定数を改めて式(2.5.8)に代入すると, 自己エネルギーには $\epsilon \rightarrow 0$ の極限が正しく存在して, 答えは自明なゼロとなります:

$$\frac{1}{i}\tilde{\Sigma}(p^2) = 0 + O(2\text{-loop}) \quad (2.5.11)$$

従って, 連結 2 点 Green 関数は 1 ループ近似では Feynman 伝播関数のままです:

$$\tilde{G}_{\text{con}}^{(2)}(p) = \frac{1}{i(p^2 + m^2 - i\epsilon)} + O(2\text{-loop}) \quad (2.5.12)$$

この様に, 前節の φ^3 理論とは異なり, φ^4 理論の 2 点頂点関数は 1 ループ近似では非常につまらない構造しか持っていないのですが, その起源は式(2.5.4a)2 項目のループに外線運動量 p が流れ込んでいないという所にあります. φ^4 理論の 2 点頂点関数に非自明な構造が現れるのは 2 ループ近似からで, これを求めるにはおもちゃの φ^4 理論の例で導出した 2 点頂点関数(2.2.31a)と本質的に同じ 2 ループ連結 Feynman 図を評価する必要があります.

2.5.2 4点頂点関数の1ループ近似

最後に4点頂点関数を計算しましょう。Feynmanパラメータ積分(2.4.14)及び次元正則化を使うと、4点頂点関数(2.5.2b)を $-i\lambda$ で割ったものは次の様に計算されます:

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{-i\lambda\mu^\epsilon}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left(\tilde{\Delta}_F(q) \tilde{\Delta}_F(q-p_1-p_2) + \tilde{\Delta}_F(q) \tilde{\Delta}_F(q-p_1-p_3) + \tilde{\Delta}_F(q) \tilde{\Delta}_F(q-p_1-p_4) \right) + Z_\lambda^{(1)} + 2Z_\varphi^{(1)} \\
&= 1 + \frac{-i\lambda\mu^\epsilon}{2} \frac{1}{i^2} \frac{i\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}} \int_0^1 dx \left([x(1-x)(p_1+p_2)^2+m^2]^{-\frac{\epsilon}{2}} + [x(1-x)(p_1+p_3)^2+m^2]^{-\frac{\epsilon}{2}} + [x(1-x)(p_1+p_4)^2+m^2]^{-\frac{\epsilon}{2}} \right) \\
&\quad + Z_\lambda^{(1)} + 2Z_\varphi^{(1)} \\
&= 1 - \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) \int_0^1 dx \left[\left(\frac{4\pi\mu^2}{x(1-x)(p_1+p_2)^2+m^2} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} + \left(\frac{4\pi\mu^2}{x(1-x)(p_1+p_3)^2+m^2} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} + \left(\frac{4\pi\mu^2}{x(1-x)(p_1+p_4)^2+m^2} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \right] \\
&\quad + Z_\lambda^{(1)} + 2Z_\varphi^{(1)} \\
&= 1 - \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left[3 \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma \right) + \log \left(\frac{4\pi\mu^2}{x(1-x)(p_1+p_2)^2+m^2} \right) + \log \left(\frac{4\pi\mu^2}{x(1-x)(p_1+p_3)^2+m^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \log \left(\frac{4\pi\mu^2}{x(1-x)(p_1+p_4)^2+m^2} \right) + O(\epsilon) \right] + Z_\lambda^{(1)} + 2Z_\varphi^{(1)} \tag{2.5.13}
\end{aligned}$$

次に繰り込み条件を課して繰り込み定数を決定しましょう。今の場合、繰り込み条件(2.3.16)に対応するのは次の4点頂点関数に対応する条件です:

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(0,0,0,0) = -\lambda \tag{2.5.14}$$

これを踏まえて、4点頂点関数の外線運動量を全てゼロにした時の値を計算しましょう。これは式(2.5.13)より次の様になる事が分かります:

$$i\tilde{\Gamma}^{(4)}(0,0,0,0) = -i\lambda \left[1 - \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left[3 \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma \right) + 3 \log \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + O(\epsilon) \right] + Z_\lambda^{(1)} + 2Z_\varphi^{(1)} \right] \tag{2.5.15}$$

これと式(2.5.10a)を使って繰り込み条件(2.5.14)を課すと、 $Z_\lambda^{(1)}$ が次の様に決まります:

$$\begin{aligned}
Z_\lambda^{(1)} &= \frac{3\lambda}{2(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right) \\
&= \frac{3\lambda}{2(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right) \tag{2.5.16}
\end{aligned}$$

これを改めて式(2.5.13)に代入すると、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限が正しく存在して次の4点頂点関数が得られます:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -\lambda - \frac{\lambda^2}{2(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left[\log \left(1 - \frac{x(1-x)s}{m^2} \right) + \log \left(1 - \frac{x(1-x)t}{m^2} \right) + \log \left(1 - \frac{x(1-x)u}{m^2} \right) \right] \\
&\quad + O(2\text{-loop}) \tag{2.5.17}
\end{aligned}$$

これが4次元 φ^4 理論の1ループ4点頂点関数です。ここで、 s, t, u は**Mandelstam変数 (Mandelstam variable)**と呼ばれるもので、次で定義される Lorentz 変換の下で不変なスカラー量です:

$$s = -(p_1 + p_2)^2 = -(p_3 + p_4)^2 \tag{2.5.18a}$$

$$t = -(p_1 + p_3)^2 = -(p_2 + p_4)^2 \tag{2.5.18b}$$

$$u = -(p_1 + p_4)^2 = -(p_2 + p_3)^2 \tag{2.5.18c}$$

但し、2番目の等号は運動量保存 $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$ から従います。このMandelstam変数は次の関係式を満たす事に注意しましょう:

$$\begin{aligned}
s + t + u &= -(p_1 + p_2)^2 - (p_1 + p_3)^2 - (p_1 + p_4)^2 \\
&= -3p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - p_4^2 - 2p_1(p_2 + p_3 + p_4) \\
&= -3p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - p_4^2 + 2p_1^2
\end{aligned}$$

$$= -p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - p_4^2 \quad (2.5.19)$$

但し, 3 番目の等号で運動量保存 $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$ を使いました. 従って, 特に外線運動量 p_i ($i = 1, \dots, 4$) が全て質量核上にある場合, 即ち $p_i^2 = -m^2$ を満たす場合, Mandelstam 変数は次を満たします:

$$s + t + u = 4m^2 \quad \text{on shell} \quad (2.5.20)$$

第1章の 2 体散乱振幅(1.4.48)の箇所でも簡単に触れましたが, 一般に 4 点頂点関数や連結 4 点 Green 関数を構成する連結 Feynman 図のうち, Mandelstam 変数 s だけに依存する部分を s チャンネル, t だけに依存する部分を t チャンネル, u だけに依存する部分を u チャンネルと呼びます. 今の場合, 式(2.5.17)の積分の中の第 1 項目の寄与が s チャンネル, 第 2 項目の寄与が t チャンネル, 第 3 項目の寄与が u チャンネルで, これらは連結 Feynman 図(2.5.4b)で言うとそれぞれ第 2 項目, 第 3 項目, 第 4 項目の Feynman 図に対応します.

以上, 2 点頂点関数と 4 点頂点関数に限って計算を行って来ましたが, 他の 1 ループ頂点関数も同様に計算する事が可能です.

参考文献

ループ展開

第2.1節ではループ展開について説明しましたが, ループ展開が h 展開に等しいという事は 1968 年に南部陽一郎によって初めて指摘されました:

- [1] Y. Nambu, “S-matrix in semiclassical approximation,” *Phys. Lett.* **B26** (1968) 626–629

また, 第2.2節では有効作用の 1 ループ公式や 2 ループ公式を導出しましたが, これは次の Roman Jackiw の論文で与えられた有効ポテンシャルの 2 ループ公式を参考にしました:

- [2] R. Jackiw, “Functional evaluation of the effective potential,” *Phys. Rev.* **D9** (1974) 1686–1701

6 次元 φ^3 理論

第2.4節では φ^3 理論の 1 ループ頂点関数を 6 次元で解析しましたが, この 6 次元 φ^3 理論については例えば Mark Srednicki の教科書で議論されているので参考にすると良いでしょう:

- [3] M. Srednicki, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, 2007)

§14 に自己エネルギーの 1 ループ計算が, §16 に 3 点頂点関数の 1 ループ計算が載っています.

Källén-Lehmann のスペクトル表示

第2.4.2節では連結 2 点 Green 関数のスペクトル表示について議論しましたが, このスペクトル表示はまず 1952 年に Gunnar Källén が量子電磁力学の文脈でカレントの交換子関数 $\langle 0|[J_\mu(x), J_\nu(y)]|0\rangle$ 等に対して導入し, その後 1954 年に Harry Lehmann によって現在使われている様な形式に一般化されました:

- [4] G. Källén, “On the Definition of the Renormalization Constants in Quantum Electrodynamics,” *Helv. Phys. Acta* **25** (1952) 417–434
 [5] H. Lehmann, “Über Eigenschaften von Ausbreitungsfunktionen und Renormierungskonstanten quantisierter Felder,” *Nuovo Cim.* **11** (1954) 342–357

因みに, 第2.4.2節では自己エネルギーの積分表示(2.4.28)を巧みに変数変換して行く事でスペクトル関数を 1 ループ近似で求めましたが, 同様の変数変換は次の Stefan Pokorski の教科書の §5.2 Vacuum polarization でも使われているので参考にすると良いかもしれません:

- [6] S. Pokorski, *Gauge Field Theories*, 2nd ed. (Cambridge University Press, 2000)

第 3 章

ゲージ場の量子論

この章ではゲージ場の古典論から始め、経路積分の観点からゲージ固定を行い Faddeev-Popov ゴーストを導入します。その後、ゲージ固定後に残る大局的対称性—BRST 対称性—について簡単に述べます。

3.1 ゲージ場の古典論

ゲージ理論は「大局的対称性は局所的対称性に格上げすべし」というゲージ原理に従って発展して来ました。この節ではまずこのゲージ原理に従ってゲージ場の古典論を作っていきます。まずはゲージ群が可換群 $U(1)$ の場合を調べて、これが Maxwell の電磁気学を再現する事を見ていきます。その後、ゲージ群を $SU(N)$ に拡張した Yang-Mills 理論を構成していきます。

3.1.1 可換ゲージ理論

まずは 1 成分の複素スカラー場 ϕ の理論から出発しましょう。簡単の為、次の様な作用で記述される理論を考えます：

$$S_{\text{matter}}[\phi, \phi^*] = \int d^4x \left[-(\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - V(\phi^* \phi) \right] \quad (3.1.1)$$

ここで、ポテンシャル $V(\phi^* \phi)$ は $\phi^* \phi$ の多項式で、例えば $V(\phi^* \phi) = \frac{\lambda}{24!} (\phi^* \phi)^2$ などを想定しています。容易に分かる様に、上の作用は次の位相変換の下で不変です：

$$\phi(x) \mapsto \phi'(x) = e^{i\theta} \phi(x) \quad (3.1.2)$$

但し、 θ は実数の定数パラメータです。実際、任意の θ に対して次の等式が成り立ちます：

$$S_{\text{matter}}[\phi', \phi'^*] = S_{\text{matter}}[\phi, \phi^*] \quad (3.1.3)$$

以下では、この大局的変換の下で不変な理論を局所的変換の下で不変な理論へと「格上げ」する事を考えていきます。

共変微分とゲージ場

位相変換(3.1.2)のパラメータ θ が時空の各点毎に異なる関数 $\theta(x)$ へと格上げた次の局所的位相変換を考えましょう：

$$\phi(x) \mapsto \phi'(x) = e^{i\theta(x)} \phi(x) \quad (3.1.4)$$

この時、作用の中の質量項やポテンシャル項は不変に保たれますが、運動項が不変に保たれません。これは $\partial_\mu \phi$ が ϕ と同じ変換性を示さない事から生じます。即ち、 $\partial_\mu \phi'(x) = \partial_\mu (e^{i\theta(x)} \phi(x))$ が $e^{i\theta(x)} \partial_\mu \phi(x)$ と一致しない事から生じます：

$$\partial_\mu \phi'(x) \neq e^{i\theta(x)} \partial_\mu \phi(x) \quad (3.1.5)$$

この不一致を解消する為に、以下では微分 ∂_μ に手を加えます。まず、微分 ∂_μ を次の共変微分 (covariant derivative) D_μ に格上げします：

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu(x) \quad (3.1.6)$$

但し、 $A_\mu(x)$ は Lorentz 変換の下でベクトルとして振る舞う実数のベクトル場です。この A_μ をゲージ場 (gauge field) と呼び、これは局所の変換の下で或るルールに従って $A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x)$ と変換されなければなりません。その変換則は次の等式が成り立つ様に決めます：

$$D'_\mu \phi'(x) = e^{i\theta(x)} D_\mu \phi(x) \quad (3.1.7)$$

但し, $D'_\mu = \partial_\mu - iA'_\mu$ です. $D'_\mu \phi'(x) = D'_\mu e^{i\theta(x)} \phi(x)$ に注意すると, 式(3.1.7)は共変微分が次の変換則を満たせと要請するのと等価である事が分かります:

$$D'_\mu = e^{i\theta(x)} D_\mu e^{-i\theta(x)} \quad (3.1.8)$$

この式の左辺を計算しましょう. 計算すると次の様になります:

$$\begin{aligned} \partial_\mu - iA'_\mu(x) &= e^{i\theta(x)} (\partial_\mu - iA_\mu(x)) e^{-i\theta(x)} \\ &= \partial_\mu - i\partial_\mu \theta(x) - iA_\mu(x) \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

この両辺を比べると, ゲージ場の変換則が次の様に読み取れます:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x) \quad (3.1.10)$$

この様に変換するゲージ場を用いると, 次の作用で記述される理論は局所変換の下で不変になります:

$$\begin{aligned} S_{\text{matter}}[\phi, \phi^*] &= \int d^4x [-(D_\mu \phi)^*(D^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - V(\phi^* \phi)] \\ &= \int d^4x [-(\partial_\mu \phi)^*(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - V(\phi^* \phi) - iA_\mu (\phi^* (\partial^\mu \phi) - (\partial^\mu \phi)^* \phi) - A_\mu A^\mu \phi^* \phi] \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

この様に, 微分を共変微分に置き換えるという最小限の変更だけで得られる物質場とゲージ場との結合を**最小結合 (minimal coupling)**と呼びます.

場の強さとゲージ場の運動項

上で作った理論(3.1.11)はゲージ場の微分項を含んでいないので, A_μ は単なる背景場で力学的自由度ではありません. ゲージ場自身の力学を考えるにはゲージ場の運動項を導入しなければなりません, その為にまず場の強さ (**field strength**) $F_{\mu\nu}$ を導入しましょう. かなり天狗的ですが, これは次の共変微分の変換関係に虚数 i を掛けたものとして定義されます:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) &= i[D_\mu, D_\nu] \\ &= i[\partial_\mu - iA_\mu(x), \partial_\nu - iA_\nu(x)] \\ &= i([\partial_\mu, \partial_\nu] - i[\partial_\mu, A_\nu(x)] - i[A_\mu(x), \partial_\nu] - [A_\mu(x), A_\nu(x)]) \\ &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

構成から明らかですが, この $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ は Lorentz 変換の下で 2 階反対称テンソルとして振る舞います. また, ゲージ変換の下での変換性は次の様になります:

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu}(x) &= i[D'_\mu, D'_\nu] \\ &= i[e^{i\theta(x)} D_\mu e^{-i\theta(x)}, e^{i\theta(x)} D_\nu e^{-i\theta(x)}] \\ &= i e^{i\theta(x)} [D_\mu, D_\nu] e^{-i\theta(x)} \\ &= e^{i\theta(x)} F_{\mu\nu}(x) e^{-i\theta(x)} \\ &= F_{\mu\nu}(x) \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

よって $F_{\mu\nu}$ はゲージ変換の下では不変です. 従って, $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ は Lorentz 変換の下で不変な Lorentz スカラーで, 且つゲージ変換の下でも不変な A_μ の 2 次式を与えます. また, この項は微分を 2 つ含んでいます. この様な Lorentz スカラーで且つゲージ不変なゲージ場の 2 次式は $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ しか無いので, これを定数倍したものが Lagrangian 密度を与えます. そこで, 作用は次で定義しましょう:

$$S_{\text{Maxwell}}[A] = -\frac{1}{4g^2} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.1.14)$$

但し, g は実数のパラメータで, $-1/(4g^2)$ は規格化です. この規格化因子については後で述べる事にして, まずこの $U(1)$ ゲージ理論が真空中の Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.1.15a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = 0 \quad (3.1.15b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.1.15c)$$

$$-\nabla \times \mathbf{E} - \partial_t \mathbf{B} = 0 \quad (3.1.15d)$$

を再現する事を見ておきましょう.

① Euler-Lagrange 方程式

まず Maxwell 方程式の第 1 の組(3.1.15a)と(3.1.15b)は作用(3.1.14)に対する Euler-Lagrange 方程式から出て来ます。その為にまず $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)F^{\mu\nu} = -2(\partial_\nu A_\mu)F^{\mu\nu}$ に注意して式(3.1.14)を次の様に書き換えておきましょう:

$$\begin{aligned} S_{\text{Maxwell}}[A] &= +\frac{1}{2g^2} \int d^4x (\partial_\nu A_\mu)F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2g^2} \int d^4x A_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} \\ &= +\frac{1}{2g^2} \int d^4x A_\mu (\eta^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

但し、2 行目で部分積分を行って表面項は捨て、3 行目で $\partial_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\nu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -(\eta^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu$ を使いました。この表式から殆ど明らかですが、Euler-Lagrange 方程式 (即ち、作用の停留条件 $\delta S_{\text{Maxwell}}[A] = 0$) は次の方程式を与えます:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \quad (3.1.17)$$

これが Maxwell 方程式の第 1 の組(3.1.15a)と(3.1.15b)と等価なのですが³、これを見る為に電場 \mathbf{E} を $E^i = F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = (-\partial_t \mathbf{A} - \nabla A^0)^i$ 、磁場 \mathbf{B} を $B^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F^{jk} = \epsilon^{ijk} \partial^j A^k = (\nabla \times \mathbf{A})^i$ と同定しましょう。これは $F^{0i} = E^i$ 、 $F^{ij} = \epsilon^{ijk} B^k$ と同定する事に等しく、行列で書くと次の様に表されます。^{*1}

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.18)$$

この様に電場と磁場を同定すると、 $\partial_\nu F^{0\nu} = 0$ が式(3.1.15a)を与え、 $\partial_\nu F^{i\nu} = 0$ が式(3.1.15b)の第 i 成分を与える事が容易に分かります。また、式(3.1.18)を下付き添字にしたもの $F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} F^{\rho\sigma} = \eta_{\mu\rho} F^{\rho\sigma} \eta_{\nu\sigma}$ も重要で、これは行列表記で書くと上の行列 F に左から計量 $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ を掛けて右から計量の転置 η^T を掛けたもの $\eta F \eta^T$ として与えられます。計算すると $F_{\mu\nu}$ は次の様になります:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.19)$$

これを使うと、 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}F^{\nu\mu}$ は上の 2 つの行列(3.1.18)と(3.1.19)の積の対角和に負号を掛けたもので与えられて、次の様になります:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \quad (3.1.20)$$

ここで $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla A^0$ を思い出すと、 $-\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2g^2} (\partial_t \mathbf{A})^2 + \dots$ となる事が分かりますが、ところで Lagrangian は「(運動エネルギー) - (ポテンシャルエネルギー)」なので、作用(3.1.14)の全体に掛かる負号はマイナスでなければならない事がここから分かります。

② Jacobi 恒等式

Maxwell 方程式のうちの 2 つは Euler-Lagrange 方程式から出て来る力学的な方程式でしたが、残りの 2 つ(3.1.15c)と(3.1.15d)は自明な恒等式として出て来ます。まず、一般に交換関係 $[X, Y] = XY - YX$ に対して次の等式が成り立つ事に注意しましょう:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (3.1.21)$$

この等式は交換関係をばらしていけば簡単に証明出来ます。式(3.1.21)を一般に **Jacobi 恒等式**と呼びますが、特に共変微分 D_μ に対する Jacobi 恒等式が Maxwell 方程式の残りの 2 つを与えます。実際、共変微分に対しては

$$[D_\nu, [D_\rho, D_\sigma]] + [D_\rho, [D_\sigma, D_\nu]] + [D_\sigma, [D_\nu, D_\rho]] = 0 \quad (3.1.22)$$

が成り立ちますが、 $[D_\mu, D_\nu] = -iF_{\mu\nu}$ 及び $[D_\mu, F_{\nu\lambda}] = [\partial_\mu, F_{\nu\lambda}] = \partial_\mu F_{\nu\lambda}$ に注意すると式(3.1.22)は次の等式になります:

$$\partial_\nu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\nu} + \partial_\sigma F_{\nu\rho} = 0 \quad (3.1.23)$$

交換関係の反対称性から明らかですが, 式(3.1.22)及びそれから出て来る式(3.1.23)は添字 (ν, ρ, σ) の入れ替えに対して完全反対称です. 従って, 式(3.1.23)は $(\nu, \rho, \sigma) = (0, 1, 2), (0, 1, 3), (0, 2, 3), (1, 2, 3)$ の4つの場合だけが独立で, それぞれ $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0$ の $\mu = 3, 2, 1, 0$ の場合として書き表せる事が分かります. そこで, 次の2階反対称テンソルを導入しておくとう便利です:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ -B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ -B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.24)$$

但し, 添字 $\rho\sigma$ に関する和は同じものを2回数え過ぎているので2!で割っておきました. また, 式(3.1.24)を下付き添字にしたもの $\tilde{F}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}\tilde{F}^{\rho\sigma}$ は次の様になります:

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.25)$$

この $\tilde{F}^{\mu\nu}$ を用いると, 恒等式(3.1.23)は次の様によりシンプルに書き表されます:

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (3.1.26)$$

式(3.1.18)と式(3.1.24)から見て取れる様に, $F^{\mu\nu}$ と $\tilde{F}^{\mu\nu}$ の間の関係は単に置き換え $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ と $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$ に対応している事に注意しましょう. 従って, $\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ から得られる電場と磁場の方程式は, $\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$ から得られる電場と磁場の方程式(3.1.15a)と(3.1.15b)から置き換え $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ と $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$ によって得られる訳ですが, これは式(3.1.15c)と式(3.1.15d)に他なりません. 以上より, $U(1)$ ゲージ理論が真空中の Maxwell 方程式を完全に再現する事が分かりました.

最後に, $\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ と $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ についてコメントをしておきましょう. $U(1)$ ゲージ理論の作用(3.1.14)を構成する時にゲージ不変且つ Lorentz スカラーな A^μ の2次式は $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ しか無いと言いましたが, $\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ や $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ もあるではないかと思うかもしれません^{*2}. まず, 式(3.1.20)と置き換え $(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{B}, -\mathbf{E})$ の対応から明らかですが, $\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ が成り立ちます. 従って, $\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ と $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ は同じものです. 次に $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\nu\mu}$ ですが, これは電場と磁場を使うと次の様に表されます:

$$F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad (3.1.27)$$

これは行列(3.1.19)と(3.1.24)の積の対角和を計算して負号を掛ければ直ぐに出て来ます. 一方, ゲージ場を使って書くと次の様に表されます:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \\ &= 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu A_\nu)(\partial_\rho A_\sigma) \\ &= 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} [\partial_\mu (A_\nu \partial_\rho A_\sigma) - A_\nu \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma] \\ &= 2\partial_\mu (\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\rho A_\sigma) \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

但し, 最終行で $\partial_\mu \partial_\rho = \partial_\rho \partial_\mu$ を使いました. よって, $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ は全微分で書けるので, その4次元積分は表面項を与えるだけになります. 従って, たとえ作用に $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ の項を入れたとしても運動方程式には全く影響を与えません. なので, 通常は $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ の項は作用には入れません.

結合定数について

最後に, 実定数 g について述べておきましょう. g は作用(3.1.14)に $1/g^2$ という風に分数で現れていますが, これは本質的に物質場との結合定数を表します. これを見る為にゲージ場 A_μ 及びゲージ変換のパラメータ θ を次の様に再定義しましょう:

$$A_\mu(x) \rightarrow gA_\mu(x) \quad \& \quad \theta(x) \rightarrow g\theta(x) \quad (3.1.29)$$

この置き換えの下で, ゲージ場と複素スカラー場が結合した理論(いわゆるスカラー QED)の作用は次の様になります:

$$S[A, \phi, \phi^*] = S_{\text{Maxwell}}[A] + S_{\text{matter}}[\phi, \phi^*]$$

^{*1} 計量は $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ なので, $E_i = \eta_{ij}E^j = E^i$, $B_i = \eta_{ij}B^j = B^i$ に注意しましょう.

^{*2} 厳密には $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ は Lorentz スカラーではありません. 電場はパリティ変換の下で $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$, 一方, 磁場は $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$ と変換されるので, $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ はパリティ変換の下で符号を変えます. この様なパリティ変換の下で符号を変えるスカラー量を擬スカラー (pseudoscalar) と呼びます.

$$= \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - V(\phi^* \phi) \right] \quad (3.1.30)$$

但し、この規格化の下では共変微分は $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$ で、ゲージ変換は $\phi'(x) = e^{ig\theta(x)}\phi(x)$ と $A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x)$ になります。この表式から明らかですが、 $g=0$ なら物質場とゲージ場との結合がなくなるので、 g は結合定数と見なせる事が分かります。また、この規格化の下ではゲージ場の運動項は $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_t \mathbf{A})^2 + \dots$ といつも通りの規格化になる事にも注意しましょう。通常、摂動計算をする場合はこの $\frac{1}{4}$ の規格化を用いますが、この章では主に $\frac{1}{4g^2}$ の規格化を使う事にします。

3.1.2 非可換ゲージ理論

以上、ゲージ群が可換群 $U(1)$ の場合の古典場の理論を作ったので、次にこれを非可換群に拡張する事を考えて行きましょう。簡単の為、 N 成分の複素スカラー場 $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_N)$ を考えます。出発点とするのは次の様な作用で記述される理論です：

$$S_{\text{matter}}[\phi, \phi^\dagger] = \int d^4x \left[-(\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi - V(\phi^\dagger \phi) \right] \quad (3.1.31)$$

但し、 $V(\phi^\dagger \phi)$ は前節同様 $\phi^\dagger \phi$ の或る多項式です。容易に分かる様に、 U を任意の $N \times N$ の定数ユニタリ行列とした時、上の作用は変換 $\phi(x) \mapsto \phi'(x) = U\phi(x)$ の下で不変です。以下、この大局的対称性の下で不変な理論を局所的対称性の下でも不変な理論へと「格上げ」して行きましょう。以下ではゲージ群として $U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbf{1}$ 且つ $\det U = 1$ を満たす $N \times N$ ユニタリ行列の全体—特殊ユニタリ群 $SU(N)$ —を考える事にします。

共変微分とゲージ場

$U(x) \in SU(N)$ を時空の座標に依存するようなユニタリ行列として、次の様な時空の各点毎に異なる局所の変換を考えましょう：

$$\phi(x) \mapsto \phi'(x) = U(x)\phi(x) \quad (3.1.32)$$

容易に分かる様に、作用(3.1.31)の質量項やポテンシャル項はこの変換の下で不変に留まりますが、運動項がこの変換の下で不変ではありません。ゲージ群が $U(1)$ の場合と同様、これは $\partial_\mu \phi(x)$ が $\phi(x)$ と同じ変換性を示さず、 $\partial_\mu \phi'(x) = \partial_\mu(U(x)\phi(x))$ が $U(x)\partial_\mu \phi(x)$ と一致しない事から生じます：

$$\partial_\mu \phi'(x) \neq U(x)\partial_\mu \phi(x) \quad (3.1.33)$$

そこで、前節同様、これを解消する為に微分 ∂_μ を共変微分

$$D_\mu = \mathbf{1}\partial_\mu - iA_\mu(x) \quad (3.1.34)$$

に格上げして、これが次の等式を満たせと要請します：

$$D'_\mu \phi'(x) = U(x)D_\mu \phi(x) \quad (3.1.35)$$

但し、 $A_\mu(x)$ は $N \times N$ のエルミートな行列値関数です。 $D'_\mu \phi'(x) = D'_\mu U(x)\phi(x)$ に注意すると、式は共変微分が次の変換則を満たせと要請する事と等価です：

$$D'_\mu = U(x)D_\mu U^{-1}(x) \quad (3.1.36)$$

これを用いてゲージ場の変換則を求めましょう。上の右辺を計算すると次の様になります：

$$\begin{aligned} \mathbf{1}\partial_\mu - iA'_\mu(x) &= U(x)(\mathbf{1}\partial_\mu - iA_\mu(x))U^{-1}(x) \\ &= \mathbf{1}\partial_\mu + U(x)\partial_\mu U^{-1}(x) - iU(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

この両辺を比較する事でゲージ場の変換則が次の様に読み取れます：

$$A'_\mu(x) = U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) + iU(x)\partial_\mu U^{-1}(x) \quad (3.1.38)$$

場の強さ

次に場の強さ $F_{\mu\nu}$ を導入しましょう。これも $U(1)$ ゲージ理論の時と同様、共変微分の交換関係に虚数 i を掛けたものとして定義されます：

$$F_{\mu\nu}(x) = i[D_\mu, D_\nu]$$

$$\begin{aligned}
&= i[\mathbf{1}\partial_\mu - iA_\mu(x), \mathbf{1}\partial_\nu - iA_\nu(x)] \\
&= i([\mathbf{1}\partial_\mu, \mathbf{1}\partial_\nu] - i[\mathbf{1}\partial_\mu, A_\nu(x)] - i[A_\mu(x), \mathbf{1}\partial_\nu] - [A_\mu(x), A_\nu(x)]) \\
&= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - i[A_\mu(x), A_\nu(x)]
\end{aligned} \tag{3.1.39}$$

最後の交換関係 $[A_\mu, A_\nu]$ がゼロにならないという所が可換群 $U(1)$ の場合と異なります。また、上の $F_{\mu\nu}$ はゲージ変換の下で不変ではありません。その変換則を計算すると次の様になります：

$$\begin{aligned}
F'_{\mu\nu}(x) &= i[D'_\mu, D'_\nu] \\
&= i[U(x)D_\mu U^{-1}(x), U(x)D_\nu U^{-1}(x)] \\
&= iU(x)[D_\mu, D_\nu]U^{-1}(x) \\
&= U(x)F_{\mu\nu}(x)U^{-1}(x)
\end{aligned} \tag{3.1.40}$$

よって、 $U(1)$ ゲージ理論の場合と異なり $F_\mu F^{\mu\nu}$ は Lorentz 変換の下ではスカラーですが、ゲージ変換の下では $F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} = UF_{\mu\nu} F^{\mu\nu} U^{-1}$ と変換されてしまいます。しかし、これのトレースを取るとゲージ不変になります。実際、トレースの巡回性より $\text{Tr}(F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu}) = \text{Tr}(UF_{\mu\nu} F^{\mu\nu} U^{-1}) = \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} U^{-1}U) = \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$ が成り立ちます。従って、Lorentz 不変且つゲージ不変な作用は次の様になります：

$$S_{\text{YM}}[A] = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \tag{3.1.41}$$

この様な作用で記述される非可換ゲージ場の理論を $SU(N)$ Yang-Mills 理論と呼びます。規格化因子 $-1/(2g^2)$ についてはまた後で述べることにして、ここまでの議論で述べていない幾つか重要な事柄があるので、以下それを列挙しておきましょう：

① 単位元近傍の微小ゲージ変換

今までは有限のユニタリ行列 $U(x)$ で引き起こされるゲージ変換のみを調べてきましたが、 $U(x)$ が単位元 $\mathbf{1}$ 近傍にある場合の微小変換も重要なのでこれを調べておきましょう。 $\theta(x)$ を行列要素が微小な $N \times N$ 行列として、 $U(x)$ が次の様な形を取る場合を考えます：

$$U(x) = \mathbf{1} + i\theta(x) + O(\theta^2) \tag{3.1.42}$$

この時、 $\theta(x)$ の 1 次の近似で変換則(3.1.32)(3.1.38)(3.1.40)は次の様になります：

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= (\mathbf{1} + i\theta(x) + O(\theta^2)) \phi(x) \\
&= \phi(x) + i\theta(x)\phi(x) + O(\theta^2)
\end{aligned} \tag{3.1.43a}$$

$$\begin{aligned}
A'_\mu(x) &= (\mathbf{1} + i\theta(x) + O(\theta^2)) A_\mu(x) (\mathbf{1} - i\theta(x) + O(\theta^2)) + i(\mathbf{1} + i\theta(x) + O(\theta^2)) \partial_\mu (\mathbf{1} - i\theta(x) + O(\theta^2)) \\
&= A_\mu(x) + i[\theta(x), A_\mu(x)] + \partial_\mu \theta(x) + O(\theta^2)
\end{aligned} \tag{3.1.43b}$$

$$\begin{aligned}
F'_{\mu\nu}(x) &= (\mathbf{1} + i\theta(x) + O(\theta^2)) F_{\mu\nu}(x) (\mathbf{1} - i\theta(x) + O(\theta^2)) \\
&= F_{\mu\nu}(x) + i[\theta(x), F_{\mu\nu}(x)] + O(\theta^2)
\end{aligned} \tag{3.1.43c}$$

これより単位元近傍の微小ゲージ変換 $\phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x)$, $A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \delta A_\mu(x)$, $F'_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}(x) + \delta F_{\mu\nu}(x)$ が次で与えられる事が分かりました：

$$\delta\phi(x) = i\theta(x)\phi(x) \tag{3.1.44a}$$

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \theta(x) + i[\theta(x), A_\mu(x)] \tag{3.1.44b}$$

$$\delta F_{\mu\nu}(x) = i[\theta(x), F_{\mu\nu}(x)] \tag{3.1.44c}$$

この変換則は重要で、例えば式(3.1.44b)から Faddeev-Popov ゴーストの運動項が決まったりします。

② Lie 群 $SU(N)$ の生成子による展開

$U^\dagger(x) = U^{-1}(x)$ 及び $\det U(x) = 1$ より $\theta(x)$ は $\theta^\dagger(x) = \theta(x)$ と $\text{Tr} \theta(x) = 0$ を満たさなければなりません。この様なトレースレスなエルミート行列は $\theta(x)$ は次の様に展開出来ます：

$$\theta(x) = \theta^a(x) T^a \tag{3.1.45a}$$

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x) T^a \tag{3.1.45b}$$

$$F_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}^a(x) T^a \tag{3.1.45c}$$

但し、 T^a ($a = 1, 2, \dots, N^2 - 1$) は $SU(N)$ の生成子で次を満たします：

$$(\text{交換関係}) \quad [T^a, T^b] = if^{abc} T^c \tag{3.1.46a}$$

$$(エルミート性) \quad (T^a)^\dagger = T^a \quad (3.1.46b)$$

$$(トレースレス) \quad \text{Tr} T^a = 0 \quad (3.1.46c)$$

$$(規格化) \quad \text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (3.1.46d)$$

ここで、 f^{abc} は Lie 群 $SU(N)$ の構造定数と呼ばれるもので、添字の入れ替えについて完全反対称な量です。この生成子による展開を用いると、微小ゲージ変換の下での変換則が次の様に書き表されます:

$$\delta\phi(x) = i\theta^a(x)T^a\phi(x) \quad (3.1.47a)$$

$$\begin{aligned} \delta A_\mu(x) &= \partial_\mu\theta^a(x)T^a + i\theta^b(x)A_\mu^c(x)[T^b, T^c] \\ &= \partial_\mu\theta^a(x)T^a + i\theta^b(x)A_\mu^c(x)f^{bca}T^a \\ &= (\partial_\mu\theta^a(x) - f^{abc}\theta^b(x)A_\mu^c(x))T^a \end{aligned} \quad (3.1.47b)$$

$$\begin{aligned} \delta F_{\mu\nu}(x) &= i\theta^b(x)F_{\mu\nu}^c(x)[T^b, T^c] \\ &= i\theta^b(x)F_{\mu\nu}^c(x)f^{bca}T^a \\ &= -f^{abc}\theta^b(x)F_{\mu\nu}^c(x)T^a \end{aligned} \quad (3.1.47c)$$

但し、3行目で $f^{bca} = f^{abc}$ を使いました。これより式(3.1.45b)の展開係数関数 $A_\mu^a(x)$ の変換則が次の様に読み取れます:

$$\delta\phi_i(x) = i\theta^a(x)(T^a)_{ij}\phi_j(x) \quad (3.1.48a)$$

$$\delta A_\mu^a(x) = \partial_\mu\theta^a(x) - f^{abc}\theta^b(x)A_\mu^c(x) =: D_\mu^{ab}\theta^b(x) \quad (3.1.48b)$$

$$\delta F_{\mu\nu}^a(x) = -f^{abc}\theta^b(x)F_{\mu\nu}^c(x) \quad (3.1.48c)$$

但し、 D_μ^{ab} は次式で定義されます:*

$$D_\mu^{ab} = \delta^{ab}\partial_\mu - f^{abc}A_\mu^c(x) \quad (3.1.49)$$

また、 $F_{\mu\nu}^a$ の表式も重要なので、これを求めておきましょう。式(3.1.39)に式(3.1.45c)を代入すると次の様になります:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu A_\nu^a(x)T^a - \partial_\nu A_\mu^a(x)T^a - iA_\mu^b(x)A_\nu^c(x)[T^b, T^c] \\ &= \partial_\mu A_\nu^a(x)T^a - \partial_\nu A_\mu^a(x)T^a - iA_\mu^b(x)A_\nu^c(x)f^{bca}T^a \\ &= (\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + f^{abc}A_\mu^b(x)A_\nu^c(x))T^a \end{aligned} \quad (3.1.50)$$

これより $F_{\mu\nu}^a(x)$ が次の様に読み取れます:

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + f^{abc}A_\mu^b(x)A_\nu^c(x) \quad (3.1.51)$$

また、Yang-Mills 作用(3.1.41)は次の様に書き表されます:

$$\begin{aligned} S_{\text{YM}}[A] &= -\frac{1}{2g^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \text{Tr}(T^a T^b) \\ &= -\frac{1}{2g^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \frac{1}{2} \delta^{ab} \\ &= -\frac{1}{4g^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.1.52)$$

結合定数について

最後に実定数 g について述べておきましょう。可換ゲージ理論の時と同様、 g が結合定数を表すのですが、これを見る為に次の様に A_μ^a と θ^a を再定義しましょう:

$$A_\mu^a(x) \rightarrow gA_\mu^a(x) \quad \& \quad \theta^a(x) \rightarrow g\theta^a(x) \quad (3.1.53)$$

この置き換えの下で、ゲージ場と物質場が結合した理論は次の様な作用で記述されます:

$$S[A, \phi, \phi^\dagger] = S_{\text{YM}}[A] + S_{\text{matter}}[\phi, \phi^\dagger]$$

*3 式(3.1.49)で定義される D_μ^{ab} を随伴表現 (adjoint representations) に対する共変微分と呼びます。

$$= \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi - V(\phi^\dagger \phi) \right] \quad (3.1.54)$$

但し、この規格化の下では $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ で、共変微分は $D_\mu = \mathbf{1} \partial_\mu - ig A_\mu$ です。また、微小ゲージ変換の変換則は $\delta\phi_i = ig\theta^a (T^a)_{ij} \phi_j$, $\delta A_\mu^a = \partial_\mu \theta^a - g f^{abc} \theta^b A_\mu^c$, $\delta F_{\mu\nu}^a = -g f^{abc} \theta^b F_{\mu\nu}^c$ となります。これらからも分かりますが、この規格化の下では今まで f^{abc} と書いていたものを $g f^{abc}$ と置き換えれば良い事になっています。摂動計算をする時はこの規格化で計算を行います。

3.2 ゲージ固定と Faddeev-Popov ゴースト

前節でゲージ場の古典論の作用を構成したので、次にこれを元にゲージ場の量子論に於ける Green 関数の生成汎関数 $Z[J]$ について考えてみましょう。第1章及び第2章で強調した様に、場の量子論で最も重要なのは頂点関数ですが、これは生成汎関数 (有効作用) $\Gamma[\varphi]$ が分かれば求まるのでした。そして、有効作用 $\Gamma[\varphi]$ は Green 関数の生成汎関数 $Z[J]$ の対数を取ったもの (即ち連結 Green 関数の生成汎関数) $iW[J] = \log Z[J]$ の汎関数 Legendre 変換で得られるので、 $Z[J]$ さえ分かれば有効作用は原理的には書き下せる代物でした。さて、第2.1.2節で述べた様に、実スカラー場の理論の場合は Green 関数の生成汎関数 $Z[J]$ は次の汎関数積分で表されていました:

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left(iS[\phi] + i \int d^4x \phi(x) J(x) \right) \quad \text{with} \quad \int \mathcal{D}\phi = \prod_x \int d\phi(x) \quad (3.2.1)$$

但し、 $S[\phi]$ は実スカラー場の理論の古典作用です。そこで、ゲージ理論の時もこれに倣って次の様な c 数値関数 $J_\mu^a(x)$ の汎関数 $Z[J]$ を考えれば、Green 関数の生成汎関数が得られるだろうと思いたくなります:

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A \exp \left(iS_{\text{YM}}[A] + i \int d^4x A_\mu^a(x) J^{a\mu}(x) \right) \quad \text{with} \quad \int \mathcal{D}A = \prod_x \prod_a \int dA_0^a(x) \cdots dA_3^a(x) \quad (3.2.2)$$

しかし、この汎関数積分には色々とまずい所があって、次の様な問題があります:

① 伝播関数が定義出来ない

スカラー場の理論では微分演算子 $\partial^2 - m^2$ の逆 (に虚数 i を掛けたもの) が伝播関数を与えていましたが、式(3.1.16)から分かる様にゲージ理論の場合で微分演算子 $\partial^2 - m^2$ に対応するのは $\eta^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu$ です。従って、これの逆 (に虚数 i を掛けたもの) が伝播関数を与えたいと思いたくなりますが、実はこの微分演算子の逆は存在しません。これを見る為に ∂^2 を $\partial^2 - m^2$ に置き換えたもの $\eta^{\mu\nu} (\partial^2 - m^2) - \partial^\mu \partial^\nu$ を考え、これの逆 $\Delta_{\nu\rho}$ を考えてみましょう。これは次の微分方程式の解として与えられます。

$$[\eta^{\mu\nu} (\partial_x^2 - m^2) - \partial_x^\mu \partial_x^\nu] \Delta_{\nu\rho}(x, y) = i \delta^\mu_\rho \delta^4(x - y) \quad (3.2.3)$$

今から見て行く様にこの微分方程式の解は確かに存在するのですが、問題はその解の $m^2 \rightarrow 0$ の極限が存在するか否かで、実はそれが存在しないのです。まずは方程式(3.2.3)を解いてみましょう。この手の微分方程式は運動量空間で解くのが常套手段で、次の Fourier 積分表示を使います:

$$\Delta_{\nu\rho}(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}_{\nu\rho}(p) e^{ip(x-y)} \quad (3.2.4)$$

これを式(3.2.3)に代入すると、微分方程式は結局次の様になります:

$$[\eta^{\mu\nu} (-p^2 - m^2) + p^\mu p^\nu] \tilde{\Delta}_{\nu\rho}(p) = i \delta^\mu_\rho \quad (3.2.5)$$

さて、この $\tilde{\Delta}_{\nu\rho}(p)$ は Lorentz 変換の下で 2 階対称テンソルとして振る舞うのですが、いま手持ちにある 2 階対称テンソルは $\eta_{\nu\rho}$ と $p_\nu p_\rho$ しかないのです、必ずこれらの線型結合で表されなければなりません。従って、必ず次の形を取らなければなりません:

$$\tilde{\Delta}_{\nu\rho}(p) = A \eta_{\nu\rho} + B p_\nu p_\rho \quad (3.2.6)$$

但し、 A と B は線型結合の係数です。次にこの未定係数を決定しましょう。式(3.2.6)を式(3.2.5)左辺に代入すると次の様になります:

$$\begin{aligned} \text{式(3.2.10)の左辺} &= [\eta^{\mu\nu} (-p^2 - m^2) + p^\mu p^\nu] (A \eta_{\nu\rho} + B p_\nu p_\rho) \\ &= \delta^\mu_\rho (-p^2 - m^2) A + p^\mu p_\rho A + (-p^2 - m^2) p^\mu p_\rho B + p^2 p^\mu p_\rho B \\ &= \delta^\mu_\rho (-p^2 - m^2) A + p^\mu p_\rho (A - m^2 B) \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

よって、 $(-p^2 - m^2) A = i$ 且つ $A - m^2 B = 0$ でなければなりません。これより A と B が $A = \frac{1}{i} \frac{1}{p^2 + m^2}$, $B = \frac{A}{m^2}$ と決まります。結局、 $\tilde{\Delta}_{\nu\rho}(p)$ は次の様になる事が分かりました:

$$\tilde{\Delta}_{\nu\rho}(p) = \frac{1}{i} \frac{1}{p^2 + m^2} \left(\eta_{\nu\rho} + \frac{p_\nu p_\rho}{m^2} \right) \quad (3.2.8)$$

さて、問題はこれの $m^2 \rightarrow 0$ の極限が存在するか、という事ですが、 $1/m^2$ の項があるので明らかにその様な極限は存在しません。これは微分演算子 $\eta^{\mu\nu}\partial^2 - \partial^\mu\partial^\nu$ の逆は存在しないという事を意味します。

② **そもそも well-defined では無い**

簡単の為、式(3.2.2)で J_μ^a 及び \mathcal{N} の無い次の汎関数積分を考えましょう:

$$I = \int \mathcal{D}A e^{iS_{\text{YM}}[A]} \quad (3.2.9)$$

この汎関数積分は全てのゲージ場の配位についての「足し上げ」を行っているのですが、Yang-Mills 作用はゲージ不変なので、ゲージ変換で互に移り合うゲージ場の配位についても全て足し上げてしまっています。実はこれにより非常に悪い無限大が出て来て、この手の汎関数積分はそもそも well-defined ではないのです。

以上、少し抽象的過ぎたかもしれないので、上で挙げた問題点のもっと分かりやすい例を挙げておきましょう。簡単の為、次の様な 2次元平面 \mathbb{R}^2 上のおもちゃの積分を考えてみます:^{*4}

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} dx dy e^{\frac{i}{2} \mathbf{x}^\top K \mathbf{x}} \quad \text{with} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.10)$$

但し、 $\mathbf{x} = (x, y)^\top$ です。ゲージ理論の汎関数積分同様、この積分にも問題があって、上で挙げた 2つの問題点①②に対応するのは次の 2つです:

① **K には逆行列が無い**

殆ど自明ですが、 $\det K = 0$ なので K には逆行列がありません。これはゲージ理論の場合で言うと、微分演算子 $\eta^{\mu\nu}\partial^2 - \partial^\mu\partial^\nu$ の逆が存在しない事、即ち、伝播関数が定義出来ない事に対応します。 K に逆行列が存在しない理由は明白で、それは K がゼロ固有値を含んでいるからです。 K のゼロ固有値に属する固有ベクトルは $(0, 1)^\top$ ですが、ゲージ理論の場合でも微分演算子 $\eta^{\mu\nu}\partial^2 - \partial^\mu\partial^\nu$ はゼロ固有値を含んでいて、このゼロ固有値に属する固有ベクトルに対応するのが $A_\nu = \partial_\nu\theta$ の形のピュアゲージです。実際、容易に確かめられる様に任意の θ に対して $(\eta^{\mu\nu}\partial^2 - \partial^\mu\partial^\nu)\partial_\nu\theta = 0$ が成り立ちます。

② **そもそも I は well-defined ではない**

これも殆ど自明ですが、積分(3.2.10)は次の様に書けます:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^2} dx dy e^{\frac{i}{2} x^2} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy \right) \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\frac{i}{2} x^2} \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

これから明らかですが、この積分は $\int_{-\infty}^{\infty} dy = \infty$ を含んでいるのでそもそも well-defined ではありません。但し、この無限大の因子を取り除いた残りの部分 $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\frac{i}{2} x^2}$ は well-defined となっています。

以上、汎関数積分(3.2.2)(3.2.4)やおもちゃの積分(3.2.5)の問題点を挙げましたが、これらの問題の起源は全てゲージ対称性^{*5}で、今からやりたいのは、式(3.2.11)の様に汎関数積分(3.2.9)から無限大の因子を括りだす事です:

$$\begin{aligned} I &= \int \mathcal{D}A e^{iS_{\text{YM}}[A]} \\ &= \left(\int \mathcal{D}\theta \right) \int \widetilde{\mathcal{D}}A e^{iS_{\text{YM}}[A]} \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

但し、 $\int \mathcal{D}\theta$ が空間各点でのゲージ自由度から来る「ゲージ群の体積」で、 $\int \widetilde{\mathcal{D}}A e^{iS_{\text{YM}}[A]}$ がもはやゲージ対称性の無い汎関数積分を表しています。汎関数積分から上の様に「ゲージ群の体積」を括り出す事がゲージ固定 (**gauge-fixing**) で、これを行う巧妙なトリックが Faddeev-Popov の方法です。これは 1967 年に Ludvig Faddeev と Victor Popov によって与えられました。以下、Faddeev-Popov の方法に従ってゲージ理論のゲージ固定を行う事にしましょう。

^{*4} このおもちゃの例は Anthony Zee の教科書 *Quantum Field Theory in a Nutshell* の Chapter III.4 から殆どそのまま拝借しました。

^{*5} ゲージ対称性と呼ぶよりもゲージ冗長性 (**gauge redundancy**) と呼ぶ方がよりの確です。

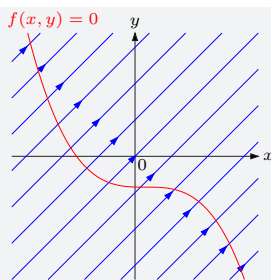


図3.1: ゲージ軌道とゲージ固定. 青色の直線がゲージ軌道を表し, 赤色の曲線がゲージ固定条件 $f(x, y) = 0$ で定まる曲線を表しています. この曲線は全てのゲージ軌道を1度だけ横切るものでなければなりません.

3.2.1 ゲージ軌道とゲージ固定その1: 初等積分の場合

ゲージ理論のゲージ固定を議論する前に, 簡単な初等積分を例にして Faddeev-Popov のゲージ固定処方を見ておきましょう. 簡単の為, 次の様な2次元平面 \mathbb{R}^2 上の積分を考えます:

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} dx dy e^{iS(x,y)} \quad (3.2.13)$$

但し, $S(x, y)$ は並進群の下で不変だとして, 任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して次の等式が成り立つと仮定しましょう:

$$S(x, y) = S(x + a, y + a), \quad \forall a \in (-\infty, \infty) \quad (3.2.14)$$

以下では, 積分変数 (x, y) をゲージ場, 2次元平面 \mathbb{R}^2 をゲージ場の配位空間, $S(x, y)$ をゲージ理論の作用, そして並進対称性をゲージ対称性で見立てて, ゲージ固定を行っていきます.

まずゲージ群の体積の分離とはどういう事かを通常の変数変換を用いて見ておきましょう. まず, 並進対称性より任意の (x, y) に対して次が成り立ちます:

$$S(x, y) = S(x - y, 0) \quad (3.2.15)$$

実際, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を任意に固定した時, 条件式 $S(x, y) = S(x + a, y + a)$ の任意定数 a として $a = -y$ を選べば $S(x, y) = S(x - y, 0)$ が言えます. 要するに, 並進対称性のある理論では関数 $S(x, y)$ は差 $x - y$ のみに依存します. そこで, 次の様な変数変換を考えましょう:

$$u = x - y \quad \& \quad v = \frac{x + y}{2} \quad (3.2.16)$$

これを逆に解くと $(x, y) = (v + \frac{1}{2}u, v - \frac{1}{2}u)$ と表せます. よって, 上の変数変換の Jacobi 行列式は次の様になります:

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad (3.2.17)$$

従って積分(3.2.13)は次の様に書き換えられます:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^2} dx dy e^{iS(x-y,0)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} du dv \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| e^{iS(u,0)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} du dv e^{iS(u,0)} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dv \right) \int_{-\infty}^{\infty} du e^{iS(u,0)} \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

これで v 積分 $\int_{-\infty}^{\infty} dv$ が括りだせました. これが並進群の体積で, 残りの部分 $\int_{-\infty}^{\infty} du e^{iS(u,0)}$ がゲージ固定された理論の積分です. $\int_{-\infty}^{\infty} dv = \infty$ なので積分(3.2.13)はそもそも well-defined ではなかった事に注意しましょう.

さて, ゲージ場の理論の時も同じ様にゲージ群の体積を分離したいのですが, ゲージ理論では式(3.2.16)の様な上手い変数変換を行うのは難しいので, 別の方策を立てる事にします.

まず、式(3.2.18)の最後の積分は次の様に書ける事に注意しましょう:

$$\int_{-\infty}^{\infty} du e^{iS(u,0)} = \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \delta(y) e^{iS(x,y)} \quad (3.2.19)$$

この表式から明らかですが、並進群の体積を取り除いた部分というのは、元々の積分を $y = 0$ の直線上に制限したものに他ならないという事が分かります。これはもっと一般化する事が出来て、実は $y = 0$ の直線でもなくともゲージ軌道 (gauge orbit) を1度だけ横切る曲線ならなんでも良いのです。ここでゲージ軌道とはゲージ場 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を任意に固定した時、この点をゲージ変換していった時に描くゲージ場の配位空間上の軌跡の事で、要するにゲージ変換 $(x+a, y+a) = (x, y) + a(1, 1)$ のパラメータ a を $-\infty$ から $+\infty$ まで変化させていった時に描く \mathbb{R}^2 上の軌跡の事です。ベクトル $(1, 1)$ は右肩上がり 45 度を向いているので、ゲージ軌道は図3.1に示す青色の直線の集合になります。ゲージ固定の第1ステップはこのゲージ軌道を1度だけ横切る曲線を見つける事で、このような曲線は一般に次の方程式で定められます:

$$f(x, y) = 0 \quad (3.2.20)$$

例えば $y = 0$ の直線上にゲージを固定する場合は $f(x, y) = y$, $y = -x$ の直線上にゲージを固定する場合は $f(x, y) = x + y$, $y = -x^3$ の曲線上にゲージを固定する場合は $f(x, y) = y + x^3$ 等となります。このような関数 $f(x, y)$ をゲージ固定関数 (gauge-fixing function) と呼び、これは次の条件を満たしていなければなりません:

- ① 任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $f(x+a, y+a) = 0$ を満たす $a \in (-\infty, \infty)$ が唯一存在する
- ② $f(x+a, y+a) = f(x, y)$ が成り立つのは $a = 0$ の場合のみ

まず条件①は曲線 $f(x, y) = 0$ がゲージ軌道を1度だけ横切る事を保証し、条件②はゲージ固定関数自身はゲージ不変では無いことを要請しています。以下、このようなゲージ固定関数が1つ見つかったとしましょう。この時、ゲージ固定の第2のステップは、このゲージ固定関数を用いて次の量 $\Delta_f(x, y)$ を定義する事です:

$$[\Delta_f(x, y)]^{-1} := \int_{-\infty}^{\infty} da \delta(f(x+a, y+a)) \quad (3.2.21)$$

容易に確かめられる様に、この様に定義された $\Delta_f(x, y)$ はゲージ不変です。即ち、任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して次が成り立ちます:

$$\Delta_f(x+a, y+a) = \Delta_f(x, y), \quad \forall a \in (-\infty, \infty) \quad (3.2.22)$$

実際、定義に従って左辺を計算すると、右辺に一致する事が次の様にして確かめられます:

$$\begin{aligned} [\Delta(x+a, y+a)]^{-1} &= \int_{-\infty}^{\infty} da' \delta(f(x+a+a', y+a+a')) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} da'' \delta(f(x+a'', y+a'')) \\ &= [\Delta_f(x, y)]^{-1} \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

但し、2行目に変数変換 $a'' = a + a'$ を行い、この変数変換の下で積分測度が不変である事、即ち、 $\int_{-\infty}^{\infty} da' = \int_{-\infty}^{\infty} da''$ を使いました。式(3.2.21)で定義される $\Delta_f(x, y)$ を Faddeev-Popov 行列式 (Faddeev-Popov determinant) と呼びます。定義から明らかですが、次の等式が成り立つ事に注意しましょう:

$$1 = \Delta_f(x, y) \int_{-\infty}^{\infty} da \delta(f(x+a, y+a)) \quad (3.2.24)$$

この等式は任意の (x, y) に対して成り立ちます。従って、この (x, y) を積分変数の (x, y) と同一視する事が可能で、この1を式(3.2.13)に挿入すると次の様になります:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^2} dx dy e^{iS(x,y)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} dx dy e^{iS(x,y)} \Delta_f(x, y) \int_{-\infty}^{\infty} da \delta(f(x+a, y+a)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} da \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \Delta_f(x, y) \delta(f(x+a, y+a)) e^{iS(x,y)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} da \int_{\mathbb{R}^2} dx' dy' \Delta_f(x', y') \delta(f(x', y')) e^{iS(x', y')} \end{aligned}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} da \right) \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \Delta_f(x, y) \delta(f(x, y)) e^{iS(x, y)} \quad (3.2.25)$$

但し、4行目でゲージ変換(変数変換) $(x', y') = (x + a, y + a)$ を行い、積分測度 $\int_{\mathbb{R}^2} dx dy$ 、Faddeev-Popov行列式 $\Delta_f(x, y)$ 、作用 $S(x, y)$ の3つ全てがこのゲージ変換の下で不変である事を用いました。以上で、変数変換を行わずとも並進群の体積 $\int_{-\infty}^{\infty} da$ が括りだせて、曲線 $f(x, y) = 0$ 上にゲージを固定した積分が得られました。これがFaddeev-Popovのゲージ固定処方です。ここで、式(3.2.25)はゲージ固定関数の選び方には依らない、という事に注意しておきましょう。一見すると式(3.2.25)は $f(x, y)$ を含んでいるのでゲージ固定関数に依存しているかのように見えますが、実際はゲージ固定関数の選び方には依りません。これは元々の積分(3.2.13)は $f(x, y)$ には依存していなかったのが当然です。

以上、一般論を繰り広げたので、ここで簡単な例を1つ挙げておきましょう。ゲージ固定関数として次の様な関数を持って来ます:

$$f(x, y) = y - \alpha \quad (3.2.26)$$

但し、 α は任意の実定数です。このゲージ固定関数は先の条件①と②を満たします。実際、ゲージ固定条件 $f(x, y) = 0$ は直線 $y = \alpha$ を与えますが、この直線は図2.1から明らかな様にゲージ軌道を1度だけ横切ります。次に、このゲージ固定関数の場合のFaddeev-Popov行列式を求めてみましょう。積分にはデルタ関数の因子 $\delta(f(x, y))$ があるので、 $\Delta_f(x, y)$ は $f(x, y) = 0$ を満たすゲージ場の配位に対してのみ考えれば良い事になります。この時、Faddeev-Popov行列式は一般に次の様に計算されます:^{*6}

$$\begin{aligned} \Delta_f(x, y) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} da \delta(f(x + a, y + a)) \right)^{-1} \\ &= \left| \frac{\partial f(x + a, y + a)}{\partial a} \right|_{a=0} \quad (\text{但し, } (x, y) \text{ は条件 } f(x, y) = 0 \text{ を満たす}) \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

特にゲージ固定関数(3.2.31)に対しては次の様になります:

$$\Delta_f(x, y) = \left| \frac{\partial f(x + a, y + a)}{\partial a} \right|_{a=0} = \left| \frac{\partial}{\partial a} (y + a - \alpha) \right|_{a=0} = 1 \quad (\text{但し, } (x, y) \text{ は条件 } f(x, y) = 0 \text{ を満たす}) \quad (3.2.28)$$

これらの結果を代入すると、積分(3.2.25)は次の様になります:

$$\begin{aligned} I &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} da \right) \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \Delta_f(x, y) \delta(f(x, y)) e^{iS(x, y)} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} da \right) \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \delta(y - \alpha) e^{iS(x, y)} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} da \right) \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{iS(x, \alpha)} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} da \right) \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{iS(x - \alpha, 0)} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} da \right) \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{iS(x, 0)} \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

但し、3行目で y 積分を実行し、4行目で等式 $S(x, \alpha) = S(x - \alpha, 0)$ を使い、5行目で $x \rightarrow x + \alpha$ と変数変換しました。これは変数変換(3.2.16)をして得られた結果(3.2.18)を完全に再現している事に注意しましょう。以上、簡単なゲージ固定関数(3.2.26)の場合を扱いましたが、もっと複雑なゲージ固定関数でも結果は同じになります。

Nakanishi-Lautrap 場の導入

さて、単にゲージ固定したいだけなら式(3.2.25)の積分で十分なのですが、場の理論への応用、特に摂動論への応用上は式(3.2.25)の表式は使い勝手が悪いので、摂動論への応用を念頭に置いて式(3.2.25)を変形して行く事にします。まず、次の等式が成り立つ事に注意しましょう:

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dB \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \exp \left(i \left[\frac{\xi}{2} B^2 + \alpha B \right] \right) \quad (3.2.30)$$

^{*6} これはデルタ関数に対して成り立つ次の公式から従います:

$$\delta(g(a)) = \sum_{a_i \in \{a: g(a_i)=0\}} \frac{1}{|g'(a_i)|} \delta(a - a_i)$$

式(3.2.32)を示すには、まず $f(x + a, y + a)$ を a の関数だと思って、 $f(x, y) = 0$ を満たす (x, y) に対しては $f(x + a, y + a) = 0$ を満たす a は $a = 0$ しか無い、という事を使います。 $a = 0$ しか無いというのはゲージ固定関数はゲージ軌道を1度だけ横切るという仮定①から従います。

但し, ξ は任意の実定数です. 実際, 直接計算で確かめられる様に, 右辺の積分を計算すると 1 になります:

$$\begin{aligned} \text{式(3.2.30)の右辺} &= \int_{-\infty}^{\infty} dB e^{i\frac{\xi}{2}B^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{2\pi} e^{i\alpha B} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dB e^{i\frac{\xi}{2}B^2} \delta(B) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

この計算からも分かりますが, 一般には $e^{i\frac{\xi}{2}B^2}$ の部分は $g(0) = 1$ を満たす関数 $g(B)$ なら何でも良いのですが, 摂動論への応用上は Gauss 型の関数が扱いやすいので, 上の様を選んでみます.

さて, ゲージ固定関数は式(3.2.26)と同じ $f(x, y) = y - \alpha$ を選びましょう. すると, 積分(3.2.25)は実際は α には依存していないので, ゲージ固定関数の α と上の積分変数の α を同一視する事が可能で, 式(3.2.30)の 1 を挿入する事で次の様に書き換える事が出来ます:

$$\begin{aligned} I &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} da \right) \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \Delta_f(x, y) \delta(f(x, y)) e^{iS(x, y)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} da \right) \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \Delta_f(x, y) \delta(y - \alpha) e^{iS(x, y)} \int dB \int d\alpha e^{i[\frac{\xi}{2}B^2 + \alpha B]} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} da \right) \int dx dy dB d\alpha \Delta_f(x, y) \delta(y - \alpha) e^{i[S(x, y) + \frac{\xi}{2}B^2 + \alpha B]} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} da \right) \int dx dy dB \Delta_f(x, y) e^{i[S(x, y) + \frac{\xi}{2}B^2 + yB]} \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

但し, 3 行目でデルタ関数を使って α 積分を実行しました. この式変形で現れた補助的な積分変数 B を **Nakanishi-Lautrap** 場又は **B** 場と呼びます.

Faddeev-Popov ゴーストの導入

さて, 最後に Faddeev-Popov 行列式を書き換えましょう. Grassmann 数の積分を思い出すと, Faddeev-Popov 行列式(3.2.27)は一般に 2 つの実 Grassmann 数 c と \bar{c} を用いて次の様に表す事が出来ます:

$$\begin{aligned} \Delta_f(x, y) &= \left| \frac{\partial f(x+a, y+a)}{\partial a} \right|_{a=0} \\ &= \int dc d\bar{c} \exp \left(\bar{c} \left| \frac{\partial f(x+a, y+a)}{\partial a} \right|_{a=0} c \right) \quad (\text{但し, } (x, y) \text{ は条件 } f(x, y) = 0 \text{ を満たす}) \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

特にゲージ固定関数 $f(x, y) = y - \alpha$ に対しては $\left| \frac{\partial f(x+a, y+a)}{\partial a} \right|_{a=0} = 1$ なので, これを用いて式(3.2.33)を式(3.2.32)に代入すると, 結局元々の積分 I は次の様に書き表す事が出来ます:

$$\begin{aligned} I &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} da \right) \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \Delta_f(x, y) \delta(f(x, y)) e^{iS(x, y)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} da \right) \int dx dy dc d\bar{c} dB \exp \left(i \left[S(x, y) - i\bar{c}c + \frac{\xi}{2}B^2 + yB \right] \right) \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

この Faddeev-Popov 行列式の書き換えで現れた実 Grassmann 数 c と \bar{c} をそれぞれ **Faddeev-Popov** ゴースト, **Faddeev-Popov** 反ゴーストと呼びます.

さて, 今までずっとおもちゃの初等積分を扱ってきましたが, 実はゲージ理論のゲージ固定はわざわざ難しい汎関数積分を持ち出さなくても, 本質的な部分は上の初等積分の例で尽きています. 実際, Yang-Mills 理論をゲージ固定すると, 式(3.2.34)の指数関数の引数部分 $S(x, y) - i\bar{c}c + \frac{\xi}{2}B^2 + yB$ と全く同様の作用が得られるのです. また, 上の積分(3.2.34)には **BRST** 対称性と呼ばれる大局的な Fermi 的対称性もあります*7. この BRST 対称性については後の節で触れる事にして, 以下ではまず上の結果をゲージ場の理論へ

*7 容易に確認出来る様に, ゲージ固定された作用 $S_{\text{total}}(x, y, c, \bar{c}, B) = S(x, y) - i\bar{c}c + \frac{\xi}{2}B^2 + yB$ は次の変換の下で不変です:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x + \epsilon c \\ y &\rightarrow y + \epsilon c \\ c &\rightarrow c \\ \bar{c} &\rightarrow \bar{c} - i\epsilon B \\ B &\rightarrow B \end{aligned}$$

但し, ϵ は変換のパラメータで, Grassmann 数です. 上の変換を BRST 変換と呼び, この変換の下での不変性を BRST 対称性と呼びます. 上 2 つはゲージ変換 $(x, y) \rightarrow (x+a, y+a)$ の $a = \epsilon c$ の場合に他ならない事に注意しましょう.

と拡張して行きましょう。

3.2.2 ゲージ軌道とゲージ固定その2: ゲージ理論の場合

さて、それではいよいよゲージ場の理論のゲージ固定に取り掛かりましょう。今からやりたい事は、式(3.2.12)で示した様に汎関数積分 $I = \int \mathcal{D}A e^{iS_{\text{YM}}[A]}$ を次の様に分離する事です:

$$(\text{ゲージ軌道を1度だけ横切る曲線に沿った汎関数積分}) \times (\text{ゲージ群の体積}) \quad (3.2.35)$$

これを行う為に、ここで1つだけ新たな記法を導入しておきましょう。以下ではゲージ群 $SU(N)$ の元として $U(x) = \exp(i\theta^a(x)T^a)$ の形のものを持って来て、これで引き起こされるゲージ変換(3.1.38)を次の様に書く事にします:

$$A_\mu^\theta(x) := e^{i\theta^a(x)T^a} A_\mu(x) e^{-i\theta^a(x)T^a} + ie^{i\theta^a(x)T^a} \partial_\mu e^{-i\theta^a(x)T^a} \quad (3.2.36)$$

また、この関数 θ^a を連続的に変えていった時に描くゲージ場の配位空間の中での軌跡をゲージ軌道 (gauge orbit) と呼びます。前節の式(3.2.25)でやった様に、「ゲージ群の体積」の分離は次の3つのステップで行われます:

① ゲージ固定関数を見つける

ゲージ固定を行う為に、まずゲージ軌道の中から代表元を1つだけ選び出す必要があります。これは次の性質を満たすゲージ固定関数 (gauge-fixing function) $f^a(A)$ ($a = 1, \dots, N^2 - 1$) を見つける事で完了します:

- (a) 任意の $A_\mu(x)$ に対して $f^a(A^\theta(x)) = 0$ を満たす $U(x) = \exp(i\theta^a(x)T^a)$ がただ1つ存在する。
- (b) $f^a(A(x)) = f^a(A^\theta(x))$ となるのは $\theta^a(x) = 0$ の場合のみ。

前節でもやった様に、まず(a)は条件 $f^a(A(x)) = 0$ で定められる「曲線」がゲージ軌道を1度だけ横切る為に必要です。一方、(b)はゲージ固定関数自身はゲージ不変では無い事を要請しています。簡単な為、以下ではこの様なゲージ固定関数が1つ与えられたとしましょう。

② Faddeev-Popov 行列式の導入

ゲージ固定の次のステップは、上のゲージ固定関数を用いて次の量 $\Delta_f(A)$ を導入する事です:

$$[\Delta_f(A)]^{-1} := \int \mathcal{D}\theta \delta[f(A^\theta)] \quad (3.2.37)$$

但し、

$$\delta[f(A^\theta)] = \prod_x \prod_a \delta(f^a(A^\theta(x))) \quad (3.2.38)$$

また、積分測度 $\mathcal{D}\theta$ はおおよそ $\prod_x \prod_a d\theta^a(x)$ で、これはゲージ不変なものを持って来ます。

さて、まず上の様にして定義した $\Delta_f(A)$ はゲージ不変である事に注意しましょう。実際、次が成り立ちます:

$$\begin{aligned} [\Delta_f(A^\theta)]^{-1} &= \int \mathcal{D}\theta' \delta[f((A^\theta)^\theta)] \\ &= \int \mathcal{D}\theta' \delta[f(A^{\theta''})] \\ &= \int \mathcal{D}\theta'' \delta[f(A^{\theta''})] \\ &= [\Delta_f(A)]^{-1} \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

ここで、2行目の θ'' は $e^{i\theta''^a T^a} = e^{i\theta^a T^a} e^{i\theta'^a T^a}$ で定められる関数 $\theta''^a(x)$ を表します。また、3行目の等号は積分測度のゲージ不変性 $\mathcal{D}\theta'' = \mathcal{D}\theta'$ から従います。また、殆ど自明ですが、式(3.2.37)から次の等式が成り立ちます:

$$1 = \Delta_f(A) \int \mathcal{D}\theta \delta[f(A^\theta)] \quad (3.2.40)$$

式(3.2.37)で定義される $\Delta_f(A)$ を **Faddeev-Popov 行列式** と呼びます。

③ 「ゲージ群の体積」の分離

ゲージ固定の最後のステップは、上の等式(3.2.40)を汎関数積分 $I = \int \mathcal{D}A e^{iS_{\text{YM}}[A]}$ に挿入する事です。式(3.2.40)は任意のゲージ場 A_μ に対して成り立つので、式(3.2.40)の A と汎関数積分 I の積分変数の A を同一視する事が出来て、次の様になります:

$$I = \int \mathcal{D}A e^{iS_{\text{YM}}[A]} \cdot 1$$

$$\begin{aligned}
&= \int \mathcal{D}A e^{iS_{\text{YM}}[A]} \cdot \Delta_f(A) \int \mathcal{D}\theta \delta[f(A^\theta)] \\
&= \int \mathcal{D}\theta \int \mathcal{D}A \Delta_f(A) \delta[f(A^\theta)] e^{iS_{\text{YM}}[A]} \\
&= \left(\int \mathcal{D}\theta \right) \int \mathcal{D}A \Delta_f(A) \delta[f(A)] e^{iS_{\text{YM}}[A]} \tag{3.2.41}
\end{aligned}$$

但し、3行目で汎関数積分の順序を $\int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}\theta = \int \mathcal{D}\theta \int \mathcal{D}A$ と入れ替え、4行目で積分変数を $A \rightarrow A^{-\theta}$ と変数変換し、 $(A^{-\theta})^\theta = A$ 、 $\mathcal{D}A^{-\theta} = \mathcal{D}A$ 、 $\Delta_f(A^{-\theta}) = \Delta_f(A)$ 、 $S_{\text{YM}}[A^{-\theta}] = S_{\text{YM}}[A]$ を使いました。最後の3つは積分測度 $\mathcal{D}A$ 、Faddeev-Popov 行列式、Yang-Mills 作用のゲージ不変性から従います。積分 $(\int \mathcal{D}\theta)$ は時空の各点でのゲージ自由度を寄せ集めたもので、これが「ゲージ群の体積」を表します。以上で、汎関数積分 I を「(ゲージ軌道を1度だけ横切る曲線に沿った汎関数積分) \times (ゲージ群の体積)」と分離する事が出来ました。

最後に $\Delta_f(A)$ がなぜ Faddeev-Popov 「行列式」と呼ばれるか説明しておきましょう。式(3.2.41)はデルタ汎関数 $\delta[f(A)]$ を含んでいるので、 $\Delta_f(A)$ は $f^a(A) = 0$ を満たすゲージ場の配位に対して考えれば充分です。この時、 $\Delta_f(A)$ を定義(3.2.37)に従って評価すると、次の様な汎関数行列式で表される事が言えます：^{*8}

$$\Delta_f(A) = \left(\int \mathcal{D}\theta \delta[f(A^\theta)] \right)^{-1} = |\det M^{ab}(x, y)| \quad \text{for } A_\mu^a \in \{A_\mu^a : f^a(A) = 0\} \tag{3.2.42}$$

但し、 $M^{ab}(x, y)$ は次で定義される汎関数行列です：

$$M^{ab}(x, y) := \left. \frac{\delta f^a(A^\theta(x))}{\delta \theta^b(y)} \right|_{\theta=0} \tag{3.2.43}$$

これを使うと、汎関数積分(3.2.41)は次の様に書き直せます：

$$I = \left(\int \mathcal{D}\theta \right) \int \mathcal{D}A |\det M^{ab}(x, y)| \delta[f(A)] e^{iS_{\text{YM}}[A]} \tag{3.2.44}$$

この汎関数積分はゲージ固定関数の選び方には依存しない事に注意しておきましょう。これは、元々の I が $f^a(A)$ には依存していなかったのが当然です。

さて、単にゲージ固定をしたいだけなら以上で充分なのですが、式(3.2.44)は汎関数行列式やデルタ汎関数が入っていて全く実用的ではありません。そこで、以下では摂動論で使い易い様に式(3.2.44)を書き換えて行く事にします。この書き換えも前節の初等積分の例と同じで、Nakanishi-Lautrap 場と Faddeev-Popov ゴーストを導入する事でデルタ汎関数や行列式の寄与を Yang-Mills 作用 S_{YM} に付け加わる或る局所的な項として表す事が出来ます。以下、まずは Faddeev-Popov ゴーストの導入からやって行きましょう。

Faddeev-Popov ゴーストの導入

まず最初に Faddeev-Popov 行列式に現れる汎関数行列 $M^{ab}(x, y) = \left. \frac{\delta f^a(A^\theta(x))}{\delta \theta^b(y)} \right|_{\theta=0}$ を計算しておきましょう。汎関数微分の連鎖公式を使うと、これは一般に次の様に書き表す事が出来ます：

$$M^{ab}(x, y) = \left. \frac{\delta f^a(A^\theta(x))}{\delta \theta^b(y)} \right|_{\theta=0} = \int d^4z \left. \frac{\delta f^a(A(x))}{\delta A_\mu^c(z)} \frac{\delta A_\mu^c(z)}{\delta \theta^b(y)} \right|_{\theta=0} \tag{3.2.45}$$

右辺の1番目の因子 $\left. \frac{\delta f^a(A(x))}{\delta A_\mu^c(z)} \right|_{\theta=0}$ はゲージ固定関数を指定しなければ計算出来ませんが、2番目の因子 $\left. \frac{\delta A_\mu^c(z)}{\delta \theta^b(y)} \right|_{\theta=0}$ は一般に書き下す事が出来ます。まず、式(3.1.48b)より $\theta^a = 0$ 近傍での無限小ゲージ変換は次の様に書ける事に注意しましょう：

$$\begin{aligned}
A_\mu^{c\theta}(z) &= A_\mu^c(z) + D_\mu^{cd}\theta^d(z) + O(\theta^2) \\
&= A_\mu^c(z) + \left(\delta^{cd} \frac{\partial \theta^d(z)}{\partial z^\mu} - f^{cde} A_\mu^e(z) \theta^d(z) \right) + O(\theta^2) \\
&= A_\mu^c(z) + \int d^4y \left(\delta^{cd} \delta^4(z-y) \frac{\partial \theta^d(y)}{\partial y^\mu} - f^{cde} A_\mu^e(z) \delta^4(z-y) \theta^d(y) \right) + O(\theta^2)
\end{aligned}$$

^{*8} 式(3.2.42)は n 次元デルタ関数に対して成り立つ次の等式の汎関数版です：

$$\int d^n \mathbf{x} \delta^n(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \frac{1}{|\det M|} \quad \text{with } M^{ab} = \left. \frac{\partial f^a(\mathbf{x})}{\partial x^b} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$$

但し、 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f^1(\mathbf{x}), \dots, f^n(\mathbf{x}))$ は $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ を変数とする n 変数の n 次元ベクトル値関数、 \mathbf{x}_0 は $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ を満たすこのベクトル値関数のただ一つの零点を表すとします。

$$\begin{aligned}
&= A_\mu^c(z) + \int d^4y \left(-\delta^{cd} \frac{\partial \delta^4(z-y)}{\partial y^\mu} \theta^d(y) - f^{cde} A_\mu^e(z) \delta^4(z-y) \theta^d(y) \right) + O(\theta^2) \\
&= A_\mu^c(z) + \int d^4y \left(\delta^{cd} \frac{\partial \delta^4(z-y)}{\partial z^\mu} \theta^d(y) - f^{cde} A_\mu^e(z) \delta^4(z-y) \theta^d(y) \right) + O(\theta^2) \\
&= A_\mu^c(z) + \int d^4y (D_\mu^{cd} \delta^4(z-y)) \theta^d(y) + O(\theta^2)
\end{aligned} \tag{3.2.46}$$

但し、4行目で部分積分をし、5行目で $\frac{\partial \delta^4(z-y)}{\partial y^\mu} = -\frac{\partial \delta^4(z-y)}{\partial z^\mu}$ を使いました。また、最終行の微分 $D_\mu^{cd} = \delta^{cd} \partial_\mu - f^{cde} A^e$ は変数 z に作用すると理解しておきます。上の無限小ゲージ変換の表式を使って汎関数微分 $\left. \frac{\delta A_\mu^c(z)}{\delta \theta^b(y)} \right|_{\theta=0}$ を計算すると次のようになります：

$$\left. \frac{\delta A_\mu^c(z)}{\delta \theta^b(y)} \right|_{\theta=0} = D_\mu^{cb} \delta^4(z-y) \tag{3.2.47}$$

これより、式(3.2.45)は一般に次の様子的に書き表される事が分かります：

$$M^{ab}(x, y) = \left. \frac{\delta f^a(A^\theta(x))}{\delta \theta^b(y)} \right|_{\theta=0} = \int d^4z \frac{\delta f^a(A(x))}{\delta A_\mu^c(z)} D_\mu^{cb} \delta^4(z-y) \tag{3.2.48}$$

さて、次にゲージ固定関数を1つ具体的に与えてみましょう。よく使われるのは、Lorentz 不変で且つゲージ場について線型な次の様なゲージ固定関数です：

$$f^a(A(x)) = \partial^\mu A_\mu^a(x) - \alpha^a(x) \tag{3.2.49}$$

ここで、 α^a は任意関数です。 $\alpha^a = 0$ の場合はゲージ固定条件 $f^a(A) = 0$ は通常の Lorenz 条件 $\partial^\mu A_\mu^a = 0$ を与える事に注意しましょう。上のゲージ固定関数が先程の条件 (a)(b) を満たすかどうかは確認しなければなりません⁹、取り敢えずこの問題は置いておいて⁹、まずは Faddeev-Popov 行列式を計算してみましょう。これは式(3.2.48)を使っても良いし、改めて汎関数行列 $M^{ab}(x, y) = \left. \frac{\delta f^a(A^\theta(x))}{\delta \theta^b(y)} \right|_{\theta=0}$ を計算しても良いです。ここでは改めてこの汎関数行列を計算する事にしましょう。まず、式(3.1.48b)から $A_\mu^{\theta^b} = A_\mu^a + D_\mu^{ab} \theta^b + O(\theta^2)$ なので、これを使って $f^a(A^\theta)$ を $\theta^a = 0$ 近傍で評価すると次のようになります：

$$\begin{aligned}
f^a(A^\theta(x)) &= \partial^\mu (A_\mu^a(x) + D_\mu^{ab} \theta^b(x) + O(\theta^2)) - \alpha^a(x) \\
&= f^a(A(x)) + \partial^\mu D_\mu^{ab} \theta^b(x) + O(\theta^2) \\
&= f^a(A(x)) + \int d^4y (\partial^\mu D_\mu^{ab} \delta^4(x-y)) \theta^b(y) + O(\theta^2)
\end{aligned} \tag{3.2.50}$$

但し、3行目の等号は式(3.2.46)と同様の計算から従います。また、3行目の微分 $\partial^\mu D_\mu^{ab}$ は変数 x に作用している事に注意しましょう。この表式を使うと次が得られます：

$$M^{ab}(x, y) = \left. \frac{\delta f^a(A^\theta(x))}{\delta \theta^b(y)} \right|_{\theta=0} = \partial^\mu D_\mu^{ab} \delta^4(x-y) \tag{3.2.51}$$

式(3.2.48)を使って導出する場合は、 $\frac{\delta f^a(A(x))}{\delta A_\mu^c(z)} = \delta^{ac} \partial_\mu^z \delta^4(x-z)$ を使えば全く同じ結果が得られます。

以上で汎関数行列 $M^{ab}(x, y) = \left. \frac{\delta f^a(A^\theta(x))}{\delta \theta^b(y)} \right|_{\theta=0}$ の評価が終わったので、次に Faddeev-Popov 行列式を摂動論で使い易い表式に書き直しましょう。その為に、まず任意の n 次正方行列 $M = (M_{ij})$ に対して成り立つ次の多変数 Grassmann 数の積分公式を思い出します：

$$\int d^n c d^n \bar{c} \exp \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{c}_i M_{ij} c_j \right) = \det M \quad \text{with} \quad d^n c d^n \bar{c} = dc_n \cdots dc_1 d\bar{c}_1 \cdots d\bar{c}_n \tag{3.2.52}$$

但し、 c_i, \bar{c}_i は共に実数の Grassmann 数です。この公式は有限次元の行列 M に対して成り立つものですが、これの連続極限を考える事で汎関数行列式に対しても同様の公式が成り立つ事が言えます。取り敢えずこれを認めると、式(3.2.51)の汎関数行列式は2種類の実 Grassmann 関数 $c^a(x)$ と $\bar{c}^a(x)$ に対する次の様な汎関数積分で書き表す事が出来ます：

$$\det M^{ab}(x, y) = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp \left(\int d^4x \int d^4y \bar{c}^a(x) M^{ab}(x, y) c^b(y) \right)$$

⁹ 実は満たしません。条件 $f^a(A) = 0$ で定まる部分空間は(たとえ Gribov 領域 Ω に制限したとしても) 同じゲージ軌道と何度も交わる事が知られています。これが **Gribov 問題 (Gribov problem)** と呼ばれる問題なのですが、この問題は摂動論では効かないと言われていました。但し、この辺の話は難しいのでここでは議論しません。詳細については章末に挙げた参考文献 [2] を見てください。

図3.2: Gribov 領域 Ω と Gribov 地平線 $\partial\Omega$ の概念図.

$$\begin{aligned}
&= \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp \left(\int d^4x \int d^4y \bar{c}^a(x) \partial^\mu D_\mu^{ab} \delta^4(x-y) c^b(y) \right) \\
&= \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp \left(\int d^4x \bar{c}^a(x) \partial^\mu D_\mu^{ab} c^b(x) \right)
\end{aligned} \tag{3.2.53}$$

式(3.2.52)の和 $\sum_i \sum_j$ が積分 $\int d^4x \int d^4y$ に対応し、和を取る離散的添字 i, j が連続的な積分変数 x, y に対応している事に注意しましょう。上の書き換えで現れた c^a を **Faddeev-Popov ゴースト**, \bar{c}^a を **Faddeev-Popov 反ゴースト**と呼びます。これらは Lorentz 変換の下ではスカラーとして振る舞いますが⁸, 互いに反交換するというものです。

さて、上の公式(3.2.53)を使ってゲージ固定された汎関数積分(3.2.41)を書き換えたいのですが、ここで1つ問題があります。それは、Faddeev-Popov 行列式 $\Delta_f(A)$ に現れるのは絶対値の付いた汎関数行列式 $|\det M^{ab}(x, y)|$ であって、絶対値の付いていない汎関数行列式 $\det M^{ab}(x, y)$ では無い、という点です。しかし、もし汎関数行列(3.2.51)の固有値が全て正であれば、絶対値を付けても付けなくても同じものになります。(行列式は固有値の積である事を思い出しましょう。)そこで、以下では汎関数積分 $\int \mathcal{D}A(\dots)$ の積分領域として式(3.2.51)の固有値が全て正となる様な領域 Ω に限る事にします。即ち、次の様な部分空間 Ω に限る事にします:^{*10}

$$\Omega = \left\{ A_\mu^a : f^a(A(x)) = 0 \ \& \ \frac{\delta f^a(A^\theta(x))}{\delta \theta^b(y)} > 0 \right\} \tag{3.2.54}$$

この領域 Ω を **Gribov 領域 (Gribov region)** と呼び、この領域の境界 $\partial\Omega$ を **Gribov 地平線 (Gribov horizon)** と呼びます(図3.2参照)。この積分領域 Ω の上では Faddeev-Popov 行列式(3.2.42)の絶対値は外す事が出来て、次の等式が成り立ちます:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathcal{D}A |\det M^{ab}(x, y)| \delta[f(A)] e^{iS_{\text{SYM}}[A]} &= \int_\Omega \mathcal{D}A \det M^{ab}(x, y) \delta[f(A)] e^{iS_{\text{SYM}}[A]} \\
&= \int_\Omega \mathcal{D}A \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \delta[f(A)] e^{iS_{\text{SYM}}[A] + iS_{\text{FP}}[A, c, \bar{c}]}
\end{aligned} \tag{3.2.55}$$

ここで、 S_{FP} は Faddeev-Popov ゴーストの作用で、式(3.2.53)より次の様に与えられる事が分かります:

$$S_{\text{FP}}[A, c, \bar{c}] = -i \int d^4x \bar{c}^a(x) \partial^\mu D_\mu^{ab} c^b(x) \quad \text{with} \quad D_\mu^{ab} c^b = (\delta^{ab} \partial_\mu - f^{abc} A_\mu^c) c^b \tag{3.2.56}$$

以上、特殊な部分空間 Ω の上に限りました^{*11}が⁸, Faddeev-Popov 行列式 $\Delta_f(A)$ の寄与を作用(3.2.55)として書き表す事が出来ました。

^{*10} 条件 $\frac{\delta f^a(A^\theta(x))}{\delta \theta^b(y)} > 0$ は汎関数行列 $M^{ab}(x, y) = \frac{\delta f^a(A^\theta(x))}{\delta \theta^b(y)}$ が正定値であるべし、という条件で、適当な任意関数 ω^a に対して次が成り立てという意味です:

$$\int d^4x \int d^4y \omega^{a*}(x) M^{ab}(x, y) \omega^b(y) > 0$$

この正定値性の条件と汎関数行列 $M^{ab}(x, y)$ の固有値が非負であるべしという条件は等価です。ちなみに汎関数行列 $M^{ab}(x, y)$ に対する固有値方程式は $\int d^4y M^{ab}(x, y) v^b(y) = \lambda v^a(x)$ ですが、これは式(3.2.51)を使うと微分方程式 $\partial^\mu D_\mu^{ab} v^b(x) = \lambda v^a(x)$ の問題になります。この固有値 λ が正となる様な(ゲージ固定条件 $f^a(A) = 0$ を満たす)ゲージ場 A_μ^a の集まりが Gribov 領域 Ω で、固有値 λ がゼロになる所が Gribov 地平線 $\partial\Omega$ です。式(3.2.50)2行目より $\theta^a = 0$ 近傍で $f^a(A^\theta) = f^a(A) + \partial^\mu D_\mu^{ab} \theta^b$ が成り立つので、ゼロ固有値に属する非自明な固有関数があればそれを θ^a として持って来る事で条件(b)が破れる事も分かります。(注: Minkowski 計量は不定計量なので、この辺の議論は普通は Euclid 化して行います。)

^{*11} Gribov 領域 Ω の上でのみ1の値を取る指示関数(一種の階段関数) $1_\Omega(A)$ を用いると、積分領域はゲージ場の配位空間全体に拡張する事が出来ます:

$$\int \mathcal{D}A(\dots) = \int \mathcal{D}A 1_\Omega(A)(\dots) \quad \text{with} \quad 1_\Omega(A) = \begin{cases} 1 & \text{for } A_\mu^a \in \Omega \\ 0 & \text{for } A_\mu^a \notin \Omega \end{cases}$$

Faddeev-Popov 行列式の寄与を作用 S_{FP} として書き表す事が出来た様に、実はこの $1_\Omega(A)$ の寄与も作用として書き表せる事が知られています。その様にし得られる非可換ゲージ理論の作用を **Gribov-Zwanziger 作用 (Gribov-Zwanziger action)** と呼ぶのですが、これは難しいのでここでは議論しません。興味のある人は章末に挙げた参考文献 [2] を見てください。

Nakanishi-Lautrap 場の導入

次にデルタ汎関数 $\delta[f(A)]$ の寄与を書き換えましょう。これも前節の式(3.2.32)と同じ様にやります。まず、次の等式が成り立つ事に注意しましょう:

$$1 = \int \mathcal{D}B \mathcal{D}\alpha \exp \left(i \int d^4x \left[\frac{\xi}{2} B^a(x) B^a(x) + B^a(x) \alpha^a(x) \right] \right) \quad (3.2.57)$$

これは等式(3.2.30)の汎関数版です。但し、式(3.2.30)にあった $1/2\pi$ の規格化は積分測度 $\mathcal{D}B$ に含まれているとしてここでは明示していません。前節でやったようにこの等式を式(3.2.55)に挿入すると次の様になります:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{D}A \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \delta[f(A)] e^{iS_{\text{YM}}[A] + iS_{\text{FP}}[A, c, \bar{c}]} \\ &= 1 \cdot \int_{\Omega} \mathcal{D}A \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \delta[\partial A - \alpha] e^{iS_{\text{YM}}[A] + iS_{\text{FP}}[A, c, \bar{c}]} \\ &= \int \mathcal{D}B \mathcal{D}\alpha \exp \left(i \int d^4x \left[\frac{\xi}{2} B^a B^a + B^a \alpha^a \right] \right) \cdot \int_{\Omega} \mathcal{D}A \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \delta[\partial A - \alpha] e^{iS_{\text{YM}}[A] + iS_{\text{FP}}[A, c, \bar{c}]} \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{D}A \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \int \mathcal{D}B \mathcal{D}\alpha \delta[\partial A - \alpha] e^{iS_{\text{YM}}[A] + iS_{\text{FP}}[A, c, \bar{c}]} \exp \left(i \int d^4x \left[\frac{\xi}{2} B^a B^a + B^a \alpha^a \right] \right) \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{D}A \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \int \mathcal{D}B e^{iS_{\text{YM}}[A] + iS_{\text{FP}}[A, c, \bar{c}]} \exp \left(i \int d^4x \left[\frac{\xi}{2} B^a B^a + B^a \partial^{\mu} A_{\mu}^a \right] \right) \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{D}A \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \int \mathcal{D}B \exp \left(i \int d^4x \left[-\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - i\bar{c}^a \partial^{\mu} D_{\mu}^{ab} c^b + \frac{\xi}{2} B^a B^a + B^a \partial^{\mu} A_{\mu}^a \right] \right) \end{aligned} \quad (3.2.58)$$

但し、2行目で $f^a(A) = \partial^{\mu} A_{\mu}^a - \alpha^a$ を使い、3行目で式(3.2.57)を挿入し、5行目でゲージ固定関数に入っている α^a と積分変数の α^a を同一視して α^a の汎関数積分を実行しました。これはデルタ汎関数 $\delta[\partial A - \alpha]$ が入っているので α^a を $\partial^{\mu} A_{\mu}^a$ に置き換えるだけになります。結局、部分空間 Ω の上では、ゲージ固定された Yang-Mills 理論は次の様な Lagrangian 密度で記述される局所場の理論として表される事が分かりました:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_{\text{FP}} + \mathcal{L}_{\text{GF}} \quad (3.2.59)$$

但し、 \mathcal{L}_{YM} , \mathcal{L}_{FP} , \mathcal{L}_{GF} はそれぞれ次で与えられます:

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (3.2.60a)$$

$$\mathcal{L}_{\text{FP}} = -i\bar{c}^a \partial^{\mu} D_{\mu}^{ab} c^b \quad (3.2.60b)$$

$$\mathcal{L}_{\text{GF}} = \frac{\xi}{2} B^a B^a + B^a \partial^{\mu} A_{\mu}^a \quad (3.2.60c)$$

さて、以上で終わりなのですが、応用上は B^a 積分を実行して Nakanishi-Lautrap 場は消してしまった表式もよく使います。まず次の様に \mathcal{L}_{GF} を B^a について平方完成します:

$$\mathcal{L}_{\text{GF}} = \frac{\xi}{2} \left(B^a + \frac{1}{\xi} \partial^{\mu} A_{\mu}^a \right)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^{\mu} A_{\mu}^a)^2 \quad (3.2.61)$$

次に $B^a \rightarrow B^a - \frac{1}{\xi} \partial^{\mu} A_{\mu}^a$ と変数変換して B^a の Gauss 型汎関数積分を実行すれば、式(3.2.58)は次の様になります:

$$\text{式(3.2.58)} \propto \int_{\Omega} \mathcal{D}A \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp \left(i \int d^4x \left[-\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - i\bar{c}^a \partial^{\mu} D_{\mu}^{ab} c^b - \frac{1}{2\xi} (\partial^{\mu} A_{\mu}^a)^2 \right] \right) \quad (3.2.62)$$

後は A_{μ}^a , c^a , \bar{c}^a それぞれに対して外場 J_{μ}^a , η^a , $\bar{\eta}^a$ を導入すれば、Green 関数の生成汎関数 $Z[J, \eta, \bar{\eta}]$ が作れます。

以上、純粋な Yang-Mills 理論を考えてきましたが、ゲージ場が物質場と結合する場合は物質場の作用を (最小結合で) 足せば良いだけになります。

3.3 BRST 対称性

前節で Yang-Mills 理論のゲージ固定を行って Lagrangian 密度(3.2.59)を得ました。この Lagrangian 密度にはもはや局所的なゲージ変換の下での不変性はありませんが、代わりに次の様な変換の下での不変性があります:

$$\delta A_{\mu}^a = \epsilon D_{\mu}^{ab} c^b = \epsilon (\partial_{\mu} c^a - f^{abc} c^b A_{\mu}^c) \quad (3.3.1a)$$

$$\delta c^a = -\frac{1}{2}\epsilon f^{abc} c^b c^c \quad (3.3.1b)$$

$$\delta \bar{c}^a = -i\epsilon B^a \quad (3.3.1c)$$

$$\delta B^a = 0 \quad (3.3.1d)$$

ここで、 ϵ は Grassmann 数のパラメータで、ゴースト場・反ゴースト場とは反可換でゲージ場・Nakanishi-Lautrap 場とは可換です。これが **BRST 対称性 (BRST symmetry)** で、1975 年に Carlo Becchi, Alain Rouet, Raymond Stora と Igor Tyutin によって発見されました。この BRST 変換は 2 回行くとゼロになるという **冪零性 (nilpotency)** を示し、また、変換のパラメータが Grassmann 数である Fermi 的な大局的対称性です。従って Noether の定理より保存電荷 Q_B が存在し、BRST 変換は冪零である事の帰結としてこの電荷 Q_B も冪零となります。重要なのはこの Q_B を使うと物理的 Hilbert 空間が容易に構成出来るという点で、証明はしませんが物理的状態 $|\text{phys}\rangle$ は次を満たすベクトルとして定まります:

$$Q_B|\text{phys}\rangle = 0 \quad (3.3.2)$$

特に、任意のベクトル $|\chi\rangle$ に対して Q_B を作用させて作ったベクトル $Q_B|\chi\rangle$ は Q_B の冪零性より自動的に $Q_B(Q_B|\chi\rangle) = Q_B^2|\chi\rangle = 0$ を満たすので物理的です。一方、任意の物理的状態 $|\text{phys}\rangle$ と $Q_B|\chi\rangle$ の内積を計算すると、これは常にゼロとなります:

$$\begin{aligned} (|\text{phys}\rangle, Q_B|\chi\rangle) &= (Q_B^\dagger|\text{phys}\rangle, |\chi\rangle) \\ &= (Q_B|\text{phys}\rangle, |\chi\rangle) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

従って、2 つの物理的状態 $|\text{phys}\rangle$ と $|\text{phys}'\rangle$ の内積と、 $|\text{phys}\rangle + Q_B|\chi\rangle$ と $|\text{phys}'\rangle$ との内積は同じになって、特に散乱振幅は同じになります。そこで、物理的状態と $Q_B|\chi\rangle$ だけ異なるベクトルは物理的に等価だとして次の様に同一視します:

$$|\text{phys}\rangle \sim |\text{phys}\rangle + Q_B|\chi\rangle, \quad \forall |\chi\rangle \quad (3.3.4)$$

この同一視を入れた Hilbert 空間が物理的 Hilbert 空間になります:

$$\mathcal{H}_{\text{phys}} = \{|\text{phys}\rangle : Q_B|\text{phys}\rangle = 0\} / \sim \quad (3.3.5)$$

これを $\mathcal{H}_{\text{phys}} = \ker Q_B / \text{im } Q_B$ と書いて **BRST コホモロジー (BRST cohomology)** と呼んだりします。

前節では Faddeev-Popov 流の汎関数積分に基づいたゲージ固定を行ってきましたが、この BRST 対称性を第一原理としてゲージ固定を行う方法もあります。以下、この方法を簡単に紹介してこの章を終わる事にしましょう。以下では物質場として N 成分複素スカラー場 ϕ も考える事にします。出発点は次の無限小ゲージ変換です:

$$\delta\phi(x) = i\theta(x)\phi(x) \quad (3.3.6a)$$

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu\theta(x) + i[\theta(x), A_\mu(x)] \quad (3.3.6b)$$

BRST 変換とは基本的にこのゲージ変換のパラメータ $\theta(x)$ を Grassmann 数とゴースト場の積 $\epsilon c(x)$ に置き換えたものです:

$$\theta(x) \rightarrow \epsilon c(x) \quad (3.3.7)$$

この様にして導入した変換が冪零であれ、と要請していく事で BRST 変換が構成され、その様にして構成された BRST 変換の下で理論が不変であるべし、と要請する事でゲージ固定された Lagrangian 密度が得られます。以下、この方法を簡単に概観しましょう。

① ゴースト場の導入

上で述べた様に、まず最初のステップは局所ゲージ変換のパラメータ $\theta(x)$ を $\epsilon c(x)$ に置き換えてゴースト場を導入する事です。この置き換えをすると、無限小ゲージ変換(3.3.6a)(3.3.6b)はそれぞれ $\delta\phi = \epsilon\delta_B\phi$, $\delta A_\mu = \epsilon\delta_B A_\mu$ となります。但し、 $\delta_B\phi$, $\delta_B A_\mu$ は次で定義されます:

$$\delta_B\phi(x) = ic(x)\phi(x) \quad (3.3.8a)$$

$$\delta_B A_\mu(x) = \partial_\mu c(x) + i[c(x), A_\mu(x)] \quad (3.3.8b)$$

ここで、この δ_B の演算規則について述べておきましょう。 δ は通常のゲージ変換である事、及び ϵ が Grassmann 数である事に注意すると、まず任意の場 X と Y の積に対して次が成り立ちます:

$$\begin{aligned} \delta(XY) &= (\delta X)Y + X(\delta Y) \\ &= (\epsilon\delta_B X)Y + X(\epsilon\delta_B Y) \\ &= \epsilon[(\delta_B X)Y \pm X(\delta_B Y)] \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

但し、最後の土の符号は X が Grassmann 偶の場合は + の符号で、Grassmann 奇の場合は - の符号です。よって、場の積 XY に対しては次の様な演算規則になります:

$$\delta_B(XY) = (\delta_B X)Y \pm X(\delta_B Y) \quad (3.3.10)$$

さて、構成から明かかですが、Yang-Mills 理論の Lagrangian 密度は任意のゲージ変換の下で不変なので特に $\delta \mathcal{L}_{\text{YM}} = \epsilon \delta_B \mathcal{L}_{\text{YM}} = 0$ が成り立ちます。従って、上の BRST 変換の下でも不変です:

$$\delta_B \mathcal{L}_{\text{YM}} = 0 \quad (3.3.11)$$

② 冪零性の要請

次に BRST 変換の冪零性 $\delta_B^2 = 0$ を要請します。まず物質場 ϕ に対しては、式(3.3.8a)より $\delta_B^2 \phi$ は次の様に計算されます:

$$\begin{aligned} \delta_B^2 \phi &= i((\delta_B c)\phi - c(\delta_B \phi)) \\ &= i((\delta_B c)\phi - c \cdot ic\phi) \\ &= i(\delta_B c - ic^2)\phi \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

よって、 $\delta_B^2 \phi = 0$ が成り立てと要請する事でゴースト場の BRST 変換則が次の様に定まります:

$$\delta_B c = ic^2 \quad (3.3.13)$$

ここで、 $ic^2 = ic^b c^c T^b T^c = \frac{i}{2} c^b c^c [T^b, T^c] = \frac{i}{2} c^b c^c i f^{bca} T^a = -\frac{1}{2} f^{abc} c^b c^c T^a$ なので、式(3.3.13)は成分で書くと次の様になる事に注意しましょう:

$$\delta_B c^a = -\frac{1}{2} f^{abc} c^b c^c \quad (3.3.14)$$

この様にして定めたゴースト場の変換則の下で、ゲージ場及びゴースト場自身の BRST 変換も冪零になります。実際、ゲージ場に対しては次の様に確かめる事が出来ます:

$$\begin{aligned} \delta_B^2 A_\mu &= \delta_B(\partial_\mu c + icA_\mu - iA_\mu c) \\ &= \partial_\mu(\delta_B c) + i(\delta_B c)A_\mu - ic(\delta_B A_\mu) - i(\delta_B A_\mu)c - iA_\mu(\delta_B c) \\ &= \partial_\mu(ic^2) + i(ic^2)A_\mu - ic(\partial_\mu c + icA_\mu - iA_\mu c) - i(\partial_\mu c + icA_\mu - iA_\mu c)c - iA_\mu(ic^2) \\ &= i((\partial_\mu c)c + c\partial_\mu c) - ic\partial_\mu c - i(\partial_\mu c)c \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

同様に、ゴースト場に対しても冪零性が成り立ちます:

$$\begin{aligned} \delta_B^2 c &= \delta_B(ic^2) \\ &= i(\delta_B c)c - ic(\delta_B c) \\ &= i(ic^2)c - ic(ic^2) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

③ 反ゴースト場と Nakanishi-Lautrap 場の導入

次に反ゴースト場 \bar{c} を導入して、これの BRST 変換として Nakanishi-Lautrap 場を導入します。まず、反ゴースト場の BRST 変換を次の様に定義します:

$$\delta_B \bar{c} = -iB \quad (3.3.17)$$

次に反ゴースト場に対する BRST 変換の冪零性を要請すると、Nakanishi-Lautrap 場の変換則が次の様に定まります:

$$\delta_B B = 0 \quad (3.3.18)$$

以上で、物質場、ゲージ場、ゴースト場、反ゴースト場、Nakanishi-Lautrap 場に対する BRST 変換則が全て定まりました。

この様にして構成した BRST 変換を使うと、ゲージ固定された Yang-Mills 理論の Lagrangian 密度は次の様にして構成する事が出来ます:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{YM}} + i\delta_B(\bar{c}^a f^a(A)) \quad (3.3.19)$$

ここで、 $f^a(A)$ はゲージ固定関数で、次の様を選ぶと前節の結果と一致します:

$$f^a(A) = \partial^\mu A_\mu^a + \frac{\xi}{2} B^a \quad (3.3.20)$$

実際、式(3.3.19)の右辺第 2 項を計算すると次の様になります:

$$\begin{aligned} i\delta_B(\bar{c}^a f^a) &= i[(\delta_B \bar{c}^a) f^a - \bar{c}^a \delta_B f^a] \\ &= i \left[-iB^a \left(\partial^\mu A_\mu^a + \frac{\xi}{2} B^a \right) - \bar{c}^a \partial^\mu D_\mu^{ab} c^b \right] \\ &= B^a \partial^\mu A_\mu^a + \frac{\xi}{2} B^a B^a - i\bar{c}^a \partial^\mu D_\mu^{ab} c^b \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

但し、2 行目で $\delta_B f^a = \partial^\mu \delta_B A_\mu^a + \frac{\xi}{2} \delta_B B^a = \partial^\mu D_\mu^{ab} c^b$ を使いました。よって、式(3.3.19)は次の様になります:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - i\bar{c}^a \partial^\mu D_\mu^{ab} c^b + \frac{\xi}{2} B^a B^a + B^a \partial^\mu A_\mu^a \quad (3.3.22)$$

これは式(3.2.60a)–(3.2.60c)に他なりません。以上が BRST 対称性を第一原理とした場合のゲージ固定処方です。

参考文献

Gribov 問題

第3.2.2節でも簡単に触れましたが、非可換ゲージ理論の量子化にはゲージ固定に関連した Gribov 問題と呼ばれる問題があります。この問題は 1978 年に Vladimir N. Gribov によって初めて指摘されました:

- [1] V. N. Gribov, “Quantization of non-Abelian gauge theories,” *Nucl. Phys.* **B139** (1978) 1–19

但し、この Gribov 問題は摂動論では効かない (摂動論をやっている限りは考慮しなくて良い) と言われています。Gribov 問題について解説している教科書は非常に少ないですが、興味のある人は次のレビュー論文を読むと良いと思います:

- [2] N. Vandersickel and D. Zwanziger, “The Gribov problem and QCD dynamics,” *Phys. Rep.* **520** (2012) 175–251, [arXiv:1202.1491 \[hep-th\]](#)

特に第 2.2 節に Gribov 問題についての簡潔な解説があるので、この箇所だけでも充分読む価値があります。

また、第3.2.1節と第3.2.2節でゲージ固定関数の満たすべき条件を 2 つ挙げましたが、この条件は次の Robin Ticciati の教科書の §12.3 を参考にしました:

- [3] R. Ticciati, *Quantum Field Theory for Mathematicians* (Cambridge University Press, 1999)

この本はタイトルに “for Mathematicians” とありますが、このタイトルから連想されるほど内容は数学的ではありません。内容は少々独特ですが、論理が明快なので興味がある人は読んでみると良いと思います。

BRST 量子化法

BRST 対称性は次の論文で登場しました:

- [4] C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, “Renormalization of Gauge Theories,” *Ann. Phys.* **98** (1976) 287–321
 [5] I. V. Tyutin, “Gauge Invariance in Field Theory and Statistical Physics in Operator Formalism,” Lebedev Institute preprint No. 39 (1975), [arXiv:0812.0580 \[hep-th\]](#)

また、第3.3節の内容は有名な Kugo-Ojima の方法に倣ってやりました:

- [6] T. Kugo and I. Ojima, “Local Covariant Operator Formalism of Non-Abelian Gauge Theories and Quark Confinement Problem,” *Suppl. Prog. Theor. Phys.* **66** (1979) 1–130
 [7] 九後汰一郎, 『ゲージ場の量子論 I』(培風館, 1989 年)