2019年度 日本大学大学院理工学研究科 物理/量子理工学専攻 場の理論特論II レポート4

提出締め切り: 2020年1月15日(水) 23:59:59 JST
提出先: `ohya@phys.cst.nihon-u.ac.jp`
または駿河台校舎8号館2階823D室

問題. Faddeev-Popov のゲージ固定処方

次の領域 D 上の2次元積分を考える:

$$I=\int_D dxdy\,\exp\left(iS(x,y)\right),\quad D=\{(x,y):0<x<\infty\ \&\ 0<y<\infty\} \tag{1}$$

ここで，S は x と y の関数で，次のスケール不変性を満たすとする:

$$S(x\,\mathrm{e}^{-\theta},y\,\mathrm{e}^{+\theta})=S(x,y),\quad \forall\theta\in(-\infty,\infty) \tag{2}$$

以下では，(x,y) をゲージ場，領域 D をゲージ場の配位空間，$S(x,y)$ をゲージ理論の作用，スケール変換 $(x,y)\to(x\,\mathrm{e}^{-\theta},y\,\mathrm{e}^{+\theta})$ をゲージ変換，式(2)を作用のゲージ不変性，式(1)をゲージ理論の汎関数積分に見立てて，ゲージ固定 (ゲージ群の体積の分離) を行う．以下の問いに答えよ．

(i) 式(2)を満たす様な関数 $S(x,y)$ に対しては次の等式が成り立つ事を示せ:[*1]

$$S(x,y)=S(xy,1)=S(1,xy),\quad \forall(x,y)\in D \tag{3}$$

(ii) 変数変換 $(x,y)=(r\,\mathrm{e}^{-\theta},r\,\mathrm{e}^{+\theta})$ (但し $r\in(0,\infty)$ 及び $\theta\in(-\infty,\infty)$) を施すと積分(1)は次の様に書き直される事を示せ:

$$I=\left(\int_{-\infty}^{\infty}d\theta\right)\int_0^{\infty}dr^2\,\exp\left(iS(r^2,1)\right) \tag{4}$$

因子 $\int_{-\infty}^{\infty}d\theta=\infty$ はゲージ群の体積を表す．これは無限大なので積分(1)は well-defined では無かった事に注意．以下ではこの様な変数変換を行わずに，積分(1)からゲージ群の体積を分離させる事を考える．

(iii) $(x,y)\in D$ を任意に固定する．この時，θ を $-\infty$ から $+\infty$ まで変化させて行く事で点 $(x\,\mathrm{e}^{-\theta},y\,\mathrm{e}^{+\theta})$ は D 上で或る軌道を描く．この軌道を図示せよ[*2]．この様に，ゲージ変換のパラメータ θ を動かして行った時に描かれるゲージ場の配位空間上の軌道を**ゲージ軌道** (gauge orbit) と呼ぶ．

(iv) 全てのゲージ軌道を一度だけ横切る曲線 $y=f(x)$ を1つ見つけよ．

(v) 全てのゲージ軌道を一度だけ横切る曲線 $y=f(x)$ がただ1つの解になる様な方程式

$$F(x,y)=0 \tag{5}$$

を考える[*3]．この様な関数 F を**ゲージ固定関数** (gauge-fixing function) と呼ぶ．いま，ゲージ固定関数が1つ与えられたとしよう．この時，このゲージ固定関数を用いて領域 D 上の関数 $\Delta_F(x,y)$ を新たに次で定義する:

$$[\Delta_F(x,y)]^{-1}:=\int_{-\infty}^{\infty}d\theta\,\delta(F(x\,\mathrm{e}^{-\theta},y\,\mathrm{e}^{+\theta})),\quad (x,y)\in D \tag{6}$$

この様にして定義された関数 $\Delta_F(x,y)$ はゲージ不変である事，即ち次の等式を満たす事を示せ:

$$\Delta_F(x\,\mathrm{e}^{-\theta},y\,\mathrm{e}^{+\theta})=\Delta_F(x,y),\quad \forall\theta\in(-\infty,\infty) \tag{7}$$

この Δ_F を **Faddeev-Popov 行列式** (Faddeev-Popov determinant) と呼ぶ．

[*1] ヒント: 等式 $S(x,y)=S(x\,\mathrm{e}^{-\theta},y\,\mathrm{e}^{+\theta})$ でパラメータ θ を $\theta=-\log y$ 又は $\theta=\log x$ と選べば良い．

[*2] ヒント: xy という組み合わせはゲージ変換 $(x,y)\to(x\,\mathrm{e}^{-\theta},y\,\mathrm{e}^{+\theta})$ の下で不変なゲージ不変量である事に注意すると，ゲージ軌道は $xy=\mathrm{const}$ で定まる曲線で与えられる事が分かる．

[*3] 曲線 $y=f(x)$ が分かっていれば $F(x,y)=y-f(x)$ とすれば良い．

(vi) 次の2つのゲージ固定関数に対する Faddeev-Popov 行列式を求めよ:[*4]

$$\text{(a)}\quad F(x,y)=x-y \tag{8a}$$
$$\text{(b)}\quad F(x,y)=y-1 \tag{8b}$$

(vii) 定義(6)より任意の $(x,y)\in D$ に対して次の等式が成り立つ:

$$1=\Delta_F(x,y)\int_{-\infty}^{\infty}d\theta\,\delta(F(x\,\mathrm{e}^{-\theta},y\,\mathrm{e}^{+\theta})),\quad \forall(x,y)\in D \tag{9}$$

この恒等式を積分(1)に挿入すると次が得られる:

$$\begin{aligned}I&=\int_D dxdy\ \exp\left(iS(x,y)\right)\times 1\\&=\int_D dxdy\ \exp\left(iS(x,y)\right)\times\Delta_F(x,y)\int_{-\infty}^{\infty}d\theta\,\delta(F(x\,\mathrm{e}^{-\theta},y\,\mathrm{e}^{+\theta}))\\&=\int_{-\infty}^{\infty}d\theta\int_D dxdy\,\Delta_F(x,y)\delta(F(x\,\mathrm{e}^{-\theta},y\,\mathrm{e}^{+\theta}))\exp\left(iS(x,y)\right)\end{aligned} \tag{10}$$

作用のゲージ不変性(2), Faddeev-Popov 行列式のゲージ不変性(7), 及び積分測度のゲージ不変性[*5]を用いると, 式(10)は次の様に書き直せる事を示せ:

$$I=\left(\int_{-\infty}^{\infty}d\theta\right)\int_D dxdy\,\Delta_F(x,y)\delta(F(x,y))\exp\left(iS(x,y)\right) \tag{11}$$

これで問(ii)の変数変換を行わずともゲージ群の体積が分離出来た. 以上が Faddeev-Popov のゲージ固定処方である.

(viii) 問(vi)で用いた2つのゲージ固定関数それぞれに対して, 等式

$$\int_D dxdy\,\Delta_F(x,y)\delta(F(x,y))\exp\left(iS(x,y)\right)=\int_0^{\infty}dr^2\ \exp\left(iS(r^2,1)\right) \tag{12}$$

が確かに成り立つ事を示せ.

[*4] ヒント: デルタ関数に対して成り立つ等式

$$\delta(f(x))=\sum_{x_0\in\{x:f(x)=0\}}\frac{1}{|f'(x_0)|}\delta(x-x_0)$$

を用いると, 式(6)右辺の積分は次の様に評価される:

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\theta\,\delta(F(x\,\mathrm{e}^{-\theta},y\,\mathrm{e}^{+\theta}))=\sum_{\theta_0\in\{\theta:F(x\,\mathrm{e}^{-\theta},y\,\mathrm{e}^{+\theta})=0\}}\frac{1}{\left|\frac{d}{d\theta}F(x\,\mathrm{e}^{-\theta},y\,\mathrm{e}^{+\theta})\Big|_{\theta=\theta_0}\right|}$$

要するに, $(x,y)\in D$ を任意に固定し, $F(x\,\mathrm{e}^{-\theta},y\,\mathrm{e}^{+\theta})$ を θ の関数だと思って方程式 $F(x\,\mathrm{e}^{-\theta},y\,\mathrm{e}^{+\theta})=0$ を θ について解いて, その解 θ_0 を用いて微係数 $\frac{d}{d\theta}F(x\,\mathrm{e}^{-\theta},y\,\mathrm{e}^{+\theta})|_{\theta=\theta_0}$ を計算すれば Faddeev-Popov 行列式は得られる. ゲージ固定関数(8a)(8b)に対しては方程式 $F(x\,\mathrm{e}^{-\theta},y\,\mathrm{e}^{+\theta})=0$ の解 θ_0 は1つしか無い事, 及び解 θ_0 は一般に x と y の関数として与えられる事に注意.

[*5] ここで言う積分測度のゲージ不変性とは, $(x',y')=(x\,\mathrm{e}^{-\theta},y\,\mathrm{e}^{+\theta})$ とした時, 任意の $\theta\in(-\infty,\infty)$ に対して $\int_D dxdy=\int_D dx'dy'$ が成り立つ事を指す.