2019年度 日本大学大学院理工学研究科 物理/量子理工学専攻 場の理論特論II レポート3

提出締め切り: 2019年12月11日(水) 23:59:59 JST
提出先: `ohya@phys.cst.nihon-u.ac.jp`
または駿河台校舎8号館2階823D室

問題. 6次元ϕ^3理論の1ループスペクトル関数

6次元ϕ^3理論の自己エネルギー$\tilde{\Sigma}(p^2)$は1ループ近似で次の様になる：

$$\frac{1}{i}\tilde{\Sigma}(p^2)=\frac{(-i\lambda)^2}{2}\int\frac{d^6k}{(2\pi)^6}\frac{1}{i(k^2+m^2)}\frac{1}{i((k+p)^2+m^2)}-i\left[(Z_\phi-1)p^2+(Z_mZ_\phi-1)m^2\right] \tag{1}$$

但し，Z_ϕとZ_mは条件$\tilde{\Sigma}(-m^2)=0$と$\tilde{\Sigma}'(-m^2)=0$を満たす様に決める．これを質量殻上繰り込みと呼び，この繰り込み操作を行うと自己エネルギーは次の様に書き表される:

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}(p^2)=&-\frac{\lambda^2}{2(4\pi)^3}m^2\int_0^1dx\,(1-x(1-x))\left[\log\left(1+\frac{x(1-x)}{1-x(1-x)}\frac{p^2+m^2}{m^2}\right)-\frac{x(1-x)}{1-x(1-x)}\frac{p^2+m^2}{m^2}\right]\\&-\frac{\lambda^2}{2(4\pi)^3}(p^2+m^2)\int_0^1dx\,x(1-x)\log\left(1+\frac{x(1-x)}{1-x(1-x)}\frac{p^2+m^2}{m^2}\right)\end{aligned} \tag{2}$$

以下の問いに答えよ．

(i) 式(2)の積分変数を$y=1-2x$と変数変換せよ．答えは次の様になる:

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}(p^2)=&-\frac{\lambda^2}{2(4\pi)^3}m^2\int_0^1dy\,\frac{3+y^2}{4}\left[\log\left(1+\frac{1-y^2}{3+y^2}\frac{p^2+m^2}{m^2}\right)-\frac{1-y^2}{3+y^2}\frac{p^2+m^2}{m^2}\right]\\&-\frac{\lambda^2}{2(4\pi)^3}(p^2+m^2)\int_0^1dy\,\frac{1-y^2}{4}\log\left(1+\frac{1-y^2}{3+y^2}\frac{p^2+m^2}{m^2}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

(ii) 次に $\frac{3+y^2}{4}=\frac{d}{dy}(\frac{3}{4}y+\frac{1}{12}y^3)$および$\frac{1-y^2}{4}=\frac{d}{dy}(\frac{1}{4}y-\frac{1}{12}y^3)$を使って，式(3)を部分積分せよ．答えは次の様になる:

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}(p^2)=&-\frac{\lambda^2}{2(4\pi)^3}(p^2+m^2)^2\int_0^1dy\,\frac{\left(\frac{3}{4}y+\frac{1}{12}y^3\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{1-y^2}{3+y^2}\right)}{p^2+\frac{4m^2}{1-y^2}}\\&+\frac{\lambda^2}{2(4\pi)^3}(p^2+m^2)^2\int_0^1dy\,\frac{\left(\frac{1}{4}y-\frac{1}{12}y^3\right)\frac{3+y^2}{1-y^2}\frac{d}{dy}\left(\frac{1-y^2}{3+y^2}\right)}{p^2+\frac{4m^2}{1-y^2}}\end{aligned} \tag{4}$$

(iii) 次に式(4)の積分変数を$s=\frac{4m^2}{1-y^2}$と変数変換せよ．答えは次の様になる:

$$\tilde{\Sigma}(p^2)=-\frac{\lambda^2}{2(4\pi)^3}(p^2+m^2)^2\int_{4m^2}^\infty ds\,\frac{\frac{s-4m^2}{6(s-m^2)^2}\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}}{p^2+s} \tag{5}$$

(iv) 連結2点Green関数$\tilde{G}^{(2)}_{\mathrm{con}}(p)$は1ループ近似で次の様に表される:

$$\tilde{G}^{(2)}_{\mathrm{con}}(p)=\frac{1}{i(p^2+m^2)}+\frac{1}{i(p^2+m^2)}\frac{1}{i}\tilde{\Sigma}(p^2)\frac{1}{i(p^2+m^2)}+O(\text{2-loop}) \tag{6}$$

これと式(5)の結果を用いると，連結2点Green関数は次の様に表される事を示せ:

$$\tilde{G}^{(2)}_{\mathrm{con}}(p)=\int_0^\infty ds\,\frac{\rho(s)}{i(p^2+s)} \tag{7}$$

但し，

$$\rho(s)=\delta(s-m^2)+\theta(s-4m^2)\left[\frac{\lambda^2}{2(4\pi)^3}\frac{s-4m^2}{6(s-m^2)^2}\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}+O(\text{2-loop})\right] \tag{8}$$

式(7)を連結2点Green関数の**スペクトル表示**と呼び，式(8)の$\rho(s)$を**スペクトル関数**と呼ぶ．

(v) スペクトル関数(8)の概形を図示せよ．