2019年度 日本大学大学院理工学研究科 物理/量子理工学専攻 場の理論特論II レポート2

提出締め切り: 2019年11月6日(水) 23:59:59 JST
提出先: `ohya@phys.cst.nihon-u.ac.jp`
または駿河台校舎8号館2階823D室

問題. 1粒子既約な頂点関数

$\boldsymbol{J}=(J_1,\cdots,J_N)$を$N$成分実ベクトル，$W(\boldsymbol{J})=W(J_1,\cdots,J_N)$を$N$変数凸関数とする．$W(\boldsymbol{J})$のLegendre変換で得られる$N$変数関数を$\Gamma(\boldsymbol{\varphi})=\Gamma(\varphi_1,\cdots,\varphi_N)$と書く事にすると，これは次の最小化問題で定義される:

$$\begin{aligned}\Gamma(\boldsymbol{\varphi})&=\min_{\boldsymbol{J}}\left(W(\boldsymbol{J})-\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\varphi}\right)\\&=W(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi}))-\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})\cdot\boldsymbol{\varphi}\end{aligned}\tag{1}$$

但し，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})$は「$\boldsymbol{\varphi}$が与えられたとき$W(\boldsymbol{J})-\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\varphi}$の値を最小にする$\boldsymbol{J}$」を表し，$\boldsymbol{\varphi}$を1つ固定したとき次の方程式の解として定まる$\boldsymbol{\varphi}$の関数である:

$$\frac{\partial}{\partial J_i}\left(W(\boldsymbol{J})-\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\varphi}\right)=\frac{\partial W(\boldsymbol{J})}{\partial J_i}-\varphi_i=0\tag{2}$$

簡単の為，以下では「$\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{0}$の時の方程式(2)の解は$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{0}$」と仮定する．即ち，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$とする．また，$W(\boldsymbol{J})$と$\Gamma(\boldsymbol{\varphi})$の$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{0}$と$\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{0}$における$n$階偏微分係数(を$i^{n-1}$で割ったもの)を次の様に書く事にする:

$$G^{(n)}_{\text{con}}(i_1,\cdots,i_n)=\frac{1}{i^{n-1}}\left.\frac{\partial^n W(\boldsymbol{J})}{\partial J_{i_1}\cdots\partial J_{i_n}}\right|_{\boldsymbol{J}=\boldsymbol{0}}\tag{3a}$$

$$\Gamma^{(n)}(i_1,\cdots,i_n)=\left.\frac{\partial^n\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_1}\cdots\partial\varphi_{i_n}}\right|_{\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{0}}\tag{3b}$$

以下，$G^{(n)}_{\text{con}}(i_1,\cdots,i_n)$を連結$n$点Green関数，$\Gamma^{(n)}(i_1,\cdots,i_n)$を$n$点頂点関数と呼ぼう．以下の問いに答えよ．

(i) 次の等式が成り立つ事を示せ:[*1]

$$\frac{\partial\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_i}=-J_i(\boldsymbol{\varphi})\tag{4}$$

また，上の等式より1点頂点関数はゼロであること($\Gamma^{(1)}(i)=0$)を示せ．

(ii) 次の等式が成り立つ事を示せ:[*2]

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_i\partial\varphi_k}\left.\frac{\partial^2 W(\boldsymbol{J})}{\partial J_k\partial J_j}\right|_{\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})}=-\delta_{ij}\tag{5}$$

また，上の等式より2点頂点関数と連結2点Green関数の間には次の関係式が成り立つ事を示せ:

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{i}\Gamma^{(2)}(i,k)G^{(2)}_{\text{con}}(k,j)=\delta_{ij}\tag{6}$$

これより，2点頂点関数(を虚数単位iで割ったもの)は連結2点Green関数の逆である事が分かる．

[*1] ヒント: 式(1)2行目をφ_iで偏微分すれば良い．合成関数の微分を使って計算すると次の様になる:

$$\frac{\partial\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_i}=\frac{\partial}{\partial\varphi_i}\left(W(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi}))-\sum_{j=1}^{N}J_j(\boldsymbol{\varphi})\varphi_j\right)=\sum_{j=1}^{N}\left(\left.\frac{\partial W(\boldsymbol{J})}{\partial J_j}\right|_{\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})}\frac{\partial J_j(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_i}-\frac{\partial J_j(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_i}\varphi_j-J_j(\boldsymbol{\varphi})\delta_{ij}\right)$$

これと，式(2)から従う関係式$\left.\frac{\partial W(\boldsymbol{J})}{\partial J_j}\right|_{\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})}-\varphi_j=0$を使うと式(4)が得られる．

[*2] ヒント: 関係式$\left.\frac{\partial W(\boldsymbol{J})}{\partial J_j}\right|_{\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})}-\varphi_j=0$を$\varphi_i$で偏微分すれば良い．合成関数の微分を使って計算すると次の様になる:

$$0=\frac{\partial}{\partial\varphi_i}\left(\left.\frac{\partial W(\boldsymbol{J})}{\partial J_j}\right|_{\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})}-\varphi_j\right)=\sum_{k=1}^{N}\left.\frac{\partial W(\boldsymbol{J})}{\partial J_k\partial J_j}\right|_{\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})}\frac{\partial J_k(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_i}-\delta_{ij}$$

これと，式(4)の偏微分から従う関係式$\frac{\partial J_k(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_i}=\frac{\partial}{\partial\varphi_i}\left(-\frac{\partial\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_k}\right)=-\frac{\partial^2\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_i\partial\varphi_k}$を使うと式(5)が得られる．

(iii) 次の等式が成り立つ事を示せ:[*3]

$$\frac{\partial^3\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_1}\partial\varphi_{i_2}\partial\varphi_{i_3}} = -\sum_{j_1=1}^{N}\sum_{j_2=1}^{N}\sum_{j_3=1}^{N}\frac{\partial^2\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_1}\partial\varphi_{j_1}}\frac{\partial^2\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_2}\partial\varphi_{j_2}}\frac{\partial^2\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_3}\partial\varphi_{j_3}}\left.\frac{\partial^3 W(\boldsymbol{J})}{\partial J_{j_1}\partial J_{j_2}\partial J_{j_3}}\right|_{\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})} \tag{7}$$

また，上の等式より3点頂点関数は次の様に表せる事を示せ:

$$i\Gamma^{(3)}(i_1,i_2,i_3) = \sum_{j_1=1}^{N}\sum_{j_2=1}^{N}\sum_{j_3=1}^{N}\frac{1}{i}\Gamma^{(2)}(i_1,j_1)\frac{1}{i}\Gamma^{(2)}(i_2,j_2)\frac{1}{i}\Gamma^{(2)}(i_3,j_3)G^{(3)}_{\mathrm{con}}(j_1,j_2,j_3) \tag{8}$$

これより，3点頂点関数は連結3点Green関数の外線をもぎ取ったものである事が分かる．

(iv) 次の等式が成り立つ事を示せ:[*4]

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_1}\partial\varphi_{i_2}\partial\varphi_{i_3}\partial\varphi_{i_4}} =& \sum_{j_1=1}^{N}\sum_{j_2=1}^{N}\sum_{j_3=1}^{N}\sum_{j_4=1}^{N}\frac{\partial^2\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_1}\partial\varphi_{j_1}}\frac{\partial^2\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_2}\partial\varphi_{j_2}}\frac{\partial^2\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_3}\partial\varphi_{j_3}}\frac{\partial^2\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_4}\partial\varphi_{j_4}}\left.\frac{\partial^4 W(\boldsymbol{J})}{\partial J_{j_1}\partial J_{j_2}\partial J_{j_3}\partial J_{j_4}}\right|_{\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})}\\ &-\sum_{k_1=1}^{N}\sum_{k_2=1}^{N}\frac{\partial^3\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_1}\partial\varphi_{i_2}\partial\varphi_{k_1}}\left.\frac{\partial^2 W(\boldsymbol{J})}{\partial J_{k_1}\partial J_{k_2}}\right|_{\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})}\frac{\partial^3\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{k_2}\partial\varphi_{i_3}\partial\varphi_{i_4}}\\ &-\sum_{k_1=1}^{N}\sum_{k_2=1}^{N}\frac{\partial^3\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_1}\partial\varphi_{i_3}\partial\varphi_{k_1}}\left.\frac{\partial^2 W(\boldsymbol{J})}{\partial J_{k_1}\partial J_{k_2}}\right|_{\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})}\frac{\partial^3\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{k_2}\partial\varphi_{i_2}\partial\varphi_{i_4}}\\ &-\sum_{k_1=1}^{N}\sum_{k_2=1}^{N}\frac{\partial^3\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_1}\partial\varphi_{i_4}\partial\varphi_{k_1}}\left.\frac{\partial^2 W(\boldsymbol{J})}{\partial J_{k_1}\partial J_{k_2}}\right|_{\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})}\frac{\partial^3\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{k_2}\partial\varphi_{i_2}\partial\varphi_{i_3}}\end{aligned} \tag{9}$$

また，上の等式より4点頂点関数は次の様に表せる事を示せ:

$$\begin{aligned}i\Gamma^{(4)}(i_1,i_2,i_3,i_4) =& \sum_{j_1=1}^{N}\sum_{j_2=1}^{N}\sum_{j_3=1}^{N}\sum_{j_4=1}^{N}\frac{1}{i}\Gamma^{(2)}(i_1,j_1)\frac{1}{i}\Gamma^{(2)}(i_2,j_2)\frac{1}{i}\Gamma^{(2)}(i_3,j_3)\frac{1}{i}\Gamma^{(2)}(i_4,j_4)G^{(4)}_{\mathrm{con}}(j_1,j_2,j_3,j_4)\\ &-\sum_{k_1=1}^{N}\sum_{k_2=1}^{N} i\Gamma^{(3)}(i_1,i_2,k_1)G^{(2)}_{\mathrm{con}}(k_1,k_2)i\Gamma^{(3)}(k_2,i_3,i_4)\\ &-\sum_{k_1=1}^{N}\sum_{k_2=1}^{N} i\Gamma^{(3)}(i_1,i_3,k_1)G^{(2)}_{\mathrm{con}}(k_1,k_2)i\Gamma^{(3)}(k_2,i_2,i_4)\\ &-\sum_{k_1=1}^{N}\sum_{k_2=1}^{N} i\Gamma^{(3)}(i_1,i_4,k_1)G^{(2)}_{\mathrm{con}}(k_1,k_2)i\Gamma^{(3)}(k_2,i_2,i_3)\end{aligned} \tag{10}$$

これより，$\Gamma^{(4)}$は$G^{(4)}_{\mathrm{con}}$の外線をもぎ取ったものから更に1粒子可約な部分を取り除いたものである事が分かる．

[*3] ヒント: 式(5)から従う関係式 $\sum_{j_2=1}^{N}\frac{\partial^2\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_2}\partial\varphi_{j_2}}\left.\frac{\partial^2 W(\boldsymbol{J})}{\partial J_{j_2}\partial J_{j_3}}\right|_{\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})}+\delta_{i_2 j_3}=0$ をφ_{i_1}で偏微分すれば良い．計算すると次の様になる:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial}{\partial\varphi_{i_1}}\left(\sum_{j_2=1}^{N}\frac{\partial^2\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_2}\partial\varphi_{j_2}}\left.\frac{\partial^2 W(\boldsymbol{J})}{\partial J_{j_2}\partial J_{j_3}}\right|_{\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})}+\delta_{i_2 j_3}\right)\\ &= \sum_{j_2=1}^{N}\left[\frac{\partial^3\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_1}\partial\varphi_{i_2}\partial\varphi_{j_2}}\left.\frac{\partial^2 W(\boldsymbol{J})}{\partial J_{j_2}\partial J_{j_3}}\right|_{\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})}+\sum_{j_1=1}^{N}\frac{\partial^2\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_2}\partial\varphi_{j_2}}\left.\frac{\partial^3 W(\boldsymbol{J})}{\partial J_{j_1}\partial J_{j_2}\partial J_{j_3}}\right|_{\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})}\frac{\partial J_{j_1}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_1}}\right]\\ &= \sum_{j_2=1}^{N}\left[\frac{\partial^3\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_1}\partial\varphi_{i_2}\partial\varphi_{j_2}}\left.\frac{\partial^2 W(\boldsymbol{J})}{\partial J_{j_2}\partial J_{j_3}}\right|_{\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})}-\sum_{j_1=1}^{N}\frac{\partial^2\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_2}\partial\varphi_{j_2}}\left.\frac{\partial^3 W(\boldsymbol{J})}{\partial J_{j_1}\partial J_{j_2}\partial J_{j_3}}\right|_{\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})}\frac{\partial^2\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_1}\partial\varphi_{j_1}}\right]\end{aligned} \tag{♣}$$

但し，3行目で式(4)の偏微分から従う関係式$\frac{\partial J_{j_1}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_1}}=-\frac{\partial^2\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_1}\partial\varphi_{j_1}}$ を使った．上の等式の両辺に $\frac{\partial^2\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_3}\varphi_{j_3}}$ を掛け，j_3で和を取って式(5)から従う関係式 $\sum_{j_3=1}^{N}\frac{\partial^2\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_3}\partial\varphi_{j_3}}\left.\frac{\partial^2 W(\boldsymbol{J})}{\partial J_{j_2}\partial J_{j_3}}\right|_{\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})}=-\delta_{j_2 i_3}$ を使うと式(7)が得られる．

[*4] ヒント: 式(7)の両辺をφ_{i_4}で偏微分すれば良い．式(♣)3行目から従う次の関係式(の添字を適当に読み替えたもの)を使うと良い:

$$\sum_{j_1=1}^{N}\sum_{j_2=1}^{N}\frac{\partial^2\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_1}\partial\varphi_{j_1}}\frac{\partial^2\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_2}\partial\varphi_{j_2}}\left.\frac{\partial^3 W(\boldsymbol{J})}{\partial J_{j_1}\partial J_{j_2}\partial J_{j_3}}\right|_{\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})}=\sum_{j_2=1}^{N}\frac{\partial^3\Gamma(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\varphi_{i_1}\partial\varphi_{i_2}\partial\varphi_{j_2}}\left.\frac{\partial^2 W(\boldsymbol{J})}{\partial J_{j_2}\partial J_{j_3}}\right|_{\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\varphi})}$$