2019年度 日本大学大学院理工学研究科 物理/量子理工学専攻 場の理論特論II レポート1

提出締め切り: 2019年10月16日(水) 23:59:59 JST
提出先: `ohya@phys.cst.nihon-u.ac.jp`
または駿河台校舎8号館2階823D室

問題1. 順時固有Lorentz変換

Lorentz変換 $x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ は原点からの世界間隔の2乗 $x^2 \equiv \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu = -(x^0)^2 + |\boldsymbol{x}|^2$ を不変に保つ線形変換で，条件 $\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$ を満たす4次正方行列 $\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu)$ で与えられる[*1]．特に $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ かつ $\det\Lambda = 1$ を満たすものを**順時固有Lorentz変換**と呼ぶ．以下の問いに答えよ．

(i) 空間座標 $\boldsymbol{x}$ を球座標表示して $x^\mu = (x^0, \boldsymbol{x}) = (x^0, |\boldsymbol{x}|\sin\theta\cos\phi, |\boldsymbol{x}|\sin\theta\sin\phi, |\boldsymbol{x}|\cos\theta)$ と書く事にする．この x^μ が原点から時間的に離れている場合 (即ち $x^2 = -(x^0)^2 + |\boldsymbol{x}|^2 < 0$ の場合)，x^μ は次の様に書ける事を示せ:[*2]

$$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu_{\mathrm{ref}} \quad \text{with} \quad x^\nu_{\mathrm{ref}} = \left(\mathrm{sgn}(x^0)\sqrt{-x^2}, 0, 0, 0\right) \tag{1}$$

ここで，sgn は符号関数で次式で定義される:

$$\mathrm{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} +1 & \text{for } x > 0 \\ -1 & \text{for } x < 0 \end{cases} \tag{2}$$

また，Λ は順時固有Lorentz変換の変換行列で，空間回転とLorentzブーストの変換行列 R と B を用いて次の様に表される:

$$\Lambda = RBR^{-1} \tag{3}$$

但し，

$$R = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\phi & -\sin\phi & \\ & \sin\phi & \cos\phi & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & & \sin\theta \\ & & 1 & \\ & -\sin\theta & & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\psi & -\sin\psi & \\ & \sin\psi & \cos\psi & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{4a}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{|x^0|}{\sqrt{-x^2}} & & & \frac{\mathrm{sgn}(x^0)|\boldsymbol{x}|}{\sqrt{-x^2}} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \frac{\mathrm{sgn}(x^0)|\boldsymbol{x}|}{\sqrt{-x^2}} & & & \frac{|x^0|}{\sqrt{-x^2}} \end{pmatrix} \tag{4b}$$

ϕ, θ, ψ は力学でも登場するEuler角である．

(ii) 同様に，x^μ が原点から空間的に離れている場合 (即ち $x^2 = -(x^0)^2 + |\boldsymbol{x}|^2 > 0$ の場合) でも，或る順時固有Lorentz変換の変換行列 Λ が存在して x^μ は必ず次の様に書ける:

$$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu_{\mathrm{ref}} \quad \text{with} \quad x^\nu_{\mathrm{ref}} = \left(0, 0, 0, \sqrt{x^2}\right) \tag{5}$$

この様な Λ を1つ見つけよ．条件 $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ と $\det\Lambda = 1$ は必ず満たすこと．

問題2. 交換子関数

次の自由スカラー場を考える:[*3]

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{p}}}\left(a(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{ipx} + a^\dagger(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-ipx}\right) \quad \text{with} \quad p^0 = \omega_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2} \tag{6}$$

[*1] この x^2 は「x^μ の2乗」という意味で，$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ の第2成分 x^2 では無い．紛らわしいが文脈から明らかだからこの記法を使う．また，この授業ではMinkowski計量は一貫して $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$ を用いる．

[*2] ヒント: $x^\mu_{\mathrm{ref}} = (x^0_{\mathrm{ref}}, x^1_{\mathrm{ref}}, x^2_{\mathrm{ref}}, x^3_{\mathrm{ref}})$ を4成分縦ベクトルと思って左から行列(3)を掛ければ良い．R は直交行列なので $R^{-1} = R^\intercal$ ($\intercal$ は転置) である事に注意．(実際は R^{-1} は効かないので，式(1)の Λ としては $\Lambda = RB$ でも良い．また，ψ も効かないので $\psi = 0$ でも良い．)

[*3] e^{ipx} は $\mathrm{e}^{ipx} = \mathrm{e}^{i\eta_{\mu\nu}p^\mu x^\nu} = \mathrm{e}^{-ip^0x^0 + i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} = \mathrm{e}^{-i\omega_{\boldsymbol{p}}x^0 + i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$ の略記．e^{-ipx} も同様．

但し，$a(\boldsymbol{p})$, $a^\dagger(\boldsymbol{p})$ は次の交換関係を満たす:

$$[a(\boldsymbol{p}), a^\dagger(\boldsymbol{q})] = (2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{p}} \delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}), \quad [a(\boldsymbol{p}), a(\boldsymbol{q})] = 0, \quad [a^\dagger(\boldsymbol{p}), a^\dagger(\boldsymbol{q})] = 0 \tag{7}$$

以下の問いに答えよ．

(i) 任意の x^μ と y^μ に対して交換関係 $[\phi(x), \phi(y)]$ は次の様に書き表される事を示せ:[*4]

$$\begin{aligned}[\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{p}}} \left(\mathrm{e}^{ip(x-y)} - \mathrm{e}^{-ip(x-y)} \right) \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \, \mathrm{sgn}(p^0) \delta(p^2 + m^2) \mathrm{e}^{ip(x-y)} \end{aligned} \tag{8}$$

この右辺の積分で表される関数をPauli-Jordanの**交換子関数**と呼ぶ．

(ii) 任意の x^μ と y^μ に対して交換子関数(8)は次の等式を満たす事を示せ:[*5]

$$[\phi(\Lambda x + a), \phi(\Lambda y + a)] = [\phi(x), \phi(y)] \tag{9}$$

但し，$\Lambda^\mu{}_\nu$ は任意の順時固有Lorentz変換で，a^μ は任意の定数4元ベクトルである．この等式を (交換子関数に対する) **Poincaré不変性**と呼ぶ．

(iii) 上のPoincaré不変性を用いて $\Lambda^\mu{}_\nu$ と a^μ をうまく選ぶと，交換子関数は必ず次の様に書ける事を示せ:[*6]

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\phi(x_{\mathrm{ref}}), \phi(0)] \tag{10}$$

但し，

$$x^\mu_{\mathrm{ref}} = \begin{cases} \left(\mathrm{sgn}(x^0 - y^0) \sqrt{-(x-y)^2}, 0, 0, 0 \right) & \text{for} \quad (x-y)^2 < 0 \\ \left(0, 0, 0, \sqrt{(x-y)^2} \right) & \text{for} \quad (x-y)^2 > 0 \end{cases} \tag{11}$$

(iv) 上の結果を用いて，交換子関数は2点 x^μ と y^μ が空間的に離れている場合は必ずゼロになる事を示せ:[*7]

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 \quad \text{for} \quad (x-y)^2 > 0 \tag{12}$$

この様に空間的に離れた2点で場の演算子が交換する事を**微視的因果律**とか**局所性**と呼ぶ．

[*4] **ヒント**: 式(8)の1行目の等号は交換関係(7)を使えばすぐに導ける．2行目の等号はデルタ関数に対して成り立つ公式

$$\delta(p^2 + m^2) = \frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{p}}} \left(\delta(p^0 - \omega_{\boldsymbol{p}}) + \delta(p^0 + \omega_{\boldsymbol{p}}) \right)$$

を用いてまず2行目の p^0 積分を実行し，次に第2項目だけ $\boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p}$ と変数変換すると1行目に一致する事から従う．

[*5] **ヒント**: 式(8)の2行目の表式を用いると，式(9)の左辺は

$$[\phi(\Lambda x + a), \phi(\Lambda y + a)] = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \, \mathrm{sgn}(p^0) \delta(p^2 + m^2) \mathrm{e}^{ip[(\Lambda x + a) - (\Lambda y + a)]} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \, \mathrm{sgn}(p^0) \delta(p^2 + m^2) \mathrm{e}^{i(\Lambda^{-1} p)(x-y)}$$

と表せる．($(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu$ に注意せよ．) 次に変数変換 $p^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu q^\nu$ を施すと，上の積分は式(8)の2行目(の積分変数が q に置き換わったもの)に一致する事を示せば良い．変数変換のJacobianは $|\det(\frac{\partial p^\mu}{\partial q^\nu})| = |\det(\Lambda^\mu{}_\nu)| = 1$ である事，及び $p^2 + m^2 = 0$ を満たす p^μ に対しては順時固有Lorentz変換は p^0 の符号を変えない事を使う．ちなみに $\Lambda x + a$ は $\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ の添え字を省いた略記．

[*6] **ヒント**: まず a^μ の任意性を利用して $a^\mu = -\Lambda^\mu{}_\nu y^\nu$ と選び，次に $\Lambda^\mu{}_\nu$ の任意性を利用して問1で用いた順時固有Lorentz変換の逆行列を持って来れば良い．

[*7] **ヒント**: 式(8)の1行目の積分を使って式(10)の右辺を計算すれば良い．奇関数の $-\infty$ から $+\infty$ の積分はゼロになることを使うと，$(x-y)^2 > 0$ の時はゼロになることが分かる．