

1	2次元デルタ関数ポテンシャル	1
1.1	D 次元の形式的厳密解	2
1.1.1	束縛状態： $E = -\kappa^2 < 0$	2
1.1.2	散乱状態： $E = k^2 > 0$	3
1.2	正則化と繰り込み	4
1.2.1	正則化その1：カットオフ正則化	5
1.2.2	正則化その2：次元正則化	5
1.2.3	繰り込みと次元転化	6
1.3	繰り込み群方程式と β 関数	7
2	参考文献	9
A	Green 関数の計算	10

(Dated: September 2, 2016)

まとめ

- デルタ関数ポテンシャルで記述される Schrödinger 方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + g\delta^{(D)}(\mathbf{x})\right)\Psi(\mathbf{x}) = E\Psi(\mathbf{x})$$

は局所ポテンシャルの下で運動する D 次元一粒子量子力学系の雛形。

- $D = 1$ の1次元の場合は容易に解ける。しかし2次元以上ではデルタ関数ポテンシャルは特異性が強過ぎて、素朴に計算すると物理量は無限大に発散してしまう。理論をうまく定義するには正則化と繰り込みが必要。
- 特に2次元の場合が面白い。 $D = 2$ では次元転化 (dimensional transmutation) が起こり、更に $g < 0$ の引力ポテンシャルの場合、理論は漸近的自由性を示す。

1. 2次元デルタ関数ポテンシャル

デルタ関数ポテンシャルの下で運動する質量 m の粒子を考えましょう。空間の次元を D とすると、この粒子の運動を記述する Schrödinger 方程式は次式で与えられます：

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + g\delta^{(D)}(\mathbf{x})\right)\Psi(\mathbf{x}) = E\Psi(\mathbf{x}). \quad (1.1)$$

ここで E はエネルギー固有値、 g は実の結合定数で正でも負でも良いとします。

さて、 \hbar と $2m$ は以下の計算の至る所に出て来て見苦しいので、記号を簡略化するために \hbar と $2m$ が 1 となる単位系で考えて行くことにしましょう：

$$\hbar = 2m = 1. \quad (1.2)$$

すると Schrödinger 方程式(1.1)は次の様に簡単化されます：

$$\left(-\nabla^2 + g\delta^{(D)}(\mathbf{x})\right)\Psi(\mathbf{x}) = E\Psi(\mathbf{x}). \quad (1.3)$$

ここで、この $\hbar = 2m = 1$ の単位系では全ての量は長さの次元で測れることに注意しましょう。例えば、ラプラシアン ∇^2 は2階の空間微分なので長さの次元は -2 、 D 次元デル

ラプラシアン	$[\nabla^2] = L^{-2}$
デルタ関数	$[\delta^{(D)}(\mathbf{x})] = L^{-D}$
結合定数	$[g] = L^{D-2}$
エネルギー固有値	$[E] = L^{-2}$

Table 1: 単位系 $\hbar = 2m = 1$ での長さの次元.

タ関数 $\delta^{(D)}(\mathbf{x})$ は D 次元空間積分すると 1 になるので長さの次元は $-D$, ポテンシャル $V(\mathbf{x}) = g\delta^{(D)}(\mathbf{x})$ とエネルギー固有値 E はラプラシアンと同じ次元でなければならないので結合定数 g は長さの次元 $D - 2$, エネルギー固有値 E は長さの次元 -2 となります (Table 1参照). $D = 2$ では結合定数は無次元になることに注意しましょう.

さて, 今からやりたいのは単に Schrödinger 方程式(1.3)を解くことです. $D = 1$ の 1 次元の場合は, 標準的な量子力学の教科書なら必ず載っていて簡単に解くことが出来ます. しかし 2 次元以上の場合を解いたことがある人はまず居ないでしょう. 実際, 2 次元以上のデルタ関数ポテンシャルは特異性が強過ぎて, 素朴に計算すると束縛状態のエネルギー固有値が無限大になったり, 散乱振幅がゼロになったりします. 理論をうまく定義するには, 実は場の量子論で開発された正則化 (regularization) と繰り込み (renormalization) が必要になってきます. 以下, この簡単な一粒子量子力学系で繰り込みの手法を学んでいきましょう.

1.1. D 次元の形式的厳密解

Schrödinger 方程式(1.3)自体は Green 関数を駆使することで, 任意の次元 D で形式的には厳密に解くことが出来ます. この節ではまず D 次元の形式的厳密解を導出しましょう.

1.1.1. 束縛状態: $E = -\kappa^2 < 0$

まず $E < 0$ の束縛状態の解を求めましょう. 以下, $E = -\kappa^2$ ($\kappa > 0$) とします. 解きたい Schrödinger 方程式は次の形をしています:

$$(-\nabla^2 + V(\mathbf{x}))\Psi(\mathbf{x}) = -\kappa^2\Psi(\mathbf{x}). \quad (1.4)$$

今の問題では $V(\mathbf{x}) = g\delta^{(D)}(\mathbf{x})$ です.

さて, 一般に式(1.4)の“解”は次式で与えられます:

$$\Psi(\mathbf{x}) = \int d^D\mathbf{y} G_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \kappa) V(\mathbf{y}) \Psi(\mathbf{y}). \quad (1.5)$$

ここで $G_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \kappa)$ は束縛状態 Green 関数で, 次の微分方程式を満たします:

$$(-\kappa^2 + \nabla_x^2) G_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \kappa) = \delta^{(D)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (1.6)$$

これは簡単に解くことが出来て, 解は次式で与えられます (補遺A参照):

$$G_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \kappa) = \int \frac{d^D\mathbf{p}}{(2\pi)^D} \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{-\kappa^2 - p^2} = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\kappa}{2\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1}(\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{y}|). \quad (1.7)$$

ここで $K_\nu(z)$ は ν 次の第二種変形 Bessel 関数です.

式(1.5)が Schrödinger 方程式(1.4)の“解”を与えるというのは, 式(1.5)の両辺に左から微分演算子 $-\kappa^2 + \nabla_x^2$ を作用させると, 式(1.6)より $(-\kappa^2 + \nabla_x^2)\Psi(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x})$ が従い, これは Schrödinger 方程式(1.4)に他ならない, ということから分かります. 但し, 式(1.5)の右辺には求めたい波動関数 Ψ が入っているので実際には全然解いた事にはならず, 微分方程式を積分方程式に書き換えたと理解するのが正しい理解です.

しかしながら、デルタ関数ポテンシャルの場合は特殊で、式(1.5)で Schrödinger 方程式は本当に解けてしまっています。実際、 $V(\mathbf{y}) = g\delta^{(D)}(\mathbf{y})$ を(1.5)に代入すると \mathbf{y} 積分は自明に実行できて次の束縛状態波動関数を得ます:

$$\Psi(\mathbf{x}) = gG_B(\mathbf{x}, \mathbf{0}; \kappa)\Psi(\mathbf{0}). \quad (1.8)$$

$\Psi(\mathbf{0})$ は規格化定数とみなせるので、 $E = -\kappa^2 < 0$ の場合の解は束縛状態 Green 関数(1.7)で与えられることが分かりました。

さて、式(1.8)で $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ と置いてみましょう。すると次の等式を得ます:

$$\Psi(\mathbf{0}) = gG_B(\mathbf{0}, \mathbf{0}; \kappa)\Psi(\mathbf{0}). \quad (1.9)$$

この等式が矛盾なく成り立つためには次の条件式が成り立っていなければなりません:

$$1 = gG_B(\mathbf{0}, \mathbf{0}; \kappa). \quad (1.10)$$

この条件式を κ について解いて、 κ を結合定数 g の関数として表すことで、束縛状態のエネルギー固有値 $E = -\kappa^2$ が求まります。式(1.10)がエネルギー固有値の量子化条件を与えているわけです。式(1.10)は自己無撞着条件 (self-consistency condition) と呼ばれたりします。

1.1.2. 散乱状態: $E = k^2 > 0$

次に $E = k^2 > 0$ ($k > 0$) の散乱状態の解を求めましょう。解きたい Schrödinger 方程式は次の形をしています:

$$(-\nabla^2 + V(\mathbf{x}))\Psi(\mathbf{x}) = k^2\Psi(\mathbf{x}). \quad (1.11)$$

但し今の問題では $V(\mathbf{x}) = g\delta^{(D)}(\mathbf{x})$ です。

さて、一般にポテンシャル $V(\mathbf{x})$ が無限遠方 $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ で十分早くゼロになる場合、Schrödinger 方程式(1.11)の散乱解 $\Psi_{\mathbf{k}}^+$ (波数ベクトル \mathbf{k} の平面波で入射して、ポテンシャル散乱を起こし、球面波で出て行く解) は次式で与えられます:

$$\Psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \int d^D\mathbf{y} G^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}; k)V(\mathbf{y})\Psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{y}). \quad (1.12)$$

ここで $G^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}; k)$ は Green 関数で、微分方程式

$$(k^2 + \nabla_x^2)G^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}; k) = \delta^{(D)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (1.13)$$

の解の一つです。具体的には次式で与えられます:

$$G^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}; k) = \int \frac{d^D\mathbf{p}}{(2\pi)^D} \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{k^2 - p^2 + i\epsilon} = -\frac{i}{4} \left(\frac{k}{2\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right)^{\frac{D}{2}-1} H_{\frac{D}{2}-1}^{(1)}(k|\mathbf{x}-\mathbf{y}|). \quad (1.14)$$

ここで ϵ は正の無限小量で、 $H_\nu^{(1)}(z)$ は ν 次の第一種 Hankel 関数です。式(1.12)を Lippmann-Schwinger 方程式と呼びます。¹

前節同様、式(1.12)が Schrödinger 方程式(1.4)の“解”を与えるというのは、式(1.12)の両辺に左から微分演算子 $k^2 + \nabla_x^2$ を作用させると、式(1.13)より $(k^2 + \nabla_x^2)\Psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x})\Psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{x})$ が従い、これは Schrödinger 方程式(1.11)に他ならない、ということから分かります。式(1.12)の右辺の積分の中には求めたい波動関数 $\Psi_{\mathbf{k}}^+$ が入っているので、一般には Schrödinger 方程式を解いたことにはなりません、デルタ関数ポテンシャルの場合は(1.12)を用いて厳密に解くことが出来ます。

¹Lippmann-Schwinger 方程式は基本的には単に Schrödinger 方程式を積分方程式へ書き換えただけですが、Schrödinger 方程式には無い境界条件の情報も含んでいます。境界条件の情報は式(1.14)の正の無限小量 ϵ によって与えられていますが、ここでは詳しく解説しません。

そこで、まず式(1.12)に $V(\mathbf{y}) = g\delta^{(D)}(\mathbf{y})$ を代入しましょう。 \mathbf{y} 積分は自明に実行できて次式を得ます:

$$\Psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + gG^+(\mathbf{x}, \mathbf{0}; k)\Psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{0}). \quad (1.15)$$

次に $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ と置いてみましょう:

$$\Psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{0}) = 1 + gG^+(\mathbf{0}, \mathbf{0}; k)\Psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{0}). \quad (1.16)$$

これは $\Psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{0})$ について解くことができます:

$$\Psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{0}) = \frac{1}{1 - gG^+(\mathbf{0}, \mathbf{0}; k)}. \quad (1.17)$$

これを式(1.15)に代入すると次の散乱解を得ます:

$$\Psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \frac{gG^+(\mathbf{x}, \mathbf{0}; k)}{1 - gG^+(\mathbf{0}, \mathbf{0}; k)}. \quad (1.18)$$

Green 関数はすでに求まっているのでこれで Schrödinger 方程式の散乱解を厳密に求めたこととなります。

さて、散乱解が分かったので、その無限遠方での振る舞いから散乱振幅を読み取ることが出来ます。Hankel 関数の漸近挙動 $H_{\nu}^{(1)}(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - (2\nu+1)\pi/4)}$ を使うと、Green 関数は無限遠方で次の様に振る舞います:

$$G^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}; k) \rightarrow -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{D-3}{2}} \frac{e^{i[k|\mathbf{x}-\mathbf{y}| - (D-3)\pi/4]}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{\frac{D-1}{2}}} \quad \text{as } |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \rightarrow \infty. \quad (1.19)$$

これより波動関数は無限遠方で次の様に振る舞う事が分かります:

$$\Psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{x}) \rightarrow e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + f(k) \frac{e^{i[k|\mathbf{x}| - (D-3)\pi/4]}}{|\mathbf{x}|^{\frac{D-1}{2}}} \quad \text{as } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (1.20)$$

ここで $f(k)$ は散乱振幅で、次式で与えられます:

$$f(k) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{D-3}{2}} g\Psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{0}) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{D-3}{2}} \frac{g}{1 - gG^+(\mathbf{0}, \mathbf{0}; k)}. \quad (1.21)$$

1.2. 正則化と繰り込み

前節までで Schrödinger 方程式の厳密解を求めましたが、これらはいくまで形式解です。形式解と言っている意味は、式(1.10)と(1.21)に入ってくる $G_B(\mathbf{0}, \mathbf{0}; \kappa)$ と $G^+(\mathbf{0}, \mathbf{0}; k)$ は2次元以上の空間では無限大に発散してしまうからです:

$$G_B(\mathbf{0}, \mathbf{0}; \kappa) = -\int \frac{d^D \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\kappa^2 + p^2} = \infty \quad \text{for } D \geq 2, \quad (1.22a)$$

$$G^+(\mathbf{0}, \mathbf{0}; k) = \int \frac{d^D \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 - p^2 + i\epsilon} = \infty \quad \text{for } D \geq 2. \quad (1.22b)$$

以下ではこの無限大はパラメータ g に隠してしまって、物理量は全て有限になるようにしていきます。この操作を繰り込みといいます。その為にはまず理論を少し変更して積分が有限になるようにしないといけません。この理論を少し変更して積分を有限にする操作を正則化といいます。

以下では $D = 2$ の2次元の場合に注目し、物理量として束縛状態のエネルギー固有値を選びましょう。まず正則化の代表例2つ、カットオフ正則化と次元正則化、を行ってその後繰り込みを行うことにします。

1.2.1. 正則化その1：カットオフ正則化

積分(1.22a)と(1.22b)の無限大の発散は、運動量 \mathbf{p} が無限に大きい所まで積分してしまうから生じるので、積分範囲に上限をつけてしまえば積分は有限になります。そこで積分を次の様に変更して正則化しましょう:

$$\int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \rightarrow \int_{|\mathbf{p}| < \Lambda} \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2}. \quad (1.23)$$

Λ は運動量の上限で、運動量カットオフと呼びます。このカットオフ正則化の下では、式(1.10)の右辺は次の様に計算されます:

$$\begin{aligned} \text{式(1.10)の右辺} &= gG_B(\mathbf{0}, \mathbf{0}; \kappa) = -g \int_{|\mathbf{p}| < \Lambda} \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\kappa^2 + p^2} \\ &= -g \int_0^\Lambda \frac{2\pi p dp}{(2\pi)^2} \frac{1}{\kappa^2 + p^2} = -\frac{g}{4\pi} \int_0^\Lambda \frac{dp^2}{\kappa^2 + p^2} \\ &= -\frac{g}{4\pi} \log\left(\frac{\kappa^2 + \Lambda^2}{\kappa^2}\right). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Λ は最終的には無限大にやって元の理論に戻したいので、式(1.24)の対数を $\Lambda = \infty$ の周りで展開して、 $\Lambda \rightarrow \infty$ とした時に効いてくる主要な項だけを取り出しましょう。次の様にやります:

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{\kappa^2 + \Lambda^2}{\kappa^2}\right) &= \log\left[\frac{\Lambda^2}{\kappa^2} \left(1 + \frac{\kappa^2}{\Lambda^2}\right)\right] = \log\left(\frac{\Lambda^2}{\kappa^2}\right) + \log\left(1 + \frac{\kappa^2}{\Lambda^2}\right) \\ &= \log\left(\frac{\Lambda^2}{\kappa^2}\right) + \left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}\right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.25)$$

ここで最後の等式に移るときに Taylor 展開の公式 $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$ を使いました。従って、 $\Lambda \rightarrow \infty$ では(1.24)は $\log \Lambda$ で発散し、(1.25)の2項目以降は効いてこないことが分かります。まとめると、 Λ が十分大きい時、式(1.10)の右辺は次の様に振る舞います:

$$gG_B(\mathbf{0}, \mathbf{0}; \kappa) = -\frac{g}{4\pi} \log\left(\frac{\Lambda^2}{\kappa^2}\right) + O(\Lambda^{-2}). \quad (1.26)$$

1.2.2. 正則化その2：次元正則化

次に次元正則化をやしましょう。積分(1.22a)と(1.22b)が無限大に発散してしまうのは次元 D が2以上の場合なので、 ϵ を正の無限小量として $D = 2 - \epsilon$ 次元で計算すれば積分は有限になります。そこで積分と結合定数を次の様に変更して理論を正則化しましょう:

$$\int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \rightarrow \int \frac{d^D\mathbf{p}}{(2\pi)^D}, \quad (1.27a)$$

$$g \rightarrow g\mu^{2-D}. \quad (1.27b)$$

ここで μ は長さの次元 -1 を持った量で、 D 次元でも結合定数 g が無次元になるように導入した任意の定数です。(D 次元では結合定数は長さの次元 $D-2$ を持つことに注意しましょう。) μ を繰り込みスケールと呼びます。この置き換えの下で式(1.10)の右辺は次の様に計算されます:

$$\begin{aligned} \text{式(1.10)の右辺} &= g\mu^{2-D}G_B(\mathbf{0}, \mathbf{0}; \kappa) = -g\mu^{2-D} \int \frac{d^D\mathbf{p}}{(2\pi)^D} \frac{1}{\kappa^2 + p^2} \\ &= -\frac{2g\mu^{2-D}}{(4\pi)^{D/2}\Gamma(D/2)} \int_0^\infty dp \frac{p^{D-1}}{\kappa^2 + p^2} = -\frac{g(\mu/\kappa)^{2-D}}{(4\pi)^{D/2}\Gamma(D/2)} \int_0^\infty dx \frac{x^{D/2-1}}{1+x} \\ &= -\frac{g(\mu/\kappa)^{2-D}\Gamma(1-D/2)}{(4\pi)^{D/2}}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

ここで3番目の等式では公式 $\int d^D \mathbf{p} f(p) = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \int_0^\infty dp p^{D-1} f(p)$ (f は $p = |\mathbf{p}|$ の任意関数) を使い, 4番目の等式では変数変換 $x = p^2/\kappa^2$ を行い, 最後の等式ではベータ関数の公式

$$B(p, q) = \int_0^\infty dx \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (1.29)$$

を使いました. $\Gamma(0) = \infty$ なので式(1.28)は $D = 2$ でやはり発散してしまうことに注意しましょう. そこで“ $D = 1.99$ 次元”で計算して積分を有限にすることにします. ϵ を正の無限小量として

$$D = 2 - \epsilon \quad (1.30)$$

と置くと, 式(1.28)は次の様になります:

$$\text{式(1.28)} = -\frac{g(\mu/\kappa)^\epsilon \Gamma(\epsilon/2)}{(4\pi)^{1-\epsilon/2}} = -\frac{g}{4\pi} \left(4\pi \frac{\mu^2}{\kappa^2}\right)^{\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2). \quad (1.31)$$

ϵ は最終的にはゼロに持って行きたいので, $(4\pi\mu^2/\kappa^2)^{\epsilon/2}$ と $\Gamma(\epsilon/2)$ を $\epsilon = 0$ の周りで展開しましょう:

$$\left(4\pi \frac{\mu^2}{\kappa^2}\right)^{\epsilon/2} = e^{\frac{\epsilon}{2} \log\left(4\pi \frac{\mu^2}{\kappa^2}\right)} = 1 + \frac{\epsilon}{2} \log\left(4\pi \frac{\mu^2}{\kappa^2}\right) + O(\epsilon^2), \quad (1.32a)$$

$$\Gamma(\epsilon/2) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon). \quad (1.32b)$$

ここで $\gamma \simeq 0.577$ は Euler の定数です. これらを式(1.31)に代入して整理すると, 式(1.10)の右辺は最終的に次の形を取ります:

$$g\mu^{2-D} G_B(\mathbf{0}, \mathbf{0}; \kappa) = -\frac{g}{4\pi} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log(4\pi) + \log\left(\frac{\mu^2}{\kappa^2}\right) + O(\epsilon) \right]. \quad (1.33)$$

1.2.3. 繰り込みと次元転化

さて, 正則化が終わったので, いよいよ $\Lambda \rightarrow \infty$ または $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を考えることにしましょう. 考え方は簡単で, 結合定数 g は実は Λ または ϵ の関数で, 式(1.26)または(1.33)の発散項をうまく打ち消すように g も実は発散していると考え, 物理量 (今の場合はエネルギー固有値 $E = -\kappa^2$) は有限になるようにしよう, というものです.

これは次の様にやります. まずエネルギー固有値を決める式(1.10)は次の様に書けることに注意します:

$$\text{(カットオフ正則化の場合): } \frac{1}{g} = -\frac{1}{4\pi} \left[\log\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) + \log\left(\frac{\mu^2}{\kappa^2}\right) + O(\Lambda^{-2}) \right], \quad (1.34a)$$

$$\text{(次元正則化の場合): } \frac{1}{g} = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log(4\pi) + \log\left(\frac{\mu^2}{\kappa^2}\right) + O(\epsilon) \right]. \quad (1.34b)$$

式(1.34a)の μ は長さの次元 -1 を持った任意の定数で, これも繰り込みスケールと呼びます. 次に繰り込まれた結合定数 g_R を次式で定義します:²

$$\text{(カットオフ正則化の場合): } \frac{1}{g_R} := \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{g} + \frac{1}{4\pi} \log\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) \right], \quad (1.35a)$$

$$\text{(次元正則化の場合): } \frac{1}{g_R} := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{g} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log(4\pi) \right) \right]. \quad (1.35b)$$

²次元正則化の場合, 繰り込まれた結合定数は $\frac{1}{g_R} := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2}{\epsilon} \right)$ と定義しても良いです. この流儀を minimal subtraction (略して MS) と言い, 式(1.35b)の流儀を modified minimal subtraction (略して $\overline{\text{MS}}$) と言います. $\overline{\text{MS}}$ はエム・エス・バーと読み, MS よりもよく使われます.

要するに、これらの極限がうまく存在するように g は実は Λ または ϵ 依存性を持っていた、とするわけです。このようにハミルトニアンに元々入っていた実は発散しているパラメータ g を裸の結合定数と呼びます。こうすると、式(1.34a)と(1.34b)はともに $\Lambda \rightarrow \infty$ と $\epsilon \rightarrow 0$ の極限が存在して、次式になります：

$$\frac{1}{g_R} = -\frac{1}{4\pi} \log\left(\frac{\mu^2}{\kappa^2}\right). \quad (1.36)$$

これを κ について解くと、束縛状態のエネルギー固有値 $E_B = -\kappa^2$ が求まります：

$$E_B = -\mu^2 \exp\left(\frac{4\pi}{g_R}\right). \quad (1.37)$$

さて、今まで束縛状態のエネルギー固有値だけを取り扱ってきましたが、散乱振幅も式(1.35a)と(1.35b)の結合定数の繰り込みだけで有限にすることが出来ます。式(1.21)より $D = 2$ で散乱振幅は次の様になります：

$$f(k) = -\frac{1}{\sqrt{8\pi k}} \frac{1}{\frac{1}{g} - G^+(\mathbf{0}, \mathbf{0}; k)}. \quad (1.38)$$

$G^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}; k) = G_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}; -ik)$ なので、 $\kappa^2 = -k^2$ の置き換えで前節までの計算がそのまま使えて $G^+(\mathbf{0}, \mathbf{0}; k)$ は次の様に正則化されます：

$$G^+(\mathbf{0}, \mathbf{0}; k) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi} \left[\log\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) + \log\left(\frac{\mu^2}{-k^2}\right) + O(\Lambda^{-2}) \right] & (\text{カットオフ正則化}), \\ -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log(4\pi) + \log\left(\frac{\mu^2}{-k^2}\right) + O(\epsilon) \right] & (\text{次元正則化}). \end{cases} \quad (1.39)$$

従って、繰り込まれた結合定数(1.35a)と(1.35b)を使うと散乱振幅は

$$f(k) = -\frac{1}{\sqrt{8\pi k}} \frac{1}{\frac{1}{g_R} + \frac{1}{4\pi} \log\left(\frac{\mu^2}{-k^2}\right)} \quad (1.40)$$

となります。ここで式(1.36)より $\frac{1}{g_R} = -\frac{1}{4\pi} \log\left(\frac{\mu^2}{|E_B|}\right)$ なので、これを式(1.40)に代入すると

$$f(k) = -\sqrt{\frac{2\pi}{k}} \frac{1}{\log\left(\frac{|E_B|}{-k^2}\right)} \quad (1.41)$$

となって繰り込まれた結合定数 g_R を全く含まない形に書けることに注意しましょう。これは結合定数の代わりに E_B を理論の基本的なパラメータとみなすことが出来るのではないかと、いうことを示唆していて、実際、散乱振幅だけでなく波動関数からも g_R を消し去って、代わりに E_B だけをパラメータとして含む形にすることが出来ます。このように、元々のハミルトニアンでは無次元の結合定数 g が基本的なパラメータであった理論が、繰り込みを経て、基本的なパラメータが次元を持った量 E_B になる現象を次元転化と言います。

1.3. 繰り込み群方程式と β 関数

さて、正則化と繰り込みの過程で新たに長さの次元 -1 を持った任意のスケール μ を導入しましたが、そもそもエネルギー固有値 E_B を決める式(1.10)には μ などどこにも入っていませんでしたので、実際は E_B は μ には依存していないべきです。そこで、 E_B は μ で微分するとゼロになれば、と要請しましょう：

$$\mu \frac{d}{d\mu} E_B = 0. \quad (1.42)$$

微分を $\frac{d}{d\mu}$ ではなく $\mu\frac{d}{d\mu}$ としたのは、単に微分演算を無次元の量にしたかったからです。式(1.42)は、物理量は繰り込みスケール μ の選び方に依るな、という要請を表しています。

E_B は繰り込みスケール μ と繰り込まれた結合定数 $g_R(\mu)$ の関数 $E_B(\mu, g_R(\mu))$ なので、チェイン・ルール $\mu\frac{dE_B}{d\mu} = \mu\frac{\partial E_B}{\partial\mu} + \mu\frac{dg_R}{d\mu}\frac{\partial E_B}{\partial g_R}$ を使うと式(1.42)は次の偏微分方程式になります：

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(g_R)\frac{\partial}{\partial g_R}\right)E_B = 0. \quad (1.43)$$

これを繰り込み群方程式と呼び、 $\beta(g_R)$ は β 関数と呼ばれるもので次式で定義されます：

$$\beta(g_R) := \mu\frac{dg_R}{d\mu}. \quad (1.44)$$

今の場合、エネルギー固有値 E_B は(1.37)で厳密に求めているので、これを μ と g_R で偏微分することで β 関数は厳密に求めることができます：

$$\begin{aligned} 0 &= \mu\frac{\partial E_B}{\partial\mu} + \beta(g_R)\frac{\partial E_B}{\partial g_R} = -2\mu^2 e^{4\pi/g_R} + \beta(g_R) \left[-\mu^2 e^{4\pi/g_R} \left(-\frac{4\pi}{g_R^2}\right)\right] \\ &= \left(2 - \frac{4\pi}{g_R^2}\beta(g_R)\right)E_B. \end{aligned} \quad (1.45)$$

従って、等式(1.45)が成り立つためには β 関数は

$$\beta(g_R) = \frac{1}{2\pi}g_R^2 \quad (1.46)$$

でなければなりません。

さて、式(1.46)は1階の微分方程式

$$\mu\frac{dg_R}{d\mu} = \frac{1}{2\pi}g_R^2 \quad (1.47)$$

なので、これは解くことができます。式(1.47)を $\frac{dg_R}{g_R^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{d\mu}{\mu}$ と書き直して、 μ から μe^t ($-\infty < t < \infty$) まで積分しましょう：

$$\int_{g_R}^{\bar{g}(t)} \frac{d\bar{g}_R}{\bar{g}_R^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mu}^{\mu e^t} \frac{d\bar{\mu}}{\bar{\mu}}. \quad (1.48)$$

ここで $\bar{g}(t)$ は繰り込みスケール μe^t での結合定数の値です。積分は簡単に実行できて、少し整理して次の式を得ます：

$$\bar{g}(t) = \frac{g_R}{1 - \frac{g_R}{2\pi}t}. \quad (1.49)$$

この $\bar{g}(t)$ を有効結合定数または走る結合定数 (running coupling constant) と呼びます。 $\bar{g}(t)$ は運動量スケールを e^t 倍したときの結合定数を表すのですが、これは次の様に理解できます。散乱振幅の入射粒子の運動量の絶対値 k を e^t 倍してみましょう。 k を ke^t に置き換えた時の表式は次の様になります：

$$\begin{aligned} f(ke^t; g_R) &= -\frac{1}{\sqrt{8\pi ke^t}} \frac{1}{\frac{1}{g_R} + \frac{1}{4\pi} \log\left(\frac{\mu^2}{-k^2 e^{2t}}\right)} \\ &= -\frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{\sqrt{8\pi k}} \frac{1}{\frac{1}{g_R} - \frac{t}{2\pi} + \frac{1}{4\pi} \log\left(\frac{\mu^2}{-k^2}\right)} \\ &= -\frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{\sqrt{8\pi k}} \frac{1}{\frac{1}{\bar{g}(t)} + \frac{1}{4\pi} \log\left(\frac{\mu^2}{-k^2}\right)} \\ &= e^{-\frac{1}{2}t} f(k; \bar{g}(t)). \end{aligned} \quad (1.50)$$

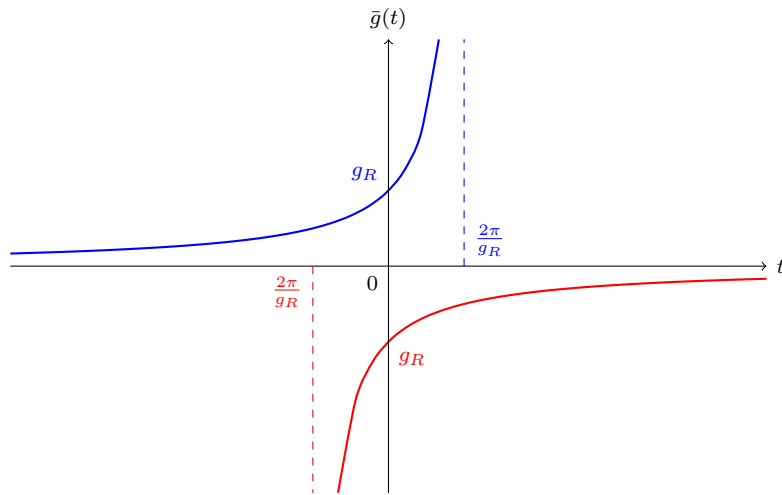


Figure 1: 有効結合定数 $\bar{g}(t) = \frac{g_R}{1 - \frac{g_R}{2\pi}t}$. $t = 0$ の初期値 g_R が正の場合 (青色の曲線) と負の場合 (赤色の曲線) で振る舞いが異なる.

全体に掛かる因子 $e^{-\frac{1}{2}t}$ は散乱振幅が運動量次元 $-1/2$ を持っていることから来る自明な因子です. 従ってこれを除けば, 式(1.50)は, 入射粒子の運動量 k を e^t 倍するという事は, 入射粒子の運動量 k をそのままにして結合定数を $\bar{g}(t)$ にすることに等しい, という事を表しています. 有効結合定数 $\bar{g}(t)$ の t 依存性を知るという事は, 入射粒子の運動量スケールを変えていった時に理論がどう変わっていくかを知ることと等しいわけです. 図1を見ると明らかですが, g_R が負の場合, $\bar{g}(t)$ は高運動量極限 (即ち高エネルギー極限または短距離極限) でゼロになります. このように高エネルギー極限 $t \rightarrow \infty$ で結合定数がゼロになって自由粒子の理論になるような理論を, 漸近的自由な理論といいます.

2. 参考文献

- 私の知る限り, 2次元デルタ関数ポテンシャルの量子力学系における正則化や束縛状態のエネルギー固有値の計算は, クォーク閉じ込めの文脈で初めて行われました:

C. Thorn, "Quark confinement in the infinite-momentum frame," *Phys. Rev.* **D19** (1979) 639-651 [[INSPIRE](#)].

その後, 2次元デルタ関数ポテンシャルの正則化や繰り込みについては幾つも論文が出ていますが, 次の Roman Jackiw の 1991 年の論文が最も有名です:

R. Jackiw, "Delta function potentials in two-dimensional and three-dimensional quantum mechanics," in *M. A. B. Bég Memorial Volume*, A. Ali and P. Hoodbhoy, eds. World Scientific Publishing, 1991 [[INSPIRE](#)]; scanned version available in the KEK library: http://ccdb5fs.kek.jp/cgi-bin/img_index?200032443.

2次元デルタ関数ポテンシャルの正則化や繰り込みの数学的に厳密な取り扱いは, 2次元ラプラシアン自己共軛拡大 (self-adjoint extension) の話 (簡単に言うと波動関数の原点での境界条件の話) になるのですが, Jackiw の論文ではそれについても簡単に議論されています.

- Schrödinger 方程式(1.3)はデルタ関数ポテンシャルで2体相互作用する2粒子系の, 相対座標での Schrödinger 方程式とみなすことも出来ます. ここで, 一般に次の Schrödinger 方程式で記述される2体相互作用のみの量子力学的 N 体問題

$$i\partial_t \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N; t) = \left[-\sum_{n=1}^N \nabla_{\mathbf{x}_n}^2 + \sum_{n < m} V(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m) \right] \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N; t) \quad (2.1)$$

は、ハミルトニアンが次式で与えられる 2 体相互作用のみの非相対論的場の量子論

$$H = \int d^D \mathbf{x} \nabla \psi^\dagger(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \int d^D \mathbf{x} d^D \mathbf{y} \psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi^\dagger(\mathbf{y}) V(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \psi(\mathbf{y}) \psi(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

と等価であることを思い出すと、今まで計算してきた束縛状態のエネルギー固有値や散乱振幅は、相互作用ポテンシャルが $V(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 2g\delta^{(D)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ の時の $D = 2$ 次元非相対論的場の量子論の厳密な結果を与えているのではないかと期待したくなります。実際この期待は正しく、古典作用が次式で与えられる非相対論的ボゾン場の量子論

$$S[\psi, \psi^*] = \int dt d^2 \mathbf{x} [i\psi^* \partial_t \psi - |\nabla \psi|^2 - g|\psi|^4] \quad (2.3)$$

では 4 点関数 $\Gamma^{(4)}$ が厳密に計算できて、 $\Gamma^{(4)}$ から 2 体の散乱振幅および 2 体の束縛状態のエネルギーを読み取ると、量子力学で計算した厳密な結果と完全に一致する、ということが Oren Bergman の 1992 年の論文

O. Bergman, "Nonrelativistic field theoretic scale anomaly," *Phys. Rev.* **D46** (1992) 5474-5478 [[INSPIRE](#)]

で示されています。

- 節1.1.2 で使った Lippmann-Schwinger 方程式については、Bernard Lippmann と Julian Schwinger の原論文

B. A. Lippmann and J. Schwinger, "Variational Principles for Scattering Processes. I," *Phys. Rev.* **79** (1950) 469-480 [[INSPIRE](#)]

を読むと良いでしょう。量子力学の散乱理論を教科書できちんと学びたい人は少し古いですが Arno Bohm の教科書 "Quantum Mechanics: Foundations and Applications" をお勧めします。Steven Weinberg の教科書 "Lectures on Quantum Mechanics" も良いです。

- 節1.2.3 で出て来た次元転化の概念は、Sidney Coleman と Erick Weinberg が 1973 年に発表した Coleman-Weinberg 有効ポテンシャルで有名な論文

S. Coleman and E. Weinberg, "Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking," *Phys. Rev.* **D7** (1973) 1888-1910 [[INSPIRE](#)]

で初めて導入されました。この論文は非常に素晴らしいので、一読を薦めます。

- 最後に、2 次元デルタ関数ポテンシャルの量子力学系から繰り込み操作の雰囲気学ぶことは出来ませんが、繰り込み群を理解することは出来ません。特にスケーリング則の描像が欠落しています。繰り込み群を理解したい人は Kenneth G. Wilson の講義録

K. G. Wilson and J. B. Kogut, "The renormalization group and the ϵ expansion," *Phys. Rep.* **12** (1974) 75-199 [[INSPIRE](#)]

を熟読しましょう。

A. Green 関数の計算

束縛状態 Green 関数 G_B を導出しましょう。 G_B は次の微分方程式の解です:

$$(-\kappa^2 + \nabla_x^2) G_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \kappa) = \delta^{(D)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (A.1)$$

Fourier 変換を使うと、解は容易に次の積分で与えられることが分かります:

$$G_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \kappa) = - \int \frac{d^D \mathbf{p}}{(2\pi)^D} \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{\kappa^2 + p^2}. \quad (A.2)$$

この積分を計算していきましょう。計算の仕方は色々ありますが、ここでは所謂 Schwinger のパラメータ表示を使って計算して行くことにします。

まず次の等式が成り立つことに注意しましょう:

$$\frac{1}{\kappa^2 + p^2} = \int_0^\infty dt e^{-t(\kappa^2 + p^2)}. \quad (\text{A.3})$$

これを Schwinger のパラメータ表示と言い、非常に有用なテクニックです。\$t\$ は Schwinger の固有時間と呼ばれたりします。

式(A.3)を(A.2)に代入して、まず運動量積分を実行していきましょう:

$$\begin{aligned} G_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \kappa) &= - \int \frac{d^D \mathbf{p}}{(2\pi)^D} \int_0^\infty dt e^{-t(\kappa^2 + p^2) + i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \\ &= - \int_0^\infty dt e^{-t\kappa^2 - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{4t}} \left[\prod_{j=1}^D \int_{-\infty}^\infty \frac{dp_j}{2\pi} e^{-t(p_j - i\frac{x_j - y_j}{2t})^2} \right] \\ &= - \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{D/2}} e^{-t\kappa^2 - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{4t}} \\ &= - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa}{2\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{\frac{D}{2}-1} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{D/2}} e^{-\frac{\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{2} (s + \frac{1}{s})}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

最後の等式で変数変換 \$s = 2\kappa t/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|\$ を行いました。最後の積分は第二種変形 Bessel 関数の積分表示に他ならないので、束縛状態 Green 関数は

$$G_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \kappa) = - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\kappa}{2\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{\frac{D}{2}-1} K_{\frac{D}{2}-1}(\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \quad (\text{A.5})$$

で与えられることが分かりました。

幾つか例を上げておきましょう。1次元, 2次元, 3次元の場合は次のようになります:

$$G_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \kappa) = \begin{cases} -\frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} & \text{for } D = 1; \\ -\frac{1}{2\pi} K_0(\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) & \text{for } D = 2; \\ -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} e^{-\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} & \text{for } D = 3. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

ここで \$K_{1/2}(z) = K_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}\$ を使いました。