Intertwining Operator in Thermal CFT$_d$

大谷 聡

日本大学量子科学研究所

arXiv:1611.00763

今日の話の概要 ①

- $d(\geq 3)$ 次元の有限温度共形場理論 (CFT) の話．運動量表示 2 点函数の函数形を共形対称性から決定する．
- 先に答えを書くと，例えば (スカラープライマリー場の) 運動量表示の遅延 2 点函数は次の様になる:

$$\tilde{G}^R_\Delta(\omega, k) \propto \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\Delta - \frac{d-2}{2} - i\frac{\omega+k}{2\pi T}\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\tilde{\Delta} - \frac{d-2}{2} - i\frac{\omega+k}{2\pi T}\right)\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\Delta - \frac{d-2}{2} - i\frac{\omega-k}{2\pi T}\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\tilde{\Delta} - \frac{d-2}{2} - i\frac{\omega-k}{2\pi T}\right)\right)}, \qquad \tilde{\Delta} = d - \Delta$$

$$\begin{cases} \Delta : & \text{プライマリー場のスケーリング次元} \\ \omega \ \& \ k : & \text{振動数} \ \& \ \text{空間運動量の大きさ} \\ T : & \text{温度} \end{cases}$$

- こういう一見複雑な函数が実は対称性だけで決定できる，という話をします．

ちなみに，有限温度 CFT の運動量表示の遅延 2 点函数が分かると，その 1 位の極の位置から双対な AdS ブラックホールの準固有振動数 ω が分かる．
[Son–Starinets '02]

上の例だと， 1 位の極の位置は $\omega = \pm k - i2\pi T(\Delta - \frac{d-2}{2} + 2n)$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

今日の話の概要 ②

- 鍵となるのは繋(けい)絡(らく)演算子(英語で intertwining operator 或いは intertwiner) と呼ばれる演算子と，それが満たす繋絡関係式と呼ばれる演算子恒等式.
- 繋絡演算子は数学用語で，特に表現論で頻出. (但し数学では繋絡作用素と呼ぶ方が一般的.) 余り聞き慣れないかもしれないが，実は物理でも色々な所で現れる:

CFT

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}_{d-\Delta} \arrow[r, "J^{ab}_{d-\Delta}"] \arrow[d, "G_\Delta"'] & \mathcal{V}_{d-\Delta} \arrow[d, "G_\Delta"] \\ \mathcal{V}_\Delta \arrow[r, "J^{ab}_\Delta"'] & \mathcal{V}_\Delta \end{tikzcd}$$

$$J^{ab}_\Delta G_\Delta = G_\Delta J^{ab}_{d-\Delta}$$

S-Matrix Theory

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_{\text{out}} \arrow[r, "A_{\text{out}}"] \arrow[d, "S"'] & \mathcal{H}_{\text{out}} \arrow[d, "S"] \\ \mathcal{H}_{\text{in}} \arrow[r, "A_{\text{in}}"'] & \mathcal{H}_{\text{in}} \end{tikzcd}$$

$$A_{\text{in}} S = S A_{\text{out}}$$

SUSY QM

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_{\text{B}} \arrow[r, "H_{\text{B}}"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{H}_{\text{B}} \arrow[d, "Q"] \\ \mathcal{H}_{\text{F}} \arrow[r, "H_{\text{F}}"'] & \mathcal{H}_{\text{F}} \end{tikzcd}$$

$$H_{\text{F}} Q = Q H_{\text{B}}$$

- 他には可積分系で登場する R 行列 (Yang–Baxter operator とも呼ばれる) も繋絡演算子. [cf. Jimbo–Miwa ’95]

今日の話の概要 ③

- 今日の話で重要なのは，この繋絡関係式 (演算子恒等式) の行列要素:

$$\langle p|J^{ab}_{\Delta}G_{\Delta}|q\rangle = \langle p|G_{\Delta}J^{ab}_{d-\Delta}|q\rangle$$

ここで，$|p\rangle \in \mathcal{V}_{\Delta}$, $|q\rangle \in \mathcal{V}_{d-\Delta}$ は表現空間 $\mathcal{V}_{\Delta}$, $\mathcal{V}_{d-\Delta}$ の適当な基底ベクトル．

- 零温度では，上の等式は運動量表示 2 点函数に対する共形 Ward–Takahashi 恒等式 (相関函数に対する微分方程式) に帰着する．

- 有限温度では，上の等式は運動量表示 2 点函数に対する漸化式を与える．この漸化式を解くことで有限温度の 2 点函数が求まる．これが今日の主題．

ちなみに，S 行列理論での上の等式の対応物は

$$\langle \mathrm{in}|A_{\mathrm{in}}S|\mathrm{out}\rangle = \langle \mathrm{in}|SA_{\mathrm{out}}|\mathrm{out}\rangle, \quad |\mathrm{in}\rangle \in \mathcal{H}_{\mathrm{in}}, \quad |\mathrm{out}\rangle \in \mathcal{H}_{\mathrm{out}}$$

ある種の厳密に解ける量子力学模型に対しては，この等式から S 行列要素 (反射・透過係数) に対する漸化式が得られる． **[Kerimov '98]**

また，漸近平坦な時空上の場の理論に対しては，この等式と BMS 対称性から Weinberg の soft graviton theorem が得られる． **[He–Lysov–Mitra–Strominger '14]**

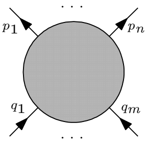
今日の話の予定

1. 研究の背景
2. 有限温度 CFT の作り方
3. 有限温度 2 点函数の漸化式
4. まとめと今後の展望

研究の背景 ①

- 一般に，相関函数は場の量子論 (QFT) で最も基本的な量.
- 例えば質量ギャップがある普通の QFT の場合，運動量表示の (時間順序積) 相関函数が分かれば外線をもぎ取ることで S 行列要素が得られる (LSZ の簡約公式):

$$\langle \boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n | (S-1) | \boldsymbol{q}_1 \cdots \boldsymbol{q}_m \rangle =$$



$$= \left[\prod_{j=1}^{n} \frac{-i\sqrt{Z_j}}{p_j^2 + M_j^2 - i\epsilon} \right]^{-1} \left[\prod_{j=1}^{m} \frac{-i\sqrt{Z_j}}{q_j^2 + M_j^2 - i\epsilon} \right]^{-1} \tilde{G}(-p_1, \cdots, -p_n; q_1, \cdots, q_m)$$

- ちなみに，共形場理論では S 行列は定義できない (と普通言われている). しかしながら，相関函数は依然として重要な物理量を与える.
- 以下，まず共形変換から簡単におさらいする.

研究の背景 ②

- まずは Poincaré 変換から．これは 2 点間の距離を不変に保つ座標変換 $x \mapsto x'$:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x'_1 - x'_2)^2$$

勿論これは Minkowski 時空の因果構造 (即ち 2 乗距離の符号) も不変に保つ．

- 一方，共形変換は光的距離のみを不変に保つ座標変換 $x \mapsto x'$:

$$(x_1 - x_2)^2 = 0 = (x'_1 - x'_2)^2$$

(普通の共形変換の定義とは違いますが，最終的にはこれはこれで正しい．)
この様な座標変換は次の 3 つからなる:

(Poincaré 変換) $\quad x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$

(スケール変換) $\quad x^\mu \mapsto x'^\mu = \mathrm{e}^{-\varphi} x^\mu$

(特殊共形変換) $\quad x^\mu \mapsto x'^\mu = \dfrac{x^\mu - b^\mu (x \cdot x)}{1 - 2(b \cdot x) + (b \cdot b)(x \cdot x)}$

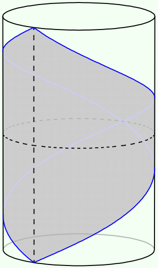
- この様な共形変換の下で不変な QFT は，繰り込み群の固定点で実現される (と広く信じられているが完全な証明はまだ無い)． [cf. Nakayama '13]

研究の背景 ③

ちなみに，有限の特殊共形変換は Minkowski 時空の因果構造を保たない．(要するに空間的距離 $(x_1 - x_2)^2 > 0$ を時間的距離 $(x'_1 - x'_2)^2 < 0$ に変えたりする．この事実は 1970 年代まで共形場理論の大問題だった．)

しかし，今日の話では無限小変換しか考えないので，この点は気にしない．実際，殆どの人は気にしていない (と言うか認識していない ?!).

ついでに言うと，因果構造を保つ為にはまず Minkowski 時空を共形コンパクト化し，更にその被覆空間を考えねばならない．[cf. Todorov–Mintchev–Petkova '79]
最終的に得られる時空は $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}$ で，これは AdS$_{d+1}$ の境界と同じ．



$d = 2$ の場合の被覆空間 $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$．灰色の領域が 2 次元 Minkowski 時空を表す．AdS$_3$ は中身の詰まった円筒．

研究の背景 ④

- さて，d 次元では共形変換の集まりは群 $SO(2,d)$ を成す．

正確には d が偶数の時 $SO_0(2,d)/\mathbb{Z}_2$ で奇数の時 $SO_0(2,d)$．しかし，今日の話では無限小変換しか考えないので $\mathbb{Z}_2$ 同一視はどうでもいい．

- この $SO(2,d)$ 共形対称性は相関関数の構造に強い制限を与える．
- 実際，CFT では２点と３点の相関関数までなら任意次元で $SO(2,d)$ 共形対称性からその函数形が (幾つかの数因子を除いて) 完全に決定できる． [Polyakov '70]
- 例１：スカラープライマリー場の２点函数

$$\langle 0|\mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1)\mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2)|0\rangle \propto \delta_{\Delta_1\Delta_2}\frac{1}{[(x_1-x_2)^2]^{\Delta_1}}$$

- 例２：スカラープライマリー場の３点函数

$$\langle 0|\mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1)\mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2)\mathcal{O}_{\Delta_3}(x_3)|0\rangle \propto \frac{1}{[(x_1-x_2)^2]^{\frac{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}{2}}[(x_2-x_3)^2]^{\frac{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1}{2}}[(x_3-x_1)^2]^{\frac{\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2}{2}}}$$

研究の背景 ⑤

- 「共形対称性から相関函数の函数形を決める」という方法は，座標表示の相関函数に対して非常にうまくいく．
- 一方，CFT で実際に物理量を計算しようとした場合，往々にして運動量表示の相関函数が必要になる．(例：スペクトル密度)
- 原理的には，運動量表示の相関函数が欲しければ，単に座標表示の相関函数を Fourier 変換すれば良いだけ．
- しかし，この Fourier 変換が曲者．実際に実行するのは容易では無い．特に有限温度の場合に困難を極める．
- 実際，良く分かっている２次元 CFT でさえ，有限温度の場合の運動量表示３点函数が計算されたのは 2014 年．[Becker-Cabrera-Su '14]
- ３次元以上の有限温度 CFT に至っては，(私の知る限り) ２点函数すらその運動量表示は分かっていなかった．(今日の話と関係無い AdS/CFT の計算はある．)
- そこで，面倒な Fourier 変換を経由せずに，共形対称性から直接その函数形を決定する方法が欲しい．実際これは可能で，その方法を紹介するのが今日の話の目的．

研究の背景 ⑥

- 本題に入る前にここで有限温度 CFT についてよくある疑問について答えておく．

疑問 ①

CFT を有限温度にしたければ，Euclid 化して虚時間方向を $\mathbb{S}^1$ コンパクト化すれば良かろう．一体何がそんなに難しいのか？

答え

勿論それでも有限温度の理論は得られる．しかし Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ から円筒 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{d-1}$ への共形変換は，３次元以上では存在しない．２次元の場合だけ，たまたま存在する．

つまり，３次元以上では，$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{d-1}$ 上の有限温度 CFT の相関函数は $\mathbb{R}^d$ 上の零温度 CFT の相関函数の共形変換では得られない．

(共形変換ではなく虚時間方向に $\mathbb{Z}$ で同一視を入れて，同一視した物は全て足し上げれば $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{d-1}$ 上の相関函数が得られるが，今日は考えない．)

任意次元の CFT を有限温度にするにはUnruh 効果を使う．このやり方では Euclid 化する必要は無いし，実際今日の話では Euclid 化はしない．

疑問 ②

有限温度では温度というスケールが入るのだから，明らかにスケール不変性が破れる．共形対称性から有限温度の相関函数が決定できる訳無かろう．

答え

一般にはそうかもしれないが，Unruh 効果を使って熱平衡化した有限温度 CFT の場合は $SO(2,d)$ 対称性から相関函数が決定できる．

そして，運動量表示の 2 点函数は $SO(2,d)$ の表現論だけでその函数形が決定できる．これが今日の話．

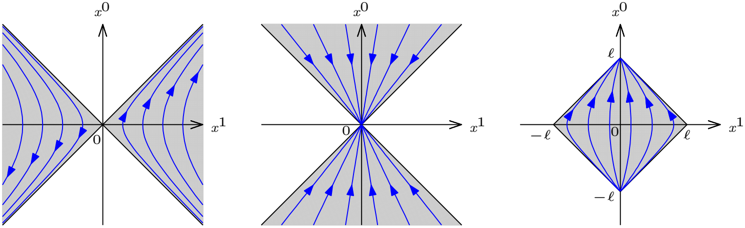
- 以下，まず Unruh 効果を使った有限温度 CFT の作り方を説明する．

今日の話の予定

1. 研究の背景
2. 有限温度 CFT の作り方
3. 有限温度 2 点函数の漸化式
4. まとめと今後の展望

有限温度 CFT の作り方：この節の概要

- Unruh 効果を使えば CFT は簡単に，且つ幾何学的に熱平衡化できる．
- 作り方は簡単．まず零温度 CFT を下の灰色の領域のどれか 1 つに制限する．(つまり灰色の領域しかカバーしない座標系に移る．)
- 次に時間軸を図の青色の曲線に一致させる．(この青色の曲線は 1 径数部分群 $SO(1,1) \subset SO(2,d)$ に付随した共形 Killing ベクトル場．)
- 基本的にはこれだけ．これだけで CFT の相関函数はKubo–Martin–Schwinger の熱平衡条件を満たす．(但し代償として，こうやって簡単に得られる有限温度 CFT は双曲空間 $\mathbb{H}^1 \times \mathbb{H}^{d-1}$ 上の理論になってしまう．)



Rindler の楔形領域　　前方・後方光円錐　　ダイアモンド (2 重光円錐)

Unruh 効果の基礎 ①

- Unruh 効果で考察するのは等加速度運動している観測者．観測者の世界線 $x^\mu = x^\mu(\tau)$ が次の条件を満たす時，相対論的な等加速度運動をしていると呼ぶ:

$$-(\ddot{x}^0(\tau))^2 + (\ddot{\boldsymbol{x}}(\tau))^2 = a^2$$

ここで，a は定数の加速度，τ は固有時間，ドットは τ 微分．

- 等加速度運動は本質的に 2 次元平面内の運動．(x^0, x^1)-平面内の等加速度運動を与える解 $x^\mu(\tau)$ は例えば

$$x^0(\tau) = \frac{1}{a}\sinh(a\tau), \quad x^1(\tau) = \frac{1}{a}\cosh(a\tau), \quad \boldsymbol{x}_\perp(\tau) = \mathbf{0}$$

これは点 $(x^0, x^1, \boldsymbol{x}_\perp) = (0, \frac{1}{a}, \mathbf{0})$ を Lorentz boost して得られる事に注意:

$$\begin{pmatrix} x^0(\tau) \\ x^1(\tau) \\ \boldsymbol{x}_\perp(\tau) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cosh(a\tau) & \sinh(a\tau) & \\ \sinh(a\tau) & \cosh(a\tau) & \\ & & \mathbf{1}_{d-2} \end{pmatrix}}_{\Lambda(a\tau)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/a \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

- 固有時間の並進 $\tau \mapsto \tau + c$ が Lorentz boost で与えられる事にも注意しよう:

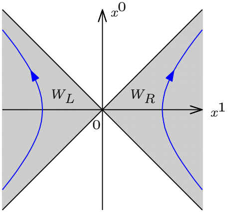
$$x^\mu(\tau + c) = \Lambda(ac)^\mu{}_\nu x^\nu(\tau), \quad \Lambda \in SO(1,1)$$

Unruh 効果の基礎 ②

- さて，(x^0, x^1)-平面内を等加速度運動している観測者は，次の領域内しか運動できない:

$$W_R = \{x^\mu \in \mathbb{R}^{1,d-1} : x^1 \pm x^0 > 0\}$$
$$W_L = \{x^\mu \in \mathbb{R}^{1,d-1} : x^1 \pm x^0 < 0\}$$

楔形領域 W_R, W_L をそれぞれ right Rindler wedge, left Rindler wedge と呼ぶ．



- 実は，等加速度運動している観測者にとっては，静止系の観測者にとっての真空 $|0\rangle$ が 熱浴に見える．これが Unruh 効果．[Unruh '76]

- Unruh 効果は相対論的場の量子論の現象．しかし，雰囲気だけなら量子力学の調和振動子のおもちゃで理解できる．

簡単なおもちゃの例 (雰囲気だけの話)

- 振動数 ω の調和振動子を考えよう．静止系にいる観測者にとっては，粒子数演算子 $N = a^\dagger a$ の真空期待値は勿論ゼロ:

$$\langle 0|a^\dagger a|0\rangle = 0$$

しかし，加速度 a で (W_R 内を) 等加速度運動している観測者にとっては，この真空期待値が温度 $T = a/2\pi$ のBose–Einstein 分布になる:

$$\langle 0|b_R^\dagger b_R|0\rangle = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \qquad \text{但し} \qquad \beta = \frac{1}{T} = \frac{2\pi}{a}$$

ここで，$b_R^\dagger$, b_R は W_R 内を等加速度運動している観測者にとっての生成・消滅演算子．これが真空が熱浴に見えるという事の意味．

- 一般に，W_R 内を等加速度運動している観測者にとっては，任意の演算子 $\mathcal{O}_R = f(b_R, b_R^\dagger)$ (f: 任意函数) の真空期待値が統計平均になる:

$$\langle 0|\mathcal{O}_R|0\rangle = \frac{1}{Z}\mathrm{Tr}(e^{-\beta H_R}\mathcal{O}_R) \quad \text{但し} \quad Z = \mathrm{Tr}(e^{-\beta H_R}) \quad \& \quad H_R = \omega b_R^\dagger b_R$$

何故こんなことが起こるのか，からくりは真空の量子もつれにある．

Unruh 効果の基礎 ④

自由場の量子論を使ってちゃんと計算すると，静止系の真空 $|0\rangle$ は実は量子もつれ状態である事が示せる．一番簡単な2次元の場合は次の様になる:

$$|0\rangle = \prod_{\omega} \left[\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-\beta\omega}} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}n\beta\omega} |n_\omega\rangle_R \otimes |n_\omega\rangle_L \right]$$

ここで $|n_\omega\rangle_R = \frac{1}{\sqrt{n!}}[b_R^\dagger(\omega)]^n|0\rangle_R$ と $|n_\omega\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{n!}}[b_L^\dagger(\omega)]^n|0\rangle_L$ はそれぞれ W_R と W_L 内で等加速度運動している観測者にとっての n 粒子状態.

ちなみに，この量子もつれ状態は次の方程式 (これは自由場の量子論をちゃんとやれば出て来る) の解として得られる:

$$\left[b_R(\omega) - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta\omega} b_L^\dagger(\omega) \right] |0\rangle = 0$$

$$\left[b_L(\omega) - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\beta\omega} b_R^\dagger(\omega) \right] |0\rangle = 0$$

ついでに言うと，この方程式は自由場 $\phi(x)$ に対するBisognano–Wichmann の定理 (後述) と等価 [cf. Takagi '86, Chap. 5]:

$$J\mathrm{e}^{-\pi K}\phi(x)|0\rangle = \phi^\dagger(x)|0\rangle, \quad J = R\Theta$$

K : Lorentz boost 生成子，$R : (x^0, x^1, \boldsymbol{x}_\perp) \mapsto (x^0, x^1, -\boldsymbol{x}_\perp)$，$\Theta$: CPT 共軛

Unruh 効果の基礎 ⑤

- さて，T を Unruh 温度と呼ぶが，その典型的な値は非常に小さい:

$$T = \frac{a}{2\pi} = \frac{\hbar a}{2\pi c k_B} \sim 4 \times 10^{-21}\mathrm{K}\left(\frac{a}{\mathrm{m/s^2}}\right)$$

- 実際，Unruh 効果が発表されて 40 年経つが，実験的には未だ観測されていない．(Unruh 効果の直接観測を目指す ELI プロジェクトが欧州で計画中．)
[https://eli-laser.eu/science-applications/high-fields-physics/]

- しかし理論的には完全に確立．即ち，代数的場の量子論 (作用素環) の枠組みで公理論的証明が存在．(実際は Unruh 効果を動機とせず数学の方が先に発展した．)
  - Kubo–Martin–Schwinger の熱平衡条件 (KMS 条件) [Haag–Hugenholtz–Winnink '67]
    熱平衡系の満たすべき条件を，相関函数の満たすべき解析的条件として抽出した．
  - Tomita–Takesaki のモジュラー理論 [Tomita '67] [Takesaki '70]
    冨田が作った理論を竹崎が精密化．以下の定理は全てこれに基づく．難解で有名．
  - Bisognano–Wichmann の定理 [Bisognano–Wichmann '75 & '76]
    Unruh 効果の数学的証明．金字塔．これを使った Sewell の定理 [Sewell '82] も重要．
  - Buchholz の定理 [Buchholz '78]・Hislop–Longo の定理 [Hislop–Longo '82]
    Bisognano–Wichmann の定理のスケール不変な理論及び CFT への拡張．

- これらは CPT 定理やスピンと統計の定理と同じく，適当な公理系の下で厳密に成り立つ強力な定理．(この辺は Haag の教科書 [Haag '96] の第 5 章が詳しい．)

有限温度 CFT の作り方 ①

- 以上，Unruh 効果の物理的・数学的背景を見てきたが，単に有限温度 CFT の相関函数が欲しいだけなら，量子もつれだとか，Bisognano–Wichmann の定理だとか，そんな事は知らなくても機械的に出来る．
- 以下の話で重要なのは 1 径数部分群 $SO(1,1) \subset SO(2,d)$．
- この 1 径数部分群 $SO(1,1)$ が時間並進を与えるような座標系をまず見つける．次にその座標系へ座標変換 (実は共形変換) すれば，零温度 CFT の相関函数は自動的に KMS 条件を満たす．即ち有限温度の相関函数になる．これを見て行く．

$SO(1,1)$ が重要な直感的理由

Euclid 化した有限温度 QFT では虚時間方向は $\mathbb{S}^1$ コンパクト化される，という事は既に良く分かっている．

$\mathbb{S}^1$ に自然に作用するのは $SO(2)$ だから，$SO(2)$ を Wick 逆回転した $SO(1,1)$ が時間並進を与える QFT なら有限温度になるだろう，と期待するのは自然．

	Euclidean $\xrightarrow{\text{Wick 逆回転}}$	Lorentzian
時間並進群	$SO(2)$	$SO(1,1)$
振動数	離散スペクトラム	連続スペクトラム
幾何	$\mathbb{S}^1$	$\mathbb{H}^1$

有限温度 CFT の作り方 ②

- さて，$SO(1,1)$ 変換の実現の仕方だが，普通の Poincaré 不変な QFT では，これはLorentz boostしか無い:

$$SO(1,1): x^\mu \mapsto x^\mu(\theta) = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \qquad \text{但し} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & \\ \sinh\theta & \cosh\theta & \\ & & \mathbf{1}_{d-2} \end{pmatrix}$$

この Lorentz boost が時間並進を与えるような座標系が所謂 Rindler 座標系で，物理的には等加速度運動している観測者が静止して見える座標系．

- しかし，スケール不変な QFT ではスケール変換としても実現できる:

$$SO(1,1): x^\mu \mapsto x^\mu(\theta) = \mathrm{e}^{-\theta} x^\mu$$

- そして，CFT では更に次の座標変換 (特殊共形変換 + スケール変換 + 並進) としても実現できる:

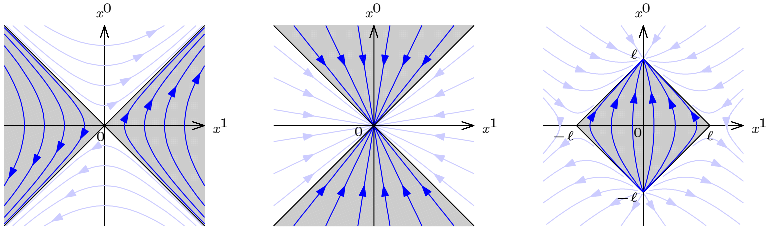
$$SO(1,1): x^\mu \mapsto x^\mu(\theta) = \mathrm{e}^{-\varphi} \frac{x^\mu - b^\mu (x\cdot x)}{1 - 2(b\cdot x) + (b\cdot b)(x\cdot x)} + a^\mu$$

$$a^\mu = (\ell \tanh(\tfrac{\theta}{2}), 0, \cdots, 0), \quad b^\mu = (\tfrac{1}{\ell}\tanh(\tfrac{\theta}{2}), 0, \cdots, 0), \quad \varphi = 2\log\cosh(\tfrac{\theta}{2})$$

- 下 2 つが本当に $SO(1,1)$ 変換だと言うのを見る為には，d 次元 Minkowski 時空を $(d+2)$ 次元空間 $\mathbb{R}^{2,d}$ に埋め込む embedding space formalism [Dirac '36] を使うのが最も簡明．しかし今日はこの話はしません．

有限温度 CFT の作り方 ③

- 前頁の $SO(1,1)$ 変換のパラメータ θ と初期値 $x^\mu(0) = x^\mu$ を変えていくと，次の 3 つのベクトル場 (共形 Killing ベクトル場) のフローが得られる:



最終的には θ を (比例係数を除いて) 時間 t と同一視する．比例係数が温度 T (の 2π 倍) を与える．

- 以下の話で重要なのは図の灰色の領域．これらは次の様に与えられる:
  - Rindler の楔形領域

$$W_{R/L} = \{x^\mu : \pm x^1 > |x^0|\}$$

  - 前方・後方光円錐

$$V_\pm = \{x^\mu : (x^0)^2 > \boldsymbol{x}^2 \quad \& \quad \pm x^0 > 0\}$$

  - ダイアモンド (2 重光円錐)

$$D = \{x^\mu : |x^0| + |\boldsymbol{x}| < \ell\}$$

有限温度 CFT の作り方 ④

- $SO(1,1)$ が時間並進群となる座標系 (t, H^μ) とその座標系での計量は以下の通り:
(但し $H^\mu \in \mathbb{H}^{d-1}$ は $-(H^0)^2 + (H^1)^2 + \cdots + (H^{d-1})^2 = -1,\ H^0 \geq 1$ を満たす)
  - Rindler の楔形領域

$$(\text{座標系})\quad x^0 = \pm\ell\frac{\sinh(t/\ell)}{H^0 + H^1}, \quad x^1 = \pm\ell\frac{\cosh(t/\ell)}{H^0 + H^1}, \quad x^i = \frac{H^i}{H^0 + H^1}$$

$$(\text{計量})\quad ds^2_{W_{R/L}} = \frac{-dt^2 + \ell^2 dH \cdot dH}{(H^0 + H^1)^2}$$

  - 前方・後方光円錐

$$(\text{座標系})\quad x^\mu = \pm\ell e^{-t/\ell} H^\mu$$

$$(\text{計量})\quad ds^2_{V_\pm} = e^{-2t/\ell}\left(-dt^2 + \ell^2 dH \cdot dH\right)$$

  - ダイアモンド (2 重光円錐)

$$(\text{座標系})\quad x^0 = \ell\frac{\sinh(t/\ell)}{\cosh(t/\ell) + H^0}, \quad x^i = \ell\frac{H^i}{\cosh(t/\ell) + H^0}$$

$$(\text{計量})\quad ds^2_D = \frac{-dt^2 + \ell^2 dH \cdot dH}{(\cosh(t/\ell) + H^0)^2}$$

- これらの領域は全て双曲空間 $\mathbb{H}^1 \times \mathbb{H}^{d-1}$ に共形同値. 即ち, 上で与えた座標系は $\mathbb{H}^1 \times \mathbb{H}^{d-1} \ni (t, H^\mu)$ から $W_{R/L}$, $V_\pm$, D への共形変換を与える.

有限温度 CFT の作り方 ⑤

- $\mathbb{H}^1 \times \mathbb{H}^{d-1}$ から $W_{R/L}$, $V_\pm$, D への共形変換が分かったので，$\mathbb{H}^1 \times \mathbb{H}^{d-1}$ 上の相関函数は簡単に計算出来る．
- 例えばスカラープライマリー場の 2 点函数は ($i\epsilon$ 処方を除いて) 次の様に決まる:

$$\left[\frac{2\pi^2 T^2}{-\cosh(2\pi T(t_1 - t_2)) - H_1 \cdot H_2}\right]^\Delta, \quad T = \frac{1}{2\pi\ell}$$

- 上の 2 点函数は (適当な $i\epsilon$ 処方の下で) KMS 条件を満たす．即ち確かに有限温度 CFT の相関函数になっている．(但し今日は証明はしません．)

KMS 条件は普通の有限自由度 (体積 V 一定など) の統計力学が持つ性質の内，熱力学極限 ($V \to \infty$ など) を取った後でも生き残る性質を抽出したもので，QFT などの無限自由度系の熱平衡を定義するもの．

KMS 条件は 1960 年代に Haag, Hugenholtz, Winnink らによって整備されたが，標準的な QFT の教科書 (Peskin–Schroeder や Weinberg) には載っていないので知らない人も多いかもしれない．

最後に KMS 条件の簡単な説明をしてこの節を終わろう．

KMS 条件 ①

- KMS 条件とは熱平衡系の相関函数が満たすべき**複素 t 平面での解析的条件**．対象とするのは正・負振動数 Wightman 函数と呼ばれる 2 点函数:

$$G^{+}(t) = \langle \mathcal{O}(t)\mathcal{O}(0) \rangle$$
$$G^{-}(t) = \langle \mathcal{O}(0)\mathcal{O}(t) \rangle$$

  ここで，期待値 $\langle * \rangle$ は統計力学の場合は統計平均，今日の CFT の場合は (静止系の真空 $|0\rangle$ についての) 真空期待値を表す．空間座標は重要でないので省略した．

- さて，KMS 条件は次の 2 つの条件から成る **[Haag–Hugenholtz–Winnink ’67]**:

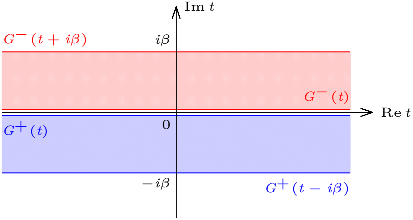
1. 解析性:

   $G^{+}(t)$ は $-\beta < \mathrm{Im}\, t < 0$ で解析的

   $G^{-}(t)$ は $0 < \mathrm{Im}\, t < +\beta$ で解析的

2. 境界条件:

$$G^{+}(t) = G^{-}(t + i\beta)$$
$$G^{-}(t) = G^{+}(t - i\beta) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$



- 統計力学の場合は上の条件が簡単に導出できる．これを見てこの節を終わる．

KMS 条件 ②

- 解析性について．エネルギー固有状態 $\{|E\rangle\}$ の完全系と $\mathcal{O}(t)=\mathrm{e}^{itH}\mathcal{O}(0)\mathrm{e}^{-itH}$ を使うと，統計平均 $G^+(t)=\langle\mathcal{O}(t)\mathcal{O}(0)\rangle$ は次の様に級数展開される:

$$\begin{aligned}
G^+(t) &= \frac{1}{Z}\mathrm{Tr}\left(\mathrm{e}^{-\beta H}\mathcal{O}(t)\mathcal{O}(0)\right) \\
&= \frac{1}{Z}\sum_{E,E'>0}\langle E|\mathrm{e}^{-\beta H}\mathrm{e}^{itH}\mathcal{O}(0)\mathrm{e}^{-itH}|E'\rangle\langle E'|\mathcal{O}(0)|E\rangle \\
&= \frac{1}{Z}\sum_{E,E'>0}\mathrm{e}^{iE(t+i\beta)-iE't}\left|\langle E'|\mathcal{O}(0)|E\rangle\right|^2
\end{aligned}$$

但し，$\mathcal{O}$ は Hermitian 演算子，H は正定値を仮定した．この級数が収束するのは t が次の条件を満たす時:

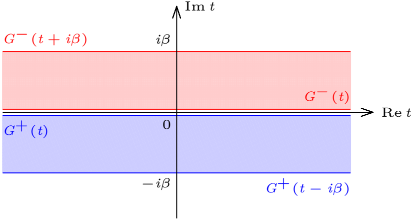
$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}\,(t+i\beta)>0 \quad \& \quad \mathrm{Im}\,t<0 \\
&\Rightarrow \quad -\beta<\mathrm{Im}\,t<0
\end{aligned}$$

t がこの帯状領域にある時，$G^+(t)$ は収束冪級数で書ける．即ち解析的になる．同様にして $G^-(t)=\langle\mathcal{O}(0)\mathcal{O}(t)\rangle$ は $0<\mathrm{Im}\,t<\beta$ で解析的になる事が言える．

- 境界条件について. $\mathrm{e}^{-\beta H}\mathcal{O}(t)\mathrm{e}^{\beta H} = \mathcal{O}(t+i\beta)$ とトレースの巡回性を使うと，統計平均 $G^+(t) = \langle \mathcal{O}(t)\mathcal{O}(0)\rangle$ は次の様に書き換えられる:

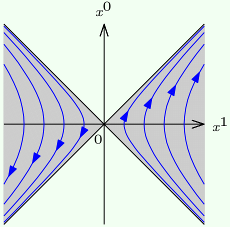
$$\begin{aligned} G^+(t) &= \frac{1}{Z}\mathrm{Tr}\left(\mathrm{e}^{-\beta H}\mathcal{O}(t)\mathcal{O}(0)\right) \\ &= \frac{1}{Z}\mathrm{Tr}\left(\mathcal{O}(t+i\beta)\mathrm{e}^{-\beta H}\mathcal{O}(0)\right) \\ &= \frac{1}{Z}\mathrm{Tr}\left(\mathrm{e}^{-\beta H}\mathcal{O}(0)\mathcal{O}(t+i\beta)\right) \\ &= G^-(t+i\beta) \end{aligned}$$

t が実数の時，これは解析的領域の端の値での等式を与える．即ち境界条件を与える．同様にして $G^-(t) = G^+(t-i\beta)$ が言える．

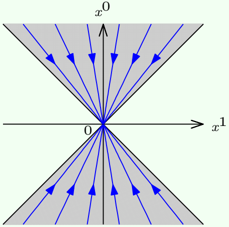


この節のまとめ

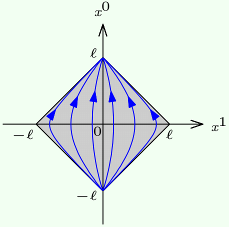
大雑把に言うと，相対論的 QFT は 1 径数部分群 $SO(1,1)$ のパラメータを (比例係数を除いて) 時間 t と同一視することで熱平衡化される．比例係数が $2\pi T$ を与える．



Poincaré 不変な QFT を熱平衡化



スケール不変な QFT を熱平衡化



CFT を熱平衡化

今日の話の予定

1. 研究の背景
2. 有限温度 CFT の作り方
3. 有限温度 2 点函数の漸化式
4. まとめと今後の展望

2 点函数の Fourier 変換

- 前節で有限温度 CFT の座標表示 2 点函数を求めたが，欲しいのは運動量表示 2 点函数．これは原理的には $\mathbb{H}^1 \times \mathbb{H}^{d-1}$ 上の Fourier 変換 (調和解析) で得られる．

- しかし，この Fourier 変換が困難．例えば正・負振動数 Wightman 函数の運動量表示を求めるには，次の積分を計算しないといけない:

$$\sqrt{\frac{4k\sinh(\pi k)}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_0^{\infty} \frac{dx'}{x'^{\,d-1}} \int d^{d-2}\boldsymbol{x}'_\perp$$
$$\times \left[\frac{1/2}{-\cosh(t - t' \mp i\epsilon) + \frac{x^2 + x'^2 + |\boldsymbol{x}_\perp - \boldsymbol{x}'_\perp|^2}{2xx'}} \right]^{\Delta} x'^{\,\frac{d-2}{2}} K_{ik}(|\boldsymbol{p}_\perp| x') \mathrm{e}^{-i\omega t' + i\boldsymbol{p}_\perp \cdot \boldsymbol{x}'_\perp}$$

(但し，簡単の為 $2\pi T = 1$ とした．)

- この積分は頑張れば計算出来ます．(私は結局半年ぐらい掛かりました．) しかし，繋絡演算子(と多少の guesswork) を使えばより簡潔に共形対称性から函数形が決定できる．これをやって今日の話を終えよう．

- 以下，まず繋絡演算子を (証明無しに) 簡単に説明する．これは数学の表現論の話で，どうしても抽象的になってしまいます．

繋絡演算子と繋絡関係式 ①

- 共形代数 $\mathfrak{so}(2,d)$ の表現は 2 次の Casimir 演算子と互いに交換する演算子の固有値の組で分類される．スカラー表現に対しては，Casimir 演算子の固有値は

$$C_2[\mathfrak{so}(2,d)] = \Delta(\Delta - d)$$

これは入れ替え $\Delta \leftrightarrow d-\Delta$ の下で不変．即ち，Δ で指定される表現と $d-\Delta$ で指定される表現は同じ (同値表現).

- 同値表現の表現空間の間の 1 対 1 写像が繋絡演算子 $G_\Delta : \mathcal{V}_{d-\Delta} \to \mathcal{V}_\Delta$．これは次の可換図 (commutative diagram) と演算子恒等式 (繋絡関係式) を満たす:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}_{d-\Delta} \arrow[r, "J^{ab}_{d-\Delta}"] \arrow[d, "G_\Delta"'] & \mathcal{V}_{d-\Delta} \arrow[d, "G_\Delta"] \\ \mathcal{V}_\Delta \arrow[r, "J^{ab}_\Delta"'] & \mathcal{V}_\Delta \end{tikzcd} \qquad J^{ab}_\Delta G_\Delta = G_\Delta J^{ab}_{d-\Delta}$$

ここで，J^{ab}_α は表現空間 $\mathcal{V}_\alpha$ ($\alpha \in \{\Delta, d-\Delta\}$) に作用する $SO(2,d)$ の生成子．例えば微分演算子による表現 (微分表現) は次の様になる:

$$J^{ab}_\alpha = i\left(k^{\mu ab}\partial_\mu + \frac{\alpha}{d}\partial_\mu k^{\mu ab}\right), \quad \alpha \in \{\Delta, d-\Delta\}$$

$k^{\mu ab} = -k^{\mu ba}$ は共形 Killing ベクトル．$a, b \in \{0, \cdots, d+1\}$ は $SO(2,d)$ の添字．

繋絡演算子と繋絡関係式 ②

- 非常に乱暴に言うと，繋絡演算子 G_Δ とは CFT の 2 点函数のこと．
- より正確には，繋絡演算子 G_Δ とは核 (kernel) が座標表示 2 点函数で与えられる積分変換として定義される:

$$
\begin{array}{cccccc}
G_\Delta : & \mathcal{V}_{d-\Delta} & \to & \mathcal{V}_\Delta & & \\
& \Cup & & \Cup & & \\
& f_{d-\Delta}(x) & \mapsto & (G_\Delta f_{d-\Delta})(x) & := & \int d^d y\, G_\Delta(x,y) f_{d-\Delta}(y)
\end{array}
$$

論理的にはまず $f_{d-\Delta}$ が $\mathcal{V}_{d-\Delta}$ の元だった時，上で定義した $G_\Delta f_{d-\Delta}$ が確かに $\mathcal{V}_\Delta$ の元になっている，という事を証明しないといけない．

また，演算子恒等式 $J^{ab}_\Delta G_\Delta = G_\Delta J^{ab}_{d-\Delta}$ が成り立つという意味は，任意の $f_{d-\Delta} \in \mathcal{V}_{d-\Delta}$ に対して等式

$$
(J^{ab}_\Delta G_\Delta f_{d-\Delta})(x) = (G_\Delta J^{ab}_{d-\Delta} f_{d-\Delta})(x)
$$

が成り立つという意味．ここでは証明は全て省略します．

- 以下ではまず零温度 CFT の場合，繋絡関係式は共形 Ward–Takahashi 恒等式と等価であることを見る．

零温度 CFT での繋絡関係式 ①

- まず表現空間 $\mathcal{V}_\alpha$ の基底として運動量演算子 P^μ_α の固有ベクトルを取ろう:

$$P^\mu_\alpha|\alpha, p\rangle = p^\mu|\alpha, p\rangle, \quad \alpha \in \{\Delta, d-\Delta\}$$

運動量演算子 P^μ_α の微分表現は，共形 Killing ベクトルを使って計算すると

$$P^\mu_\alpha = -i\partial^\mu$$

従ってその固有ベクトルは単なる平面波 $\mathrm{e}^{ip\cdot x}$. これは $\alpha \in \{\Delta, d-\Delta\}$ に依らないので，以下単に $|p\rangle \equiv |\alpha, p\rangle$ と書く.

- 前頁の繋絡演算子の定義式

$$(G_\Delta f_{d-\Delta})(x) := \int d^dy\, G_\Delta(x,y) f_{d-\Delta}(y)$$

の $f_{d-\Delta}$ として基底 $\mathrm{e}^{ip\cdot x}$ を選ぼう．すると右辺の積分は単なる Fourier 積分．並進対称性 $G_\Delta(x,y) = G_\Delta(x-y)$ を使うと次式を得る:

$$(G_\Delta f_{d-\Delta})(x) = \tilde{G}(p) f_{d-\Delta}(x)$$

これはブラケット記法を使うと次の様に書ける:

$$G_\Delta|p\rangle = \tilde{G}(p)|p\rangle$$

即ち，運動量表示 2 点函数 $\tilde{G}(p)$ は繋絡演算子 G_Δ の固有値.

零温度 CFT での繋絡関係式 ②

- 次に繋絡関係式 $J^{ab}_{\Delta} G_{\Delta} = G_{\Delta} J^{ab}_{d-\Delta}$ を $\langle p|$ と $|q\rangle$ で挟んだ行列要素

$$\langle p| J^{ab}_{\Delta} G_{\Delta} |q\rangle = \langle p| G_{\Delta} J^{ab}_{d-\Delta} |q\rangle$$

を考えよう．ここでブラケット内積の定義は

$$\langle p| J^{ab}_{\Delta} G_{\Delta} |q\rangle := \int d^d x \int d^d y \, \mathrm{e}^{-ip\cdot x} J^{ab}_{\Delta} G_{\Delta}(x, y) \mathrm{e}^{iq\cdot y}$$
$$\langle p| G_{\Delta} J^{ab}_{d-\Delta} |q\rangle := \int d^d x \int d^d y \, \mathrm{e}^{-ip\cdot x} G_{\Delta}(x, y) J^{ab}_{d-\Delta} \mathrm{e}^{iq\cdot y}$$

J^{ab}_{α} の微分表現を使って計算すると，繋絡関係式は結局次の微分方程式になる:

$$(p^{\mu}\partial^{\nu} - p^{\nu}\partial^{\mu}) \tilde{G}_{\Delta}(p) = 0 \quad \text{(Lorentz 不変性)}$$
$$(p\cdot\partial - 2\Delta + d) \tilde{G}_{\Delta}(p) = 0 \quad \text{(スケール不変性)}$$
$$[p^{\mu}\partial\cdot\partial - 2(p\cdot\partial - \Delta + d)\partial^{\mu}] \tilde{G}_{\Delta}(p) = 0 \quad \text{(特殊共形変換不変性)}$$

これは良く知られた運動量空間での共形 Ward–Takahashi 恒等式に他ならない．

- 上の微分方程式は簡単に解ける．解は ($i\epsilon$ 処方を除いて) 一意的に決まる:

$$\tilde{G}_{\Delta}(p) \propto (p\cdot p)^{\Delta - d/2}$$

有限温度 CFT での繋絡関係式 ①

- 以上，運動量演算子の固有ベクトルの基底を使うと，行列要素

$$\langle p| J^{ab}_{\Delta} G_{\Delta} |q\rangle = \langle p| G_{\Delta} J^{ab}_{d-\Delta} |q\rangle \qquad (\Diamond)$$

は普通の共形 Ward–Takahashi 恒等式になることを見た．

- しかし，有限温度 CFT では Hamiltonian (時間並進演算子) は Lorentz boost やスケール変換などの $SO(1,1)$ 生成子で与えられるので，$SO(1,1)$ 生成子の固有ベクトルの基底を使って行列要素($\Diamond$)を計算する必要がある．

- 数学的にはこれは単なる基底の取り替えに他ならない．しかしこの基底の取り替えが非自明な結果を与える．

- 残りの時間を使って，$SO(1,1)$ 生成子が対角化される基底では，行列要素($\Diamond$)は複素運動量空間での漸化式

$$\tilde{G}_{\Delta}(\omega \pm i, k \pm i) = \frac{\Delta - \frac{d-2}{2} \mp i(\omega + k)}{\tilde{\Delta} - \frac{d-2}{2} \mp i(\omega + k)} \tilde{G}_{\Delta}(\omega, k)$$

$$\tilde{G}_{\Delta}(\omega \pm i, k \mp i) = \frac{\Delta - \frac{d-2}{2} \mp i(\omega - k)}{\tilde{\Delta} - \frac{d-2}{2} \mp i(\omega - k)} \tilde{G}_{\Delta}(\omega, k) \qquad (\tilde{\Delta} = d - \Delta)$$

に帰着されることを見る．この漸化式を解くことで有限温度 CFT の運動量表示 2 点函数が求まる．以下，$2\pi T = 1$ とする．

有限温度 CFT での繋絡関係式 ②

- $SO(1,1)$ 生成子が対角化される基底を作るには色々と長い準備が必要．ここでは導出は全て省略します．答えだけ書くと，その様な基底は次の様にラベルされる:

$$|\alpha, \omega, k; \sigma\rangle, \quad \alpha \in \{\Delta, d-\Delta\}$$

$$\begin{cases} \omega : & \text{振動数 } (SO(1,1) \text{ 生成子の固有値}) \\ k : & \text{空間運動量の大きさ (部分群 } SO(1,d-1) \text{ の Casimir の固有値と関係)} \\ \sigma : & \text{その他の互いに交換する演算子の固有値 (以下では重要でない)} \end{cases}$$

- この基底に繋絡演算子 $G_\Delta : \mathcal{V}_{d-\Delta} \to \mathcal{V}_\Delta$ を作用させると，$|d-\Delta, \omega, k; \sigma\rangle$ を $|\Delta, \omega, k; \sigma\rangle$ へ写像する:

$$G_\Delta |d-\Delta, \omega, k; \sigma\rangle = \tilde{G}_\Delta(\omega, k) |\Delta, \omega, k; \sigma\rangle \qquad (\clubsuit)$$

比例係数 $\tilde{G}_\Delta(\omega, k)$ が運動量表示 2 点函数.

- $SO(2,d)$ 生成子 J^{ab}_α の適当な線形結合を取ると，ω, k を $\pm i$ だけずらす次の様な昇降演算子 $E^\pm_\alpha$ が存在する:

$$\begin{aligned} E^\pm_\alpha |\alpha, \omega, k; \sigma\rangle = &\left[\alpha - \tfrac{d-2}{2} \mp i(\omega \pm k)\right] |\alpha, \omega \pm i, k+i; \sigma\rangle \\ &+ \left[\alpha - \tfrac{d-2}{2} \mp i(\omega \mp k)\right] |\alpha, \omega \pm i, k-i; \sigma\rangle \end{aligned} \qquad (\spadesuit)$$

有限温度 CFT での繋絡関係式 ③

- 以上で必要な物は全て揃った．恒等式 $E^{\pm}_{\Delta} G_{\Delta} = G_{\Delta} E^{\pm}_{d-\Delta}$ から次が成り立つ:

$$E^{\pm}_{\Delta} G_{\Delta} |d-\Delta, \omega, k; \sigma\rangle = G_{\Delta} E^{\pm}_{d-\Delta} |d-\Delta, \omega, k; \sigma\rangle$$

- 前頁の(♣)と(♠)を使って両辺をそれぞれ計算すると，次の条件式が得られる:

$$\left[\Delta - \tfrac{d-2}{2} \mp i(\omega \mp k)\right] \tilde{G}_{\Delta}(\omega, k) = \left[\tilde{\Delta} - \tfrac{d-2}{2} \mp i(\omega \mp k)\right] \tilde{G}_{\Delta}(\omega \pm i, k - i)$$

$$\left[\Delta - \tfrac{d-2}{2} \mp i(\omega \pm k)\right] \tilde{G}_{\Delta}(\omega, k) = \left[\tilde{\Delta} - \tfrac{d-2}{2} \mp i(\omega \pm k)\right] \tilde{G}_{\Delta}(\omega \pm i, k + i)$$

これは結局次の複素運動量空間での漸化式になる:

$$\tilde{G}_{\Delta}(\omega \pm i, k \pm i) = \frac{\Delta - \frac{d-2}{2} \mp i(\omega + k)}{\tilde{\Delta} - \frac{d-2}{2} \mp i(\omega + k)} \tilde{G}_{\Delta}(\omega, k)$$

$$\tilde{G}_{\Delta}(\omega \pm i, k \mp i) = \frac{\Delta - \frac{d-2}{2} \mp i(\omega - k)}{\tilde{\Delta} - \frac{d-2}{2} \mp i(\omega - k)} \tilde{G}_{\Delta}(\omega, k) \qquad (\tilde{\Delta} = d - \Delta)$$

後はこの漸化式を解けば良いだけ．

有限温度 CFT での繋絡関係式 ④

- 前頁の漸化式を解くにはおそらく少し経験が必要．更に実は解は一意的ではない．「ミニマルな解」には次の様なものがある:

$$\tilde{G}^{A/R}_{\Delta}(\omega,k) \propto \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\Delta-\frac{d-2}{2}\pm i(\omega+k)\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\tilde{\Delta}-\frac{d-2}{2}\pm i(\omega+k)\right)\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\Delta-\frac{d-2}{2}\pm i(\omega-k)\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\tilde{\Delta}-\frac{d-2}{2}\pm i(\omega-k)\right)\right)}$$

$$\tilde{G}^{\pm}_{\Delta}(\omega,k) \propto \mathrm{e}^{\pm\pi\omega}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\Delta-\frac{d-2}{2}\pm i(\omega+k)\right)\right)\right|^2\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\Delta-\frac{d-2}{2}\pm i(\omega-k)\right)\right)\right|^2$$

- 解 $\tilde{G}^{A/R}_{\Delta}(\omega,k)$ は先進・遅延 2 点函数と解釈される．一方，解 $\tilde{G}^{\pm}_{\Delta}(\omega,k)$ は正・負振動数 Wightman 函数と解釈される．(何故この様に解釈されるべきかは技術的な議論を要するのでここでは省略．)

- 実際，$\tilde{G}^{\pm}_{\Delta}(\omega,k)$ の方は Fourier 変換の結果と一致することが (頑張れば) 示せる．($\tilde{G}^{A/R}_{\Delta}(\omega,k)$ の方の Fourier 変換は非常に困難．私は出来ませんでした．)

- 以上が Fourier 変換を経由せずに対称性 (表現論) から運動量表示 2 点函数を決定する方法です．

今日の話の予定

1. 研究の背景
2. 有限温度 CFT の作り方
3. 有限温度 2 点函数の漸化式
4. まとめと今後の展望

まとめ

- 繋絡関係式の行列要素

$$\langle p|J^{ab}_{\Delta}G_{\Delta}|q\rangle = \langle p|G_{\Delta}J^{ab}_{d-\Delta}|q\rangle$$

は零温度 CFT では良く知られた共形 Ward–Takahashi 恒等式

$$\begin{aligned}
\left(p^{\mu}\partial^{\nu} - p^{\nu}\partial^{\mu}\right)\tilde{G}_{\Delta}(p) &= 0 \\
\left(p\cdot\partial - 2\Delta + d\right)\tilde{G}_{\Delta}(p) &= 0 \\
\left[p^{\mu}\partial\cdot\partial - 2\left(p\cdot\partial - \Delta + d\right)\partial^{\mu}\right]\tilde{G}_{\Delta}(p) &= 0
\end{aligned}$$

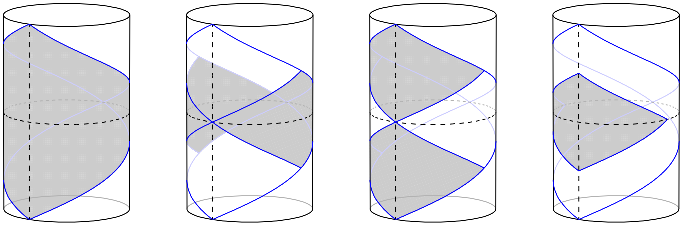
有限温度 CFT では今まで知られていなかった複素運動量空間での漸化式

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{\Delta}(\omega \pm i, k \pm i) &= \frac{\Delta - \frac{d-2}{2} \mp i(\omega + k)}{\tilde{\Delta} - \frac{d-2}{2} \mp i(\omega + k)}\tilde{G}_{\Delta}(\omega, k) \\
\tilde{G}_{\Delta}(\omega \pm i, k \mp i) &= \frac{\Delta - \frac{d-2}{2} \mp i(\omega - k)}{\tilde{\Delta} - \frac{d-2}{2} \mp i(\omega - k)}\tilde{G}_{\Delta}(\omega, k)
\end{aligned}$$

を与える．これらを解くことで運動量表示 2 点函数が求まる．

今後の展望 ①

- 一般のテンソルプライマリー場への拡張. 今回は簡単の為スカラープライマリー場の 2 点函数だけを調べた．これを一般のベクトル，スピノル，テンソルのプライマリー場へと拡張するのも重要．
- AdS/CFT への拡張. $(d+1)$ 次元 AdS 時空は適当な楔形領域を取ると，その境界は d 次元の Rindler wedges, light-cones, diamond になる (下図参照):



Poincaré wedge　Rindler wedges　Light-cones　Diamond

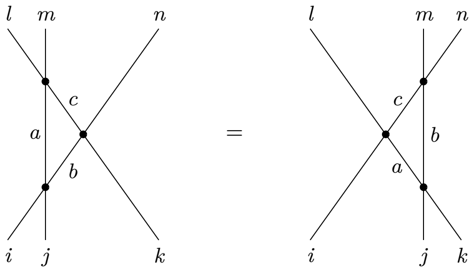
時間座標を 1 径数部分群 $SO(1,1) \subset SO(2,d)$ のパラメータと同一視すると，双対な CFT は（ブラックホールなど考えなくても）勝手に有限温度になる．

AdS/CFT での繋絡演算子は Dobrev [Dobrev '98], Aizawa–Dobrev [Aizawa–Dobrev '14] によって既に構成されているので，今日の話の AdS/CFT への拡張は容易．

今後の展望 ②

- 厳密 S 行列への応用. $(1+1)$ 次元の (非) 相対論的 QFT では S 行列が厳密に求まる場合がある. (例えば sinh-Gordon, Gross–Neveu, Calogero 模型等が典型例.)

  これらの可積分系では N 体の散乱振幅は 2 体の散乱振幅の積に因数分解される. Yang–Baxter 方程式を解く事で 2 体の S 行列を求める, というのが常套手段:



$$S_{ij}^{ab}(\theta_{12})S_{bk}^{cn}(\theta_{13})S_{ac}^{lm}(\theta_{23}) = S_{jk}^{ab}(\theta_{23})S_{ia}^{lc}(\theta_{13})S_{cb}^{mn}(\theta_{12})$$

今後の展望 ③

- 厳密 S 行列への応用 (続き). 一方，S 行列は一般に繋絡演算子である，という事が知られている [cf. Strocchi '13, Chap. 6]:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_{\mathrm{out}} \arrow[r, "A_{\mathrm{out}}"] \arrow[d, "S"'] & \mathcal{H}_{\mathrm{out}} \arrow[d, "S"] \\ \mathcal{H}_{\mathrm{in}} \arrow[r, "A_{\mathrm{in}}"'] & \mathcal{H}_{\mathrm{in}} \end{tikzcd} \qquad A_{\mathrm{in}}S = SA_{\mathrm{out}}$$

実際，Kerimov は 1990 年代後半に繋絡関係式を使って厳密 S 行列が求まる具体例を幾つも構成した．[Kerimov '98] (計算法は今日の相関函数の導出法と全く同じ．実際，厳密 S 行列の函数形は有限温度 CFT の 2 点函数とかなり似ている．)

Kerimov が解いたのは Schrödinger 方程式の散乱問題だが，一般に非相対論的 QFT の 2 体問題は相対座標を採ると 1 体の Schrödinger 方程式に帰着するので，実質，非相対論的 QFT の 2 体 S 行列を幾つも厳密に求めたに等しい．

Kerimov の方法を 2 次元の相対論的 QFT，或いはもっと野心的に 3 次元・4 次元の厳密 S 行列へと拡張するのは重要だろう．

参考文献

1970 年代には既に CFT の 2 点函数は繋絡演算子の積分核に他ならないと認識されていた．しかし，現在の標準的な CFT の教科書ではこの事実は一切触れられていない．次の教科書 3 冊が役立つ:

V. K. Dobrev, G. Mack, V. B. Petkova, S. G. Petrova, I. T. Todorov
Harmonic Analysis on the n-Dimensional Lorentz Group and Its Application to Conformal Quantum Field Theory.
Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.

I. T. Todorov, M. C. Mintchev, V. B. Petkova
Conformal Invariance in Quantum Field Theory.
Edizioni della Normale, Pisa, 1978.

E. S. Fradkin, M. Y. Palchik
Conformal Quantum Field Theory in D-dimensions.
Kluwer, Dordrecht, 1996.

一番詳しいのは Dobrev さん達の教科書．しかし読み辛い． 2 番目の教科書も詳しいが，これも読み辛い． 3 番目の教科書が物理学者には最も分かり易いが，繋絡演算子についてはそれ程詳しくない．私が今回最も影響を受けたのは次の厳密 S 行列の論文:

G. A. Kerimov
New algebraic approach to scattering problems.
Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 2976–2979.

ご清聴ありがとうございました.