q-量子変形された余次元空間を持つ５次元時空

物理学専攻　豊田陽己

平成１３年１２月１２日(水)

1. 導入
2. 正準交換関係とq-交換関係
3. q-調和振動子
4. q-量子変形された
   余次元空間を持つ５次元時空
5. まとめと今後の課題

1　導入

■　q-deformation 量子化の試み

1980年代後半ò

ì——— [A] ———ê　　　　　　　　ì——— [B] ———ê

è通常の量子化	mappingが存在	èq-量子変形
è力学系 A	( )	è力学系 B

í———————ë　　　　　　　　í———————ë

[A],[B]は利用目的に応じた<u>記述の差</u>？

è複雑な力学構造を簡単な模型で記述可

例 調和振動子

!通常：等間隔なエネルギー固有値

q-量子変形：不等間隔のエネルギー固有値

■<u>今回の試み</u>

èある種の非可換構造を持つ系をq-量子変形の方法で構成する。

Ä! barane的な模型に応用

è4+1-dim時空の粒子模型の性質を調べる。

4-dim時空との間のq-量子変形。

2　正準交換関係とq-交換関係 (1次元)

■正準量子化

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1$$

$$[N, a] = -a, \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger, \quad N = a^\dagger a$$

$$\Downarrow$$

■mapping

$$a_q^\dagger = \sqrt{\frac{[W]_q}{N}}\, a^\dagger, \quad a_q = a\sqrt{\frac{[W]_q}{N}}$$

$$W = \alpha N, \quad [W]_q = \frac{q^W - q^{-W}}{q^\alpha - q^{-\alpha}}, \quad N = N_q$$

$$\Downarrow$$

■q-量子化

$$\left[a_q, a_q^\dagger\right]_q = a_q a_q^\dagger - q^\alpha a_q^\dagger a_q = q^{-\alpha N}$$

$$[N_q, a_q] = -a_q, \quad \left[N_q, a_q^\dagger\right] = a_q^\dagger, \quad N_q = a_q^\dagger a_q$$

3　q-**調和振動子** (1 **次元**)

■通常の調和振動子

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\text{f}\, a; a^{\text{y}}\text{g}; \quad (q = 1)$$

定常状態

$$\text{i}\hbar\text{m}\frac{\text{@}}{\text{@}t}\,\text{î}\,\text{â}_E(x)e^{\text{Ä}iEt=\hbar\text{m}}\,\text{ï} = E\,\text{â}_E(x)e^{\text{Ä}iEt=\hbar\text{m}}$$

$$= \frac{1}{2}\text{f}\, a; a^{\text{y}}\text{g}\,\text{â}_E(x)e^{\text{Ä}iEt=\hbar\text{m}}$$

+　q-量子変形

$$E\,\text{â}_E(x) = \frac{1}{2}\text{f}\, a_q; a_q^{\text{y}}\text{g}\,\text{â}_E(x) = H_q\,\text{â}_E(x)$$

$$H_q = \frac{1}{2}([W]_q + [W + 1]_q) = \frac{1}{2}\frac{\sinh[\frac{W}{2}\ln q]}{\sinh[\frac{\tilde{\text{a}}}{2}\ln q]}$$

□<u>不確定性関係の修正</u>

$$x_q = \sqrt{\frac{1}{2}}(a_q^\dagger + a_q) \ ; \ p_q = i\sqrt{\frac{1}{2}}(a_q^\dagger - a_q)$$

$$\rightarrow \ H_q = \frac{1}{2}\left(p_q^2 + x_q^2\right)$$

$$\begin{aligned}
[x_q; p_q] &= \frac{i\hbar}{2}\frac{\sinh[\frac{\omega}{2}N \ln q]}{\sinh[\frac{1}{2}\omega \ln q]} + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}p\frac{\sinh[\frac{\omega}{2}N \ln q]}{\sinh[\frac{1}{2}\omega \ln q]} \\
&= i\hbar \cosh[\frac{\omega}{2}N \ln q] \\
&\rightarrow \ i\hbar \quad (q \rightarrow 1)
\end{aligned}$$

$$\Delta x_q \Delta p_q \geq |<\psi|\cosh[\tfrac{\omega}{2}N \ln q]|\psi>|^2$$

□ $(t;x;p)$ 空間の q-量子変形の試み

$$\boxed{\begin{aligned}[a_q; a_q^\dagger]_q &= a_q a_q^\dagger - q^{\text{ã}} a_q^\dagger a_q = q^{-W}\\ W &= \text{ã}N + \text{ï}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\end{aligned}}$$

$$E\,\text{â}_E(x) = H_{q;\text{ã};\text{ï}}\,\text{â}_E(x)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sinh[\frac{\text{ã}}{2}(N+\text{ï}E)\ln q]}{\sinh[\frac{\text{ã}}{2}\ln q]}\,\text{â}_E(x)$$

$\text{ï} > 0$ の場合　　　　$\text{ï} < 0$ の場合

$\rightarrow\ \underbrace{4}_{\text{時空}} + \underbrace{1}_{\text{調和振動子型}}$ 次元模型へ適用。

]☆comment

■ q-量子変形の導入方法

～調和振動子の場合～

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m}{2}\omega^2 x^2$$

$$H = \frac{\omega}{2}\{a, a\}$$

+q-量子変形

$$\to \frac{\omega}{2}\{a_q, a_q^\dagger\}$$

$$= \frac{\omega}{2}[\sqrt{\quad}\, a^\dagger a \sqrt{\quad}$$

$$+ a \sqrt{\quad}\sqrt{\quad}\, a^\dagger]$$

$\equiv$ A

$$H = \omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

+q-量子変形

$$\to \omega(a_q^\dagger a_q + \frac{1}{2})$$

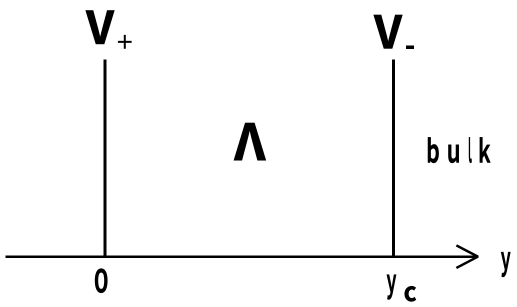
$$= \omega[\sqrt{\quad}\, a^\dagger a \sqrt{\quad} + \frac{1}{2}]$$

$\equiv$ B

1次元の場合	A = B
2次元以上の場合	A ≠ B
	(モデルに依存)

4　５次元時空モデルへの応用

■RS模型



解の安定性

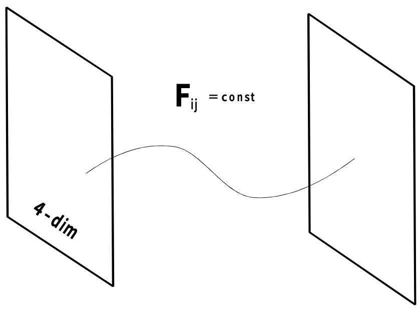
周期的境界条件有

$M_{pl} \sim M \sim \kappa$

$\kappa e^{-2\kappa y_c} \sim$ 電弱スケール

$$
\begin{aligned}
S &= S_{Gravity} + S_{brane} + S_{brane'}; \\
ds^2 &= e^{-2k|y|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2; \\
S_{Gravity} &= \int d^4x \int dy \sqrt{-G}\{-\Lambda + 2M^3 R\} \\
S_\Sigma &= \int d^4x \sqrt{-g_\Sigma}\{V_\Sigma + L_{\Sigma matter}\}; \\
M_{pl}^2 &\simeq 2M^2 \int_0^{y_c} dy e^{-2\kappa} = \frac{M^3}{\kappa}(1 - e^{-2\kappa y_c}):
\end{aligned}
$$

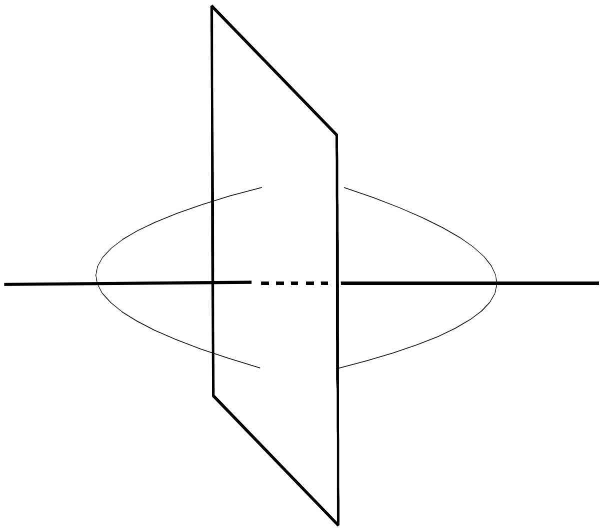
■D-branes



$[x_\mu; x_\nu] = \underbrace{i\theta}_{\text{const}} \neq 0$

ローレンツ共変性？

■我々のモデル



$[x_{ñ}; x_{ó}] = 0; [x_{ñ}; x_5] \neq 0$

５次元空間！q-調和振動子 (バネが強い)

ローレンツ共変性、解の安定性　OK

■Randall-Sundrum type of model

$$ds^2 = e^{Ä2õ(ë)}ë_{ñó}dx^{ñ}dx^{ó} Ä dë^2; \ dë = e^{Äõ}dy$$

$$= V(y)dx^{N}dx_{N} \ ; \ (V(y) = e^{Ä2õ(y)})$$

$$(ñ; ó = 0; 1; 2; 3; dx^5 = dy) \ ; \ diag(ë_{ñó}) = (+; Ä; Ä; Ä)$$

+作用 S

$$S = m \int ds = m \int dú \sqrt{V(y)ë_{NM}\underline{x}^{N}\underline{x}^{M}}$$

eq of motion

$$p_{ñ}p^{ñ} Ä (p_y + m^2V(y)) = p_{ñ}p^{ñ} Ä \ î f a; a^{y} g = 0$$

Einstein 方程式
(É = 0) の解

$$m^2V(y) = îy^2$$

$$õ = Ä \log \left(\frac{î}{m}y \right)$$

+q-量子変形

$$p_{ñ}p^{ñ} Ä \ î f a_q; a_q^{y} g$$

$$= p^2 Ä \ î \frac{\sinh \left(ã \ln q \left(\frac{1}{2} f a; a^{y} g + ïp^2 \right) \right)}{\sinh \left(\frac{ã}{2} \ln q \right)} = 0$$

$$[x_{\tilde{n}}; x_{\acute{o}}] = 0$$

$$[x_{\tilde{n}}; x_q^5] = -\frac{\tilde{a}\,\ddot{\imath}\,\hat{\imath}^{\ddot{A}1}}{p\,\overline{2\,\hat{\imath}}}\,\frac{q^{\tilde{a}W} + q^{\ddot{A}\,\tilde{a}W}}{q^{\tilde{a}W}\;\ddot{A}\;q^{\ddot{A}\,\tilde{a}W}}\,f\,a_q; p_{\tilde{n}}g \neq 0$$

(4-dim と余 1-dim の間に非可換性が生じる)

■ σの決定

$$\Gamma^I_{JK} = \frac{1}{2}g^{IL}(\partial_K g_{LJ} + \partial_J g_{LK} - \partial_L g_{JK})$$

$$\Gamma^\mu_{5\nu} = \Gamma^\mu_{\nu 5} = -\sigma' \delta^\mu_\nu \,;\ \ \Gamma^5_{\mu\nu} = -\sigma' \eta_{\mu\nu} e^{-2\sigma}$$

$$R_{IK} = \partial_L \Gamma^L_{IK} - \partial_K \Gamma^L_{IL} + \Gamma^L_{IK}\Gamma^M_{LM} - \Gamma^M_{IL}\Gamma^L_{KM}$$

$$R_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} e^{-2\sigma}(-\sigma'' - \sigma'^2)$$

$$R_{55} = 4(\sigma'' - \sigma'^2)$$

$$R = g^{ij}R_{ij} = -8\sigma'' - 20\sigma'^2$$

+作用S

$$S \sim \int d^5\tau \sqrt{g}(R + 2\Lambda) \quad (静的)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R + 2\Lambda) = 0 \ \text{ or } \ \sigma'' - 2\sigma'^2 - \frac{\Lambda}{3} = 0$$

$$\to \ \sigma(\eta) = -\frac{1}{2}\log\sinh\left(\sqrt{-\frac{2\Lambda}{3}}\,\eta\right) + \text{const.}$$

ここで, $e^{-2\sigma(\eta)} \to 2\kappa\eta \ (\Lambda \to 0)$

$$\sigma(\eta) = -\frac{1}{2}\log\left\{2\kappa\sqrt{-\frac{3}{2\Lambda}}\sinh\left(\sqrt{-\frac{2\Lambda}{3}}\,\eta\right)\right\};$$

■ 5次元時空の場 (ϕ:スカラー場)

$$S = \int d^5x \sqrt{g}\left[\frac{1}{2}\left(g^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi - (m^2 - \xi R)\phi^2\right)\right]$$

ξ : パラメター; $g = \det(g_{ij})$; R : スカラー曲率

◇eq of motion

$$\left[e^{2\sigma}\left(\partial_i - \frac{3}{2}\partial_i\sigma\right)^2 + \left(\frac{3}{16} - \xi\right)R\right]\phi = 0$$

$+ \quad \phi = e^{\frac{3}{2}\sigma}\hat{\phi}\ , \quad \xi = \frac{3}{16}$

$$(\partial_\nu\partial^\nu - \partial_y^2 + e^{-\sigma}m^2)\hat{\phi} = 0$$

◇質量固有値 $M^2(=p^2)$ について

$$p^2 - \kappa\frac{\sinh\left[\alpha\ln q\left\{\frac{1}{2}\{a;a^\dagger\} + \lambda p^2\right\}\right]}{\sinh\left[\frac{\alpha}{2}\ln q\right]} = 0$$

⇒ 質量の階層性

⇒ 高階微分を含むプロパゲーター

⇒ 場の理論の発散問題の収束性

●階層性

ï < 0の場合

ï > 0の場合

$$M_n^2 = \text{î}\frac{\sinh^{\text{î}}\ \text{ã}\ln q^{\text{í}}\ n+\frac{1}{2}+\ \text{ï}M_n^2{}^{\text{ì ï}}}{\sinh\ {}^{\text{î}}\frac{\text{ã}}{2}\ln q^{\text{ï}}}$$

$$M_0\ \text{ò}\ \frac{\text{î}}{\sinh[\frac{\text{ã}}{2}\ln q]}e^{(\text{ã}\ln q)\,\text{ï î}}\ ;(\ \text{ï î ù}\ 1)$$

●高階微分によるghostは現れない。

例）通常の高階微分を含むプロパゲーター。

$$\frac{1}{(p^2\ \text{Ä}\ m_1^2)(p^2\ \text{Ä}\ m_2^2)} = \frac{1}{m_1^2\ \text{Ä}\ m_2^2}\ {}^{2}_{4}\ \frac{1}{p^2\ \text{Ä}\ m_1^2}\ \text{Ä}\ \frac{1}{p^2\ \text{Ä}\ m_2^2}\ {}^{3}_{5}$$

□<u>我々の場合</u> $(x = p^2; x_n$:n番目のpole)

$$\frac{1}{x\ \text{Ä}\ M^2(x)}\ \text{'}\ \frac{R_n}{x\ \text{Ä}\ x_n};\ (x\ \text{'}\ x_n)$$

$$\text{Res} : R_n = \frac{\sinh[\text{ã}\ln q=2]}{\cosh[\frac{1}{2}\text{ã}\ln q\ \text{ï}(n+\ \text{ï}x_n)]} > 0$$ (符号は変わらない)

◇発散問題の改善 (one loop diagram)

$$\sum_{n=0}^{1} \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2ô)^4} \frac{1}{p^2 \,Ä\, î\frac{\sinh\left[ã \ln q\left(\frac{1}{2} f a; a^y g + ïp^2\right)\right]}{\sinh\left[\frac{ã}{2} \ln q\right]}}$$

$$= \sum_{n=0}^{1} \frac{ô^2}{(2ô)^2} \int \frac{p^3 dp}{p^2 + î\frac{\sinh\left[ã \ln q\left(\frac{1}{2} + n + ïp^2\right)\right]}{\sinh\left[\frac{ã}{2} \ln q\right]}}$$

$$ò \sum_{n=0}^{1} \frac{ô^2 î}{(2ô)^2} \int dpp^3 \frac{2 \sinh^{î} \frac{1}{2} ã \ln q^{ï}}{e^{ã \ln q\left[\frac{1}{2} + n + ïp^2\right]}}; \quad (p \;ù\; 0)$$

$$= \frac{ô^2}{2(2ô)^4} \frac{î}{(ã ï \ln q)^2} \;ò\; î Ç \; (\mathrm{finite});$$

$$(ã ï \ln q \ne 0)$$

5　まとめと今後の課題

◇まとめ

è RS模型で余次元座標としてのq-量子変形された座標を導入することができた。

è 時空構造は安定。

è massの階層性。

è multi pole ghostは現れない。

è 場の理論においてone loopの収束性がよい。

◇今後の課題

è q-量子変形の導入方法の検討

è matterのある場合の解の構造。