ゲージ超対称性の幾何学的破れ

岩田 寛幸　物理学専攻

2001年12月5日(水)コロキュウム

目 次

1 はじめに

- **標準模型**

  電磁相互作用と弱い相互作用の統一に成功。

  自発的対称性の破れ　$< H > \sim O(100\ \mathrm{GeV})$。

階層性の問題

ヒッグス粒子の質量にループからくる二次発散をくり込む際の不自然な微調整。

解決策

$\Downarrow$

- **超対称性**

  質量の縮退した整数スピンと半整数スピンの存在を仮定。

  $$\text{フェルミオン} \overset{\text{対称性}}{\Longleftrightarrow} \text{ボゾン}$$

  $E \leq 1$ [TeV] で超対称粒子は実験的には見つかってない。

$\Downarrow$

目的

超対称性の破れの機構が必要

$N=1$の超代数と超対称変換

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta} P_\mu$$
$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0$$
$$[H, Q_\alpha] = 0$$

超対称性の破れの機構

1. 自発的対称性の破れ

2. Soft breaking　二次発散を出さない

3. 代数の幾何学的な破れ

- W-Z model, domain-wall, (Shifman)

  N＝1超代数

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} \propto (\sigma^i \sigma^2)_{\alpha\beta} \underbrace{\int d^3x\ \partial_i \phi(x)}_{表面積分} \neq 0 \ ?$$

- SUSY gluodynamics, (今回の試み)

$$[H, Q_\alpha] = \underbrace{i \int d^3x \partial_i J^i_\alpha}_{表面積分} \neq 0 \ ?$$

1. 自発的対称性の破れ

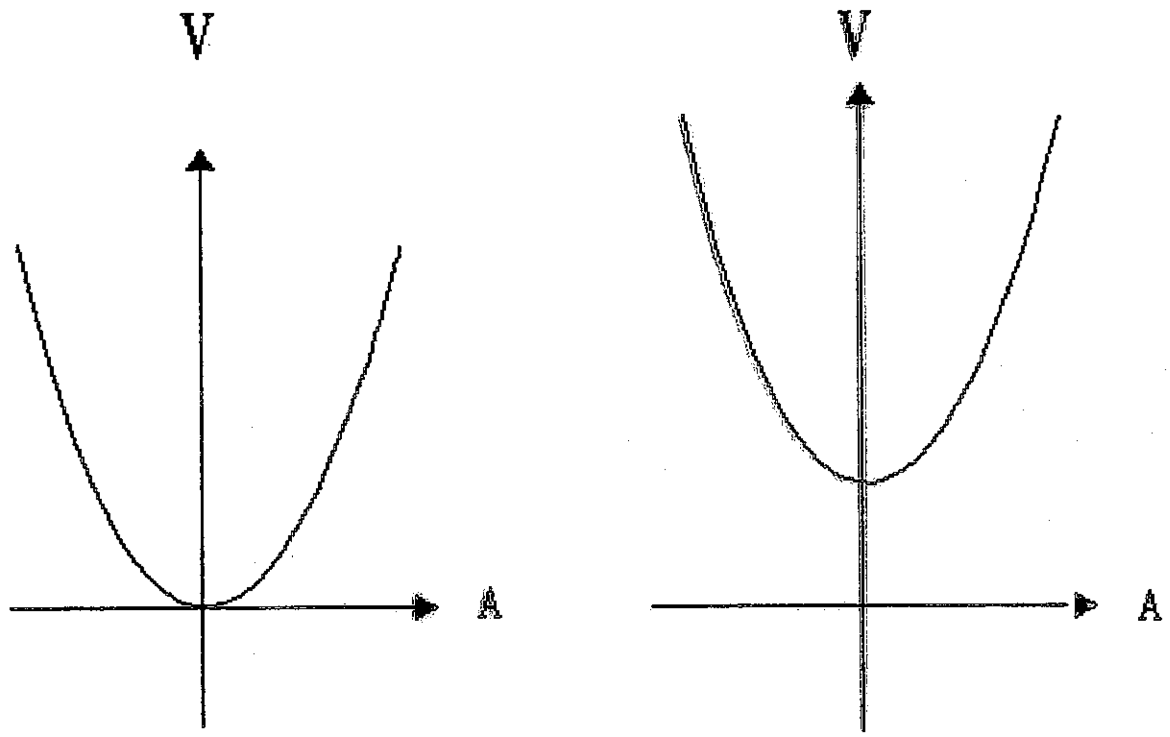


図 1: 自発的対称性の破れ

2 超対称性理論とその破れ

ラグランジアンのスーパー変換

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu$$

カレントの保存則

$$\partial_\mu J^\mu \equiv \partial_\mu (K^\mu - N^\mu) = 0$$
$$(N_\mu \equiv \delta\phi_l \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_l)})$$

スーパーチャージ

$$Q_\alpha = \int d^3x \; J^0_\alpha$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \text{無限遠方表面積分}$$

超対称性の確認

$$i\,[H, Q_\alpha] = \dot{Q}_\alpha = -\int d^3x \partial_i J^i_\alpha$$

$$\begin{cases} = 0 \ \text{SUSY} \\ \neq 0 \ \cancel{\text{SUSY}} \end{cases}$$

位相的な解が無限遠方の表面積分を拾うか？

2.1 Wess-Zumino model(Shifman)

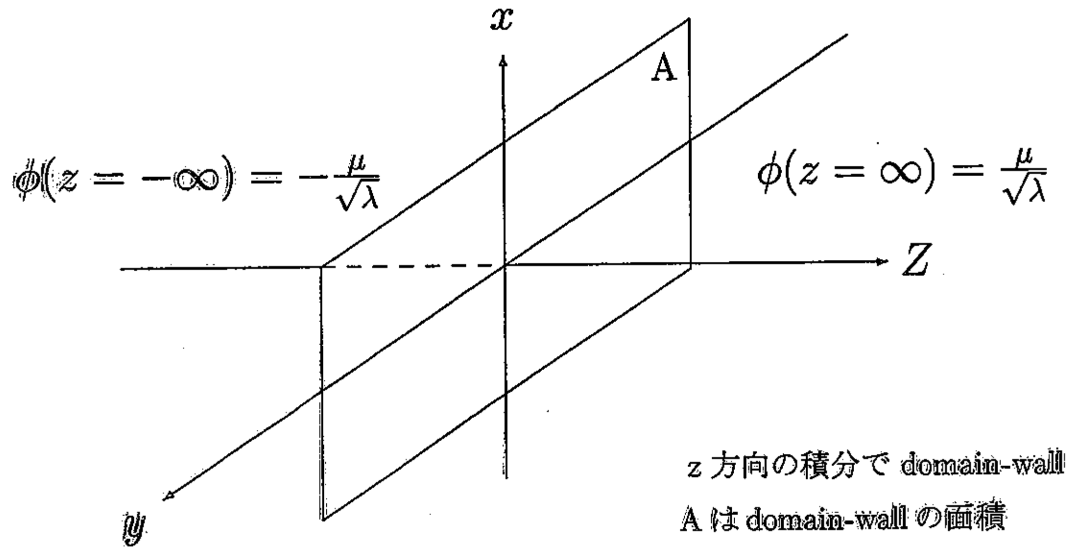
$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi + i\partial_\mu \psi \sigma^\mu \bar{\psi} + F^\dagger F$$
$$+ \left[F(\mu^2 - \kappa\phi^2) + \kappa\phi\psi\psi + H.c.\right]$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \frac{8}{3}\mu^2(\sigma^i\sigma^2)_{\alpha\beta} \int d^3x \, \partial_i \phi(x)$$

$$= -i\frac{8}{3}\mu^2(\sigma^1)_{\alpha\beta}[\phi(z=+\infty) - \phi(z=-\infty)]A$$

$$\equiv -i2(\sigma^1)_{\alpha\beta}\Sigma A \neq 0 \Rightarrow \text{代数の幾何学的破れ}$$

$\Sigma = \frac{8}{3}\frac{\mu^3}{\sqrt{\lambda}}$ $\qquad E \geq \Sigma A$, BPS



z 方向の積分で domain-wall 解を拾う。
A は domain-wall の面積

図 2: domain-wall

2.2 Supersymmetric gluodynamics

今回の試み

ラグラジアン

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}[G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu,a} - 2\{i\lambda^{\alpha,a}(\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}})^a + H.C.\} - D^aD^a]$$

$$\begin{aligned} G^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + \varepsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu \\ (\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}})^a &= \partial_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha},a} + \varepsilon^{abc}A^b_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha},c} \\ A_{\alpha\dot{\alpha}} &= A_\mu\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \end{aligned}$$

スーパー変換

$$\begin{aligned} \delta_\eta A_\mu &= i\eta\sigma_\mu\bar{\lambda} - i\lambda\sigma_\mu\bar{\eta} \\ \delta_\eta\lambda^\alpha &= -(\eta\sigma^{\rho\kappa})^\alpha G_{\rho\kappa} + i\eta^\alpha D \\ \delta_\eta\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} &= (\bar{\sigma}^{\rho\kappa}\bar{\eta})^{\dot{\alpha}}G_{\rho\kappa} - i\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}D \\ \delta_\eta D &= \eta\sigma^\mu(\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda}) + (\mathcal{D}_\mu\lambda)\sigma^\mu\bar{\eta} \end{aligned}$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \tfrac{1}{4}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)$$

$$\bar{\sigma}^{\mu\nu} = \tfrac{1}{4}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)$$

$$\bar{\sigma}^\mu = \{1, -\boldsymbol{\sigma}\}$$

$$\delta\mathcal{L} = \frac{-i\partial_\mu}{2}[\eta\sigma_\nu\bar{\lambda}^a(G^{\mu\nu,a} + i\tilde{G}^{\mu\nu,a}) + i\eta\sigma^\mu\bar{\lambda}^a D^a] + H.C.$$

$$K^\mu \equiv \frac{-i}{2}[\eta\sigma_\nu\bar{\lambda}^a(G^{\mu\nu,a} + i\tilde{G}^{\mu\nu,a}) + i\eta\sigma^\mu\bar{\lambda}^a D^a]$$

$$\tilde{G}^{\mu\nu,a} \equiv \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\kappa}G_{\rho\kappa}\ (\varepsilon^{0123} = 1)$$

ネーターカレント

$$N^\mu = -\frac{i}{2}[\eta\sigma_\nu\bar{\lambda}^a(3G^{\mu\nu,a} - i\tilde{G}^{\mu\nu,a}) + i\eta\sigma^\mu\bar{\lambda}^a D^a]$$

スーパーカレント

$$\begin{aligned} J^\mu_\alpha &= K^\mu - N^\mu \\ &= (iG^{\mu\nu,a} + \tilde{G}^{\mu\nu,a})(\sigma_\nu\bar{\lambda}^a)_\alpha \end{aligned}$$

反交換関係

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = (\sigma^i\sigma^2)_{\alpha\beta}\int d^3x\ \partial_i\left[\bar{\lambda}^a\bar{\lambda}^a\right]$$

交換関係

$$[H, Q_\alpha] = i\int d^3x\ \partial_i\left\{(iG^{i\nu,a} + \frac{1}{2}\varepsilon^{i\nu\rho\kappa}G^a_{\rho\kappa})(\sigma_\nu\bar{\lambda}^a)_\alpha\right\}$$

運動方程式

$$(\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{\dot{\alpha}}) = 0$$

$$(\mathcal{D}_{\nu}\boldsymbol{G}^{\mu\nu}) + i\boldsymbol{\lambda} \times (\sigma^{\mu}\bar{\boldsymbol{\lambda}}) = 0$$

● ポリヤコフモノポール的な解

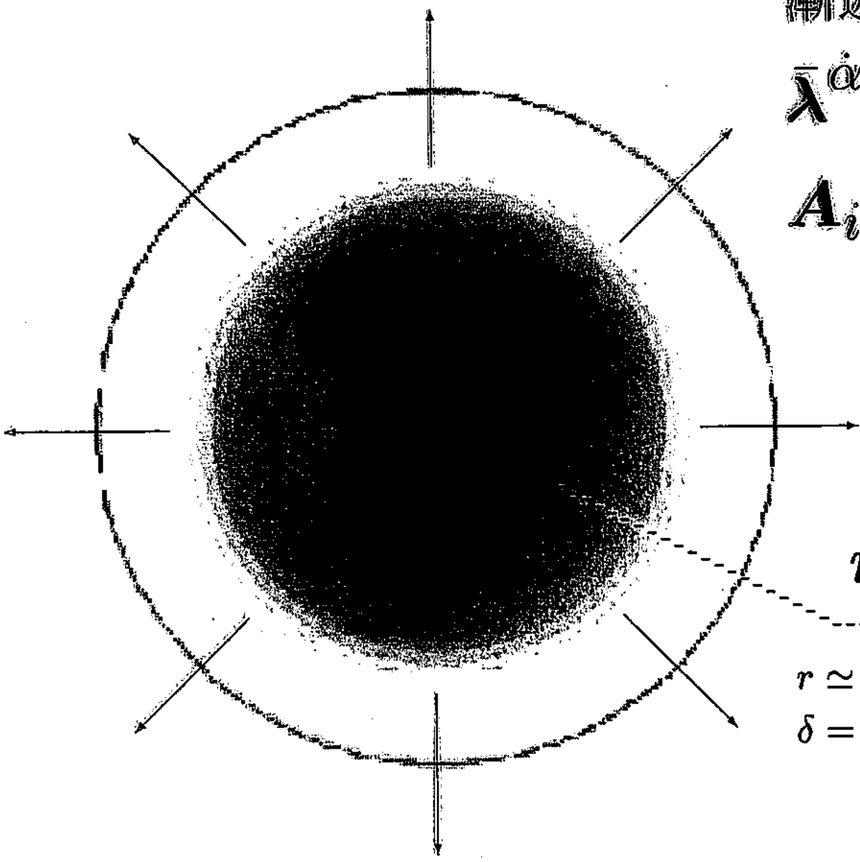
$$\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{\dot{\alpha}} = \boldsymbol{n}'\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}}\ ,\quad \boldsymbol{n}' = \frac{\boldsymbol{r}}{r+\delta}\ ,\quad (\delta \geq 0)$$

$$\boldsymbol{A}_i = \partial_i \boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{n}'\ ,\quad \boldsymbol{A}_0 = 0$$

漸近形($\delta \ll r$)

$$\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{\dot{\alpha}} = \boldsymbol{n}\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}}\ ,\quad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$$\boldsymbol{A}_i = \partial_i \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}\ ,\quad \boldsymbol{A}_0 = 0$$



$$\boldsymbol{n}' = \frac{\boldsymbol{r}}{r+\delta}$$

$r \simeq 0$ 近傍で external source が現れる

$\delta = 0$ の時、$r = 0$ でシンギュラー

- 位相的な解による超対称性の破れ

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\}\big|_{\text{位相的な解}} = 0$$

$$\dot{Q}_\alpha = i\,[H, Q_\alpha]\big|_{\text{位相的な解}} = -4\pi(\sigma^0\bar{\epsilon})_\alpha \neq 0$$

- 特異点と等価な、付加項による破れ

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L} + \underbrace{ic(\lambda^a\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}^a - \partial_\mu\lambda^a\sigma^\mu\bar{\lambda}^a)}_{=M}$$

cの値は？

超対称変換

$$\delta_\eta\mathcal{L}_{\text{eff}} = \partial_\mu K^\mu + \delta_\eta M$$

カレント

$$\partial_\mu J^\mu = \delta_\eta M$$

超対称性の破れ

$$[H_{\rm eff}, \eta Q] = i\int[\underbrace{\partial_i J^i}_{\substack{\text{位相的な解を含まない}\\(=0)}} + \underbrace{\delta_\eta M}_{\substack{\text{破れの効果}\\(\text{位相的な解の寄与?})}}]d^3x$$

$$= c\int d^3x\,[(\eta\sigma^{\mu\nu}\sigma^\rho\partial_\rho\bar{\lambda}^a)G^a_{\mu\nu} - (\eta\sigma^{\mu\nu}\sigma^\rho\bar{\lambda}^a)\partial_\rho G^a_{\mu\nu}]$$

$$\neq 0$$

(一つ) の古典解で右辺を計算した値が $\dot{Q}$ に一致するようにして定数を選ぶ

$$\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{\dot{\alpha}} = \boldsymbol{n}'\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} \quad , \ \boldsymbol{n}' = \frac{\boldsymbol{r}}{r+\delta}$$

$$\boldsymbol{A}_i = \partial_i\boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{n}' \ , \ \boldsymbol{A}_0 = 0$$

$$\text{右辺} = i4c\pi\eta\sigma^0\bar{\epsilon}\lim_{R\to\infty}\left[\frac{2R^3}{(R+\delta)^3} + \frac{3R^5}{5(R+\delta)^5}\right]$$

$$\Downarrow \ \ \delta = 0, \ \ c = \frac{13}{10}$$

$$= i4\pi\eta\sigma^0\bar{\epsilon}$$

3 付加項への示唆(古典解の凝縮？)

3.1 ボルテックス凝縮としてのヒグスモデル(1+2次元)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |\partial_\mu\phi + iA_\mu\phi|^2 + V(\phi)$$

$$\phi \text{ 複素ヒグス場}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$V(\phi) = -\frac{1}{4}\mu^2(|\phi|^2 - \kappa^2)^2$$

ボルテックス(古典)解

static case

$$\phi \propto \exp[in\theta] \;, \quad \tan\theta = x_2/x_1 \;, \quad n; \text{ winding number}$$

$$\phi \to \exp[-i\Lambda]\phi \;, \quad \Lambda = n\theta$$
$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\Lambda$$
$$F_{12} \to F_{12} + \underbrace{2\pi n\delta^2(\boldsymbol{r})}_{\Omega_{12}} \;, \quad \boldsymbol{r} = (x_1, x_2)$$

time dependent

$$\Omega_{\mu\nu} = \sum_l 2\pi n_l \varepsilon_{\mu\nu\rho} \int d\tau_l \; \dot{x}_l^\rho(\tau_l)\delta^3(x - x_l(\tau_l))$$
$$, \quad l = 1, 2, \cdots, N \;, \quad N; \text{ ボルテックスの数}$$

ボルテックス解の分離　$(F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu} + \Omega_{\mu\nu})$

$$\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}} - \frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu}$$

- $$-\frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \sum_{l=1}^{N}\int d\tau_l\ F_\mu(x_l(\tau_l))\dot{x}_l^\mu(\tau_l)$$

$$F_\mu(x_l) = -\pi n_l \varepsilon_{\mu\nu\lambda}\tilde{F}^{\nu\lambda}(x_l)$$

- $$-\frac{1}{4}\Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu} = \sum_{l=1}^{N}\int d\tau_l\ m_l\sqrt{\dot{x}_l^2(\tau_l)}$$

$$m_l = (\pi n_l \delta(0))^2$$

多体化による有効作用の生成

$$\sum_{\text{ボルテックス}} \exp[i\int d^3x\, \mathcal{L}] = \exp[i\int d^3x\ \tilde{\mathcal{L}}] \times T$$

$$T = \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\int(\prod_{l=1}^{N} Dx_l)\exp[i\sum_{l=1}^{N}\int_0^\tau d\tau_l'\{m\sqrt{\dot{x}_l^2(\tau_l')} + F_\mu(x_l(\tau_l'))\dot{x}_l^\mu(\tau_l')\}]$$

$$= \int D\chi \exp[i\int d^3x\{-m^2|\chi(x)|^2 + |\partial_\mu\chi(x) + iF_\mu(x)\chi(x)|^2\}]$$

χ を位相解により生成された ϕ の自由度と見なして元の作用にまとめると

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(\phi) = \underbrace{\tilde{\mathcal{L}}(\phi)}_{\text{ボルテックス解含まず}} + \underbrace{\{|\partial_\mu\phi + iF_\mu\phi|^2 - m^2|\phi|^2\}}_{\text{ボルテックス解によるスカラー場}}$$

Supersymmetric gluodynamicsのラグラジアン

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}[G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu,a} - 2\{i\lambda^{\alpha,a}(\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}})^a + H.C.\} - D^a D^a]$$

サミュエルの公式を使う

$$T = \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N}{N!} \int \underbrace{Dx_N}_{N\text{ 粒子の測度}} \exp\left[iS_N(N\text{ 体モノポールの作用})\right]$$

$$= \int D\lambda \exp[\int c(\partial_\mu\lambda^a\sigma^\mu\bar{\lambda}^a - \lambda^a\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}^a + im\lambda\lambda + im\bar{\lambda}\bar{\lambda})\, d^4x]$$

$$\Downarrow$$

エフェクティブラグラジアン

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \underbrace{\mathcal{L}}_{\text{位相的な解含まず}} + \underbrace{ic(\lambda^a\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}^a - \partial_\mu\lambda^a\sigma^\mu\bar{\lambda}^a - im\lambda\lambda - im\bar{\lambda}\bar{\lambda})}_{=M\text{ 位相的な解による場}}$$

$$[H_{\text{eff}}, \eta Q] = i\int \delta M d^3x$$

$$\Downarrow \leftarrow \text{古典解}$$

$$= i4\pi\eta\sigma^0\bar{\epsilon}$$

4 まとめ

- 位相的な解により表面積分が残り超対称性が破れる：

$$
\begin{aligned}
\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 0 \\
i\left[H, Q_\alpha\right] &= -i\int d^3x\,\partial_i J^i_\alpha\Big|_{\text{位相的な解}} \\
&= i4\pi(\sigma^0\bar{\epsilon})_\alpha \neq 0
\end{aligned}
$$

ポリヤコフモノポール的な解

$$
\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{\dot{\alpha}} = \boldsymbol{n}\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}}, \quad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}, \quad \boldsymbol{A}_i = \partial_i \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{A}_0 = 0
$$

$\Downarrow$ 多体化

- 位相的な解による付加項：

$$
\mathcal{L}_{\text{eff}} = \underbrace{\mathcal{L}}_{\substack{\text{位相的な解を含まず} \\ \text{SUSY}}} + \underbrace{ic(\lambda^a\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}^a - \partial_\mu\lambda^a\sigma^\mu\bar{\lambda}^a - im\lambda\lambda - im\bar{\lambda}\bar{\lambda})}_{\substack{= M\ \text{位相的な解による場,} \\ \cancel{\text{SUSY}}}}
$$

$$
[H_{\text{eff}}, Q_\alpha] = i\int \delta M d^3x = i4\pi(\sigma^0\bar{\epsilon})_\alpha \ (\text{解を使った})
$$

今後の課題

- 破れのオーダー m や c の決定。
- より現実的な模型への拡張。
- 超対称性以外の対称性への幾何学的やぶれの応用。

  例）双対対称性（Schwinger の dyon model）

双対対称性

$$\text{電場}\,\boldsymbol{E} \;\Leftrightarrow\; \text{磁場}\,\boldsymbol{B}$$

双対変換

$$\begin{pmatrix} E' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Lambda & \sin\Lambda \\ -\sin\Lambda & \cos\Lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ B \end{pmatrix}, \quad \Lambda;\text{global phase}$$

Two-potential approach

$$\begin{aligned} A^\mu &= (\varphi_e, \boldsymbol{A}), \quad C^\mu = (\varphi_m, \boldsymbol{C}) \\ W_\mu &= A_\mu + iC_\mu \\ W'_\mu &= e^{ie\Lambda} W_\mu, \quad e;\text{Dual coupling constant} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad H_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu \\ &E^i = F^{i0} - \tilde{H}^{i0}, \quad B^i = \tilde{F}^{i0} + H^{i0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} G^{\mu\nu} G^*_{\mu\nu} \\ &\quad G_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu = F_{\mu\nu} + iH_{\mu\nu} \end{aligned}$$

双対対称性の破れ

◇ 運動方程式の解

$$W^\mu = (\frac{1}{r} + ia, 0, 0, 0)\text{ の時}, \quad a;\text{定数}$$

◇ Dual Charge

$$\dot{Q}_\alpha = i[H, Q_\alpha] = -\int d^3x \partial_i J^i_\alpha = -4a\pi$$

(dyon の量子化条件より a が決定できる？)

励起Υ中間子崩壊とσ中間子生成

'01.12.5

松本慎一郎

1. はじめに
2. 強い相互作用とS-matrixのbase
3. $\pi\pi$散乱振幅
4. Υ崩壊過程での$\pi\pi$生成振幅
   - (i) 非微分型振幅
   - (ii) 微分型振幅
5. 一般的な生成振幅及び崩壊率
6. 解　析
7. まとめと課題

1. はじめに

ππ生成過程

$$\begin{cases} \Upsilon(2S) \longrightarrow \Upsilon(1S)\pi\pi \\ \Upsilon(3S) \longrightarrow \Upsilon(1S)\pi\pi \\ \Upsilon(3S) \longrightarrow \Upsilon(2S)\pi\pi \end{cases}$$

ππ生成振幅 $\mathcal{F}_{\pi\pi}$ を σ Breit-Wigner 振幅と direct 2π 生成振幅の和の形を用いて解析 (P.L. B508 (2001) 31)

$$\mathcal{F}_{\pi\pi} = \frac{m_\sigma^2 e^{i\theta_\sigma} r_\sigma}{m_\sigma^2 - s - i\sqrt{s}\,\Gamma_\sigma} + r_{2\pi} e^{i\theta_{2\pi}} \longrightarrow \begin{pmatrix} m_\sigma = 526\,\mathrm{MeV} \\ \Gamma_\sigma = 301\,\mathrm{MeV} \end{pmatrix}$$

カイラル対称性と consistent か?

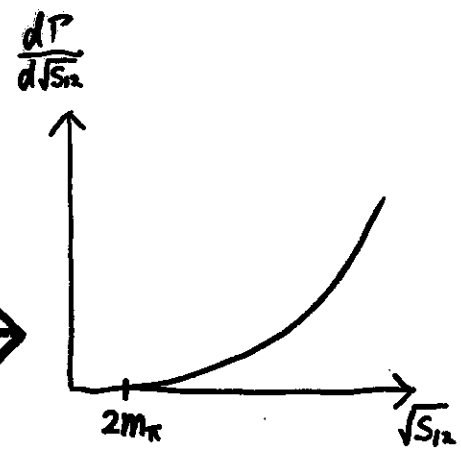
F.S.I. の考察から $\underset{生成}{\mathcal{F}_{\pi\pi}} = \alpha \underset{散乱}{\mathcal{T}_{\pi\pi}}$

カイラル対称性の考察から $\mathcal{T}_{\pi\pi} \sim O(p^2)$

$\mathcal{F}_{\pi\pi} \sim O(p^2) \longrightarrow s_{12} \longrightarrow$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{threshold suppression}}$



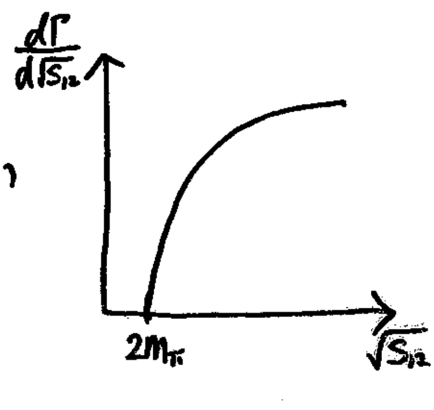
この形は σ 振幅と 2π 振幅が相殺

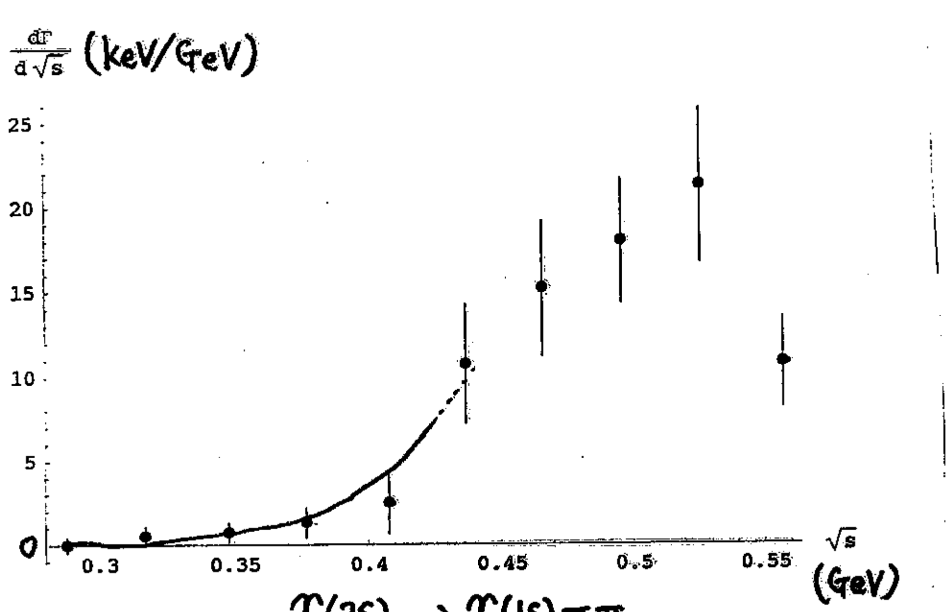
$\Upsilon(2S) \to \Upsilon(1S)\pi\pi$ 過程の ππ mass スペクトルの形は説明できても

$\Upsilon(3S) \to \Upsilon(1S)\pi\pi$ 過程の ππ mass スペクトルの形は説明できない

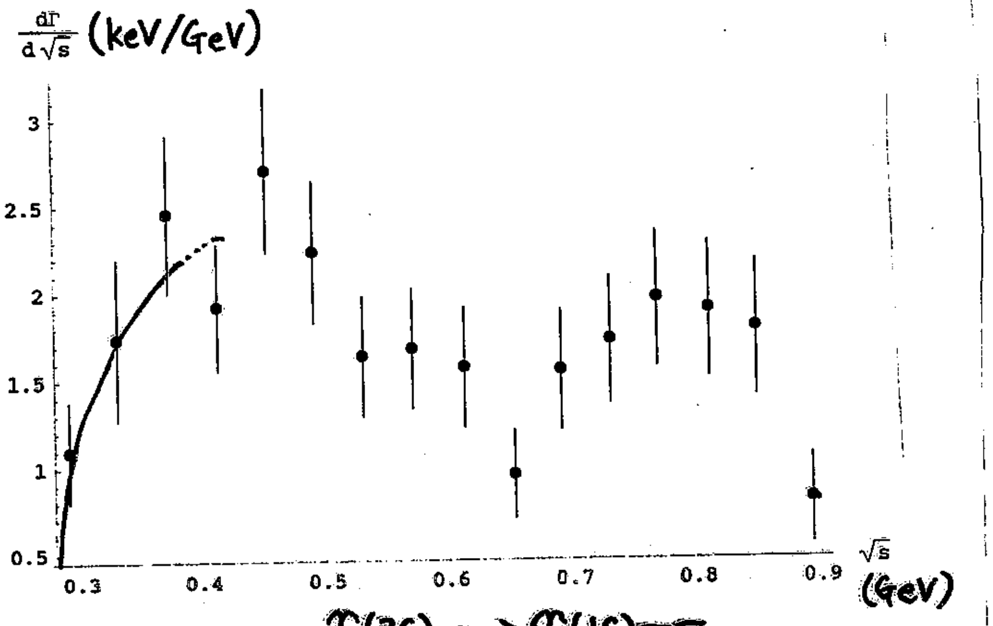
threshold 付近で $\mathcal{F}_{\pi\pi}$ = 定数であれば threshold からの鋭い立ち上がりを示す

カイラル対称性と consistent か?

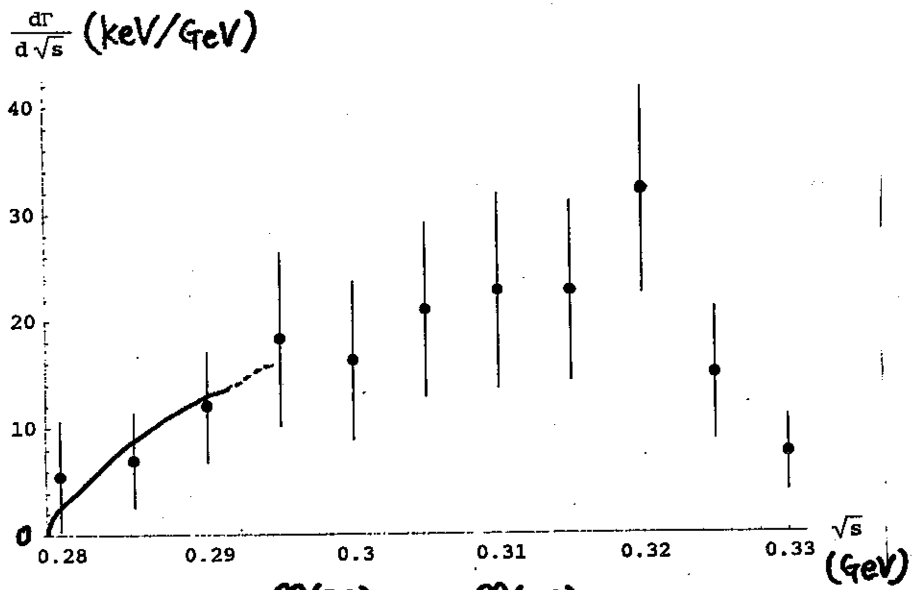




$\Upsilon(2S) \longrightarrow \Upsilon(1S)\pi\pi$

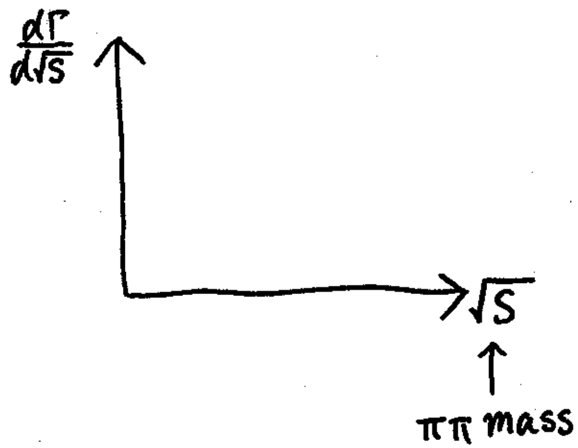


$\Upsilon(3S) \longrightarrow \Upsilon(1S)\pi\pi$



$\Upsilon(3S) \longrightarrow \Upsilon(2S)\pi\pi$

CLEO Phys. Rev. D49 (1994) 40



2. 強い相互作用と S-matrix の base

S-matrix の basic field として、$q, \bar{q}, g$ の安定な color singlet bound state $\bar{\Phi}_i$ を取り入れる

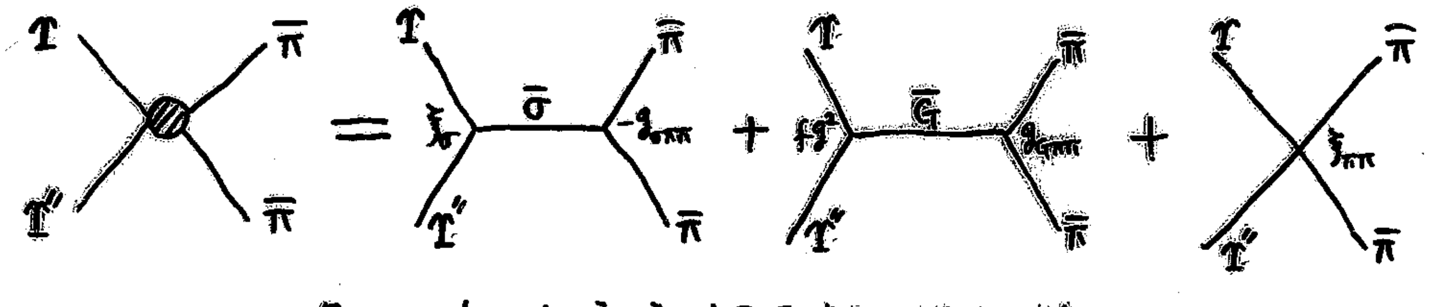
$$\mathcal{H}_I^{str.}(\bar{\Phi}_i) = \bar{\Phi}_i \text{ の間の残留相互作用}$$

相互作用ハミルトニアン $\mathcal{H}_I$ がエルミートだと、S-matrix のユニタリー性が保証される

$$\mathcal{H}_I^{\dagger} = \mathcal{H}_I \longrightarrow SS^{\dagger} = S^{\dagger}S = 1$$

	我々の立場	unitary chiral approach
basic fields	$\bar{\pi}, \bar{\sigma}$ (= $q\bar{q}$ の bound state), $\bar{G}$, ($\Gamma = 0$)	$\bar{\pi}$ (安定粒子のみ)
switch on $\mathcal{H}_I^{str.}$	$\sigma_{phys.}$, $G_{phys.}$, ($\Gamma \neq 0$)	σ ($\pi\pi$ の共鳴状態)
S-matrix の base の完全系	$\lvert\bar{\pi}\rangle, \lvert\bar{\sigma}\rangle, \lvert\bar{G}\rangle, \lvert\bar{\pi}\bar{\pi}\rangle$	$\lvert\bar{\pi}\rangle, \lvert\bar{\pi}\bar{\pi}\rangle$

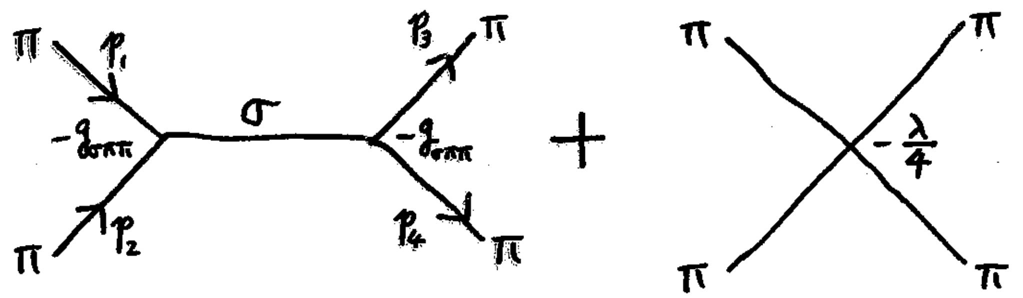
我々の立場では、線形σ模型と Nambu-Jona-Lasinio 模型に基づいた quark physics picture で議論する。



各 vertex に対応するラグランジアンは

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\Upsilon''\Upsilon\sigma} = \xi_\sigma \Upsilon''_\mu \Upsilon_\mu \bar{\sigma} \\ \mathcal{L}_{\sigma\pi\pi} = -g_{\sigma\pi\pi} \bar{\sigma} \bar{\pi} \bar{\pi} \\ \mathcal{L}_{\Upsilon''\Upsilon G} = f g^2 (\partial_\mu \Upsilon''_\alpha)(\partial_\nu \Upsilon_\alpha) G_{\mu\nu} \\ \mathcal{L}_{G\pi\pi} = g_{G\pi\pi} G_{\mu\nu} (\partial_\mu \pi \cdot \partial_\nu \pi) \\ \mathcal{L}_{\Upsilon''\Upsilon\pi^2} = \xi_{\pi\pi} \Upsilon''_\alpha \Upsilon_\alpha \pi^2 \end{cases}$$

3. ππ散乱振幅



線形σ模型

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \sigma)^2 + (\partial_\mu \pi)^2\right] - \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2+\pi^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2+\pi^2)^2$$

$\sigma = \sigma' + \sigma_0$ (σの真空期待値 $\langle\sigma\rangle_0 \equiv \sigma_0 = f_\pi$)

$g_{\sigma\pi\pi} = f_\pi \lambda = \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{2f_\pi}$ $\left(\begin{array}{l} m_\sigma^2 = \mu^2 + 3\lambda f_\pi^2 \\ m_\pi^2 = \mu^2 + \lambda f_\pi^2 \end{array}\right.$

ππ散乱振幅

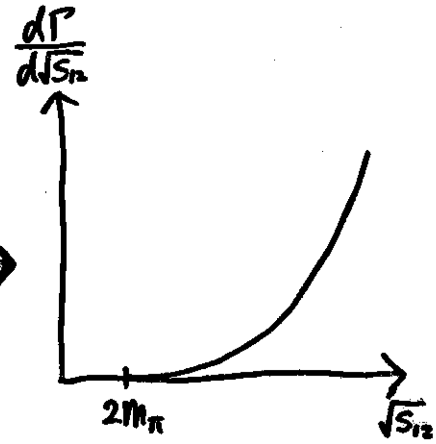
$$T_{\pi\pi} = \frac{(-2g_{\sigma\pi\pi})^2}{m_\sigma^2 + (p_1+p_2)^2} - 2\lambda$$

$$= \frac{1}{f_\pi^2}\left[\frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)^2}{m_\sigma^2 + (p_1+p_2)^2} - (m_\sigma^2 - m_\pi^2)\right]$$

$$= \frac{1}{f_\pi^2}\frac{(m_\sigma^2 - m_\pi^2)(-(p_1+p_2)^2 - m_\pi^2)}{m_\sigma^2 + (p_1+p_2)^2}$$

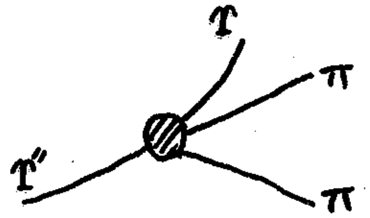
$$\overset{m_\sigma^2 \gg -(p_1+p_2)^2}{\sim} \frac{-(p_1+p_2)^2 - m_\pi^2}{f_\pi^2} \sim O(p^2) \longrightarrow$$

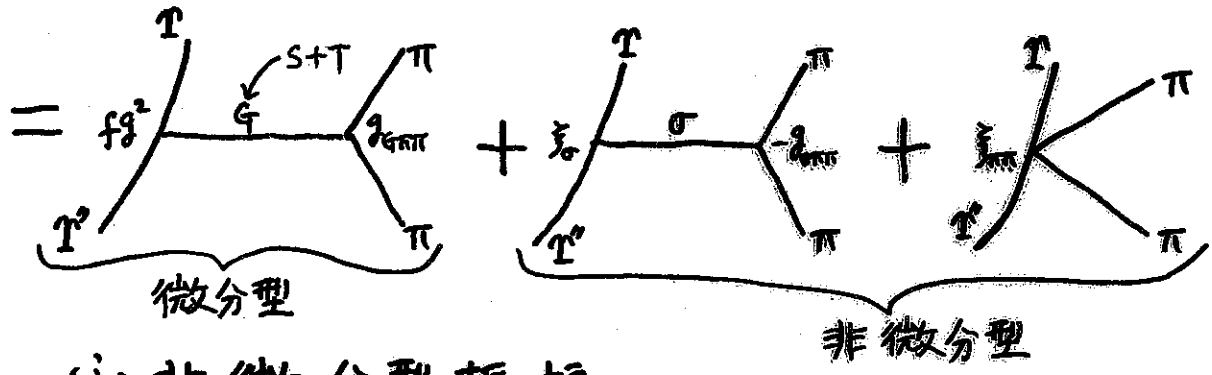
$-(p_1+p_2)^2 = s_{12}$



σ振幅とλπ⁴振幅が相殺しているため
ππ thresholdからのゆるやかな立ち上がりを示している

4. Υ崩壊過程での$\pi\pi$生成振幅





(i) 非微分型振幅

$\Upsilon(nS) \longrightarrow \Upsilon(mS)\pi\pi$過程に対応するカイラル不変な線形$\sigma$模型の有効ラグランジアンを考える

$$\mathcal{L}^{(n)}_{\mathrm{eff.}} = \xi \Upsilon'^{\mu} \Upsilon_\mu (\sigma^2 + \pi^2)$$

$\sigma = \underset{f_\pi}{\underset{\shortparallel}{\sigma_0}} + \sigma'$ を代入 $\longrightarrow \begin{cases} \xi_\sigma = 2 f_\pi \xi \\ \xi_{\pi\pi} = \xi \end{cases}$

$$g_{\sigma\pi\pi} = \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{2 f_\pi}$$

$\pi\pi$生成振幅

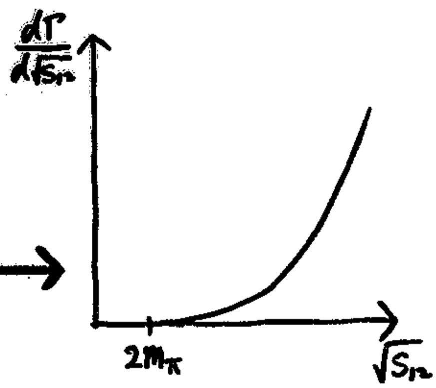
$$\mathcal{T}^{(n)}_{\pi\pi} = \xi_\sigma \frac{1}{m_\sigma^2 + (p_1+p_2)^2}(-2g_{\sigma\pi\pi}) + 2\xi_{\pi\pi}$$

cancel

$$= 2\xi \left[\frac{m_\pi^2 - m_\sigma^2}{m_\sigma^2 + (p_1+p_2)^2} + 1 \right]$$

$$= 2\xi \frac{(p_1+p_2)^2 + m_\pi^2}{m_\sigma^2 + (p_1+p_2)^2} \qquad m_\sigma^2 \gg -(p_1+p_2)^2$$

$$\propto (p_1+p_2)^2 + m_\pi^2 \sim O(p^2) \longrightarrow$$



$\Upsilon(2S) \longrightarrow \Upsilon(1S)\pi\pi$ は説明できても

$\Upsilon(3S) \longrightarrow \Upsilon(1S)\pi\pi$ は説明できない

(ii) 微分型振幅

次に、カイラル不変な微分型有効ラグランジアンを考える

$$\mathcal{L}^{(d)}_{\text{eff.}} = \xi^{(d)} \partial_\mu \underset{\Upsilon(3S)}{\Upsilon'^{\lambda}} \partial_\nu \underset{\Upsilon(1S)}{\Upsilon_\lambda} (\partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma + \partial_\mu \pi \cdot \partial_\nu \pi)$$

ππ生成振幅

$$\mathcal{F}^{(d)}_{\pi\pi} = -\xi^{(d)} (P' \cdot p_1 \, P \cdot p_2 + P' \cdot p_2 \, P \cdot p_1) \overbrace{\varepsilon(P) \cdot \varepsilon(P')}^{\sim 1 \ (m^2_{\Upsilon'}, m^2_{\Upsilon} \gg s_{12})}$$

$P'_\mu (P_\mu)$ は $\Upsilon' (\Upsilon)$ の運動量、$p_{1\mu}, p_{2\mu}$ は π の運動量

質量の大小関係

$$M_{\Upsilon'} > M_{\Upsilon} \gg M_{\Upsilon'} - M_{\Upsilon} \gg m_\pi$$

$$\begin{cases} M_{\Upsilon'} = 10.355 \text{GeV} \\ M_{\Upsilon} = 9.46 \text{GeV} \\ m_\pi = 0.14 \text{GeV} \end{cases}$$

⟶ Υ', Υ はほとんど静止

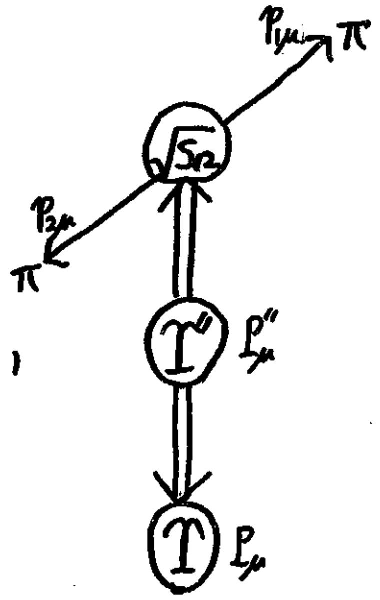
↓

pion energy

$$\mathcal{F}^{(d)}_{\pi\pi} \approx -2\xi^{(d)} M_{\Upsilon'} M_{\Upsilon} p_{10} p_{20}$$

さらに ππ threshold 近傍で $p_{10} = p_{20} = \dfrac{M_{\Upsilon'} - M_{\Upsilon}}{2}$

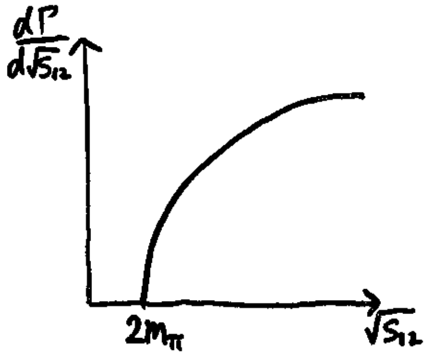
$$\mathcal{F}^{(d)}_{\pi\pi} \approx -2\xi^{(d)} M_{\Upsilon'} M_{\Upsilon} \left(\frac{M_{\Upsilon'} - M_{\Upsilon}}{2}\right)^2 = \underline{\text{定数}}$$



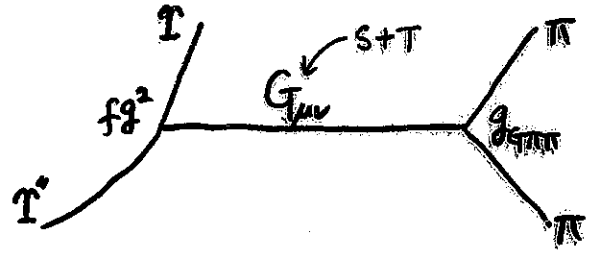
⟶ $\mathcal{F}^{(d)}_{\pi\pi}$ が ππ threshold 近傍で小さくならない

↓

微分型ラグランジアンでは、$\Upsilon(3S) \to \Upsilon(1S)\pi\pi$ の threshold 近傍のスペクトルが説明できる



微分型振幅の起源



$$G_{\mu\nu} \approx \sum_{a=1}^{8} g_\mu^a g_\nu^a$$
$$\Downarrow$$
$$G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$$

$$\mathcal{L}^{(d)} = \left(\mathcal{L}_{\Upsilon''\Upsilon G},\ \mathcal{L}_{G\pi\pi}\right)$$

$$\Upsilon'' \to \Upsilon G, \quad G \to \pi\pi$$

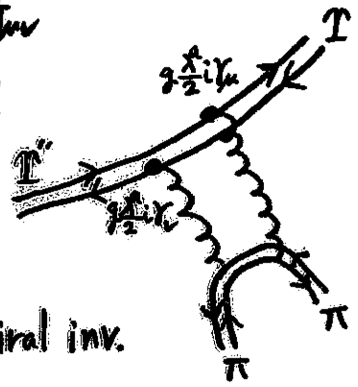
spinor wave function

$$\begin{cases} \Upsilon'' \longrightarrow U(v'') = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, i\varepsilon(p'')\cdot\gamma\,(1+iv''\cdot\gamma), & v''_\mu = \frac{p''_\mu}{M_{\Upsilon''}} \\ \Upsilon \longrightarrow \overline{U}(v) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+iv\cdot\gamma)\, i\tilde{\varepsilon}(p)\cdot\gamma, & v_\mu = \frac{p_\mu}{M_\Upsilon} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_{\Upsilon''\Upsilon G} = fg^2 (\partial_\mu \Upsilon''_\alpha)(\partial_\nu \Upsilon_\alpha) G_{\mu\nu} \longrightarrow G_{\mu\nu} = G^{(S)}_{\mu\nu} + G^{(T)}_{\mu\nu}$$

同程度

$$\hookrightarrow \mathcal{F}_{\Upsilon''\Upsilon G} \approx fg^2\, \mathrm{Tr}\left[i\gamma_\nu \overline{U}(v)\, i\gamma_\mu U(v'')\right] \varepsilon^G_{\mu\nu}$$
$$\approx \tilde{\varepsilon}(p)\cdot\varepsilon(p'')\,\frac{fg^2}{2}(v_\mu v''_\nu + v''_\mu v_\nu)\,\varepsilon^G_{\mu\nu}$$



$$\mathcal{L}_{G\pi\pi} = g_{G\pi\pi} G_{\mu\nu}(\partial_\mu \pi\cdot\partial_\nu\pi + \partial_\mu\sigma\,\partial_\nu\sigma) \Longleftarrow \text{chiral inv.}$$

$$\hookrightarrow \mathcal{F}_{G\pi\pi} \approx g_{G\pi\pi}(p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\mu})\,\varepsilon^G_{\mu\nu}$$

$$\mathcal{F}^{(d)}_{\pi\pi} \approx \tilde{\varepsilon}(p)\cdot\varepsilon(p'')\,\frac{fg^2}{2}(v_\mu v''_\nu + v''_\mu v_\nu)\left[\frac{P^S_{\mu\nu:\lambda\kappa}}{m^2_{G^S} - s_{12}} + \frac{P^T_{\mu\nu:\lambda\kappa}}{m^2_{G^T} - s_{12}}\right] g_{G\pi\pi}(p_{1\lambda}p_{2\kappa} + p_{1\kappa}p_{2\lambda})$$

$$m^2_{G^S} \approx m^2_{G^T} \equiv m^2_G \gg s_{12} \qquad p_{12} = p_1 + p_2$$

$$P^S_{\mu\nu:\lambda\kappa} + P^T_{\mu\nu:\lambda\kappa} = \frac{1}{2}(\tilde{\delta}_{\mu\lambda}\tilde{\delta}_{\nu\kappa} + \tilde{\delta}_{\nu\lambda}\tilde{\delta}_{\mu\kappa}), \quad \tilde{\delta}_{\mu\lambda} = \delta_{\mu\lambda} + \frac{p_{12\mu}p_{12\lambda}}{m^2_G} \approx \delta_{\mu\lambda}$$

$$\mathcal{F}^{(d)}_{\pi\pi} \approx \tilde{\varepsilon}(p)\cdot\varepsilon(p'')\, fg^2\, v_\mu v''_\nu\, \tilde{\delta}_{\mu\lambda}\tilde{\delta}_{\nu\kappa}\,\frac{1}{m^2_G - s_{12}}\, g_{G\pi\pi}(p_{1\lambda}p_{2\kappa} + p_{1\kappa}p_{2\lambda})$$

$$\therefore\ \mathcal{F}^{(d)}_{\pi\pi} = -\xi^{(d)}\left\{(P''\cdot p_1)(P\cdot p_2) + (P''\cdot p_2)(P\cdot p_1)\right\}\tilde{\varepsilon}(P)\cdot\varepsilon(P''), \quad \xi^{(d)} = \frac{fg^2 g_{G\pi\pi}}{m^2_G M_{\Upsilon''} M_\Upsilon}$$

5、一般的な生成振幅及び崩壊率

解析で用いるππ生成振幅$\mathcal{F}_{\pi\pi}$は

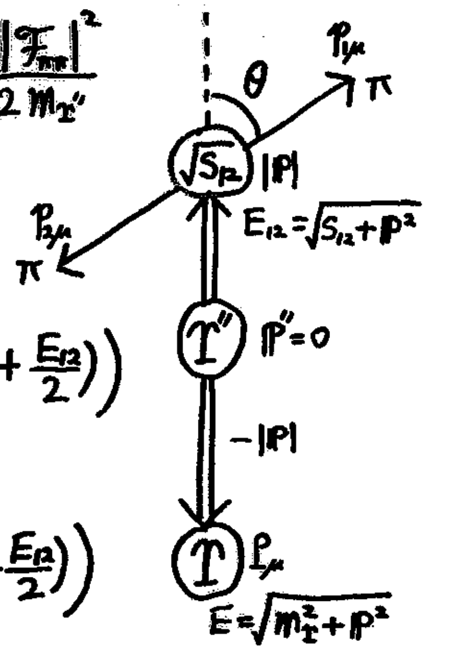
$$\mathcal{F}_{\pi\pi}=\mathcal{F}_{\pi\pi}^{(n)}+\mathcal{F}_{\pi\pi}^{(d)}$$

$$=2\xi e^{i\theta_\sigma}\frac{m_\pi^2-s_{12}}{m_\sigma^2-s_{12}-i\sqrt{s_{12}}\underbrace{\Gamma_\sigma(s_{12})}_{\frac{g^2_{\sigma\pi\pi}}{16\pi}\sqrt{1-\frac{4m_\pi^2}{s_{12}}}}}-\xi^{(d)}\left\{(P''\cdot p_1)(P\cdot p_2)+(P''\cdot p_2)(P\cdot p_1)\right\}$$

$$\left(\xi_{\pi\pi}=\xi,\ \xi_\sigma=2f_\pi\xi\right)$$

崩壊率(一般的な式)

$$\Gamma=\int\frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1}\frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2}\frac{d^3P}{(2\pi)^3 2E}(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+P-P'')$$
$$\times\frac{1}{3}\sum_{i,j}\left|\tilde{\varepsilon}_\mu^{(i)}(v)\,\varepsilon_\mu^{(j)}(v')\right|^2\frac{|\mathcal{F}_{\pi\pi}|^2}{2m_{\Upsilon''}}$$



各運動量の成分

$$\begin{cases}
p_{1\mu}=\left(q\sin\theta\cos\phi,\ q\sin\theta\sin\phi,\ \frac{E_{12}}{\sqrt{s_{12}}}q\cos\theta+\frac{|P|}{2}\ ;\ i\left(\frac{|P|}{\sqrt{s_{12}}}q\cos\theta+\frac{E_{12}}{2}\right)\right)\\
p_{2\mu}=\left(-q\sin\theta\cos\phi,\ -q\sin\theta\sin\phi,\ -\frac{E_{12}}{\sqrt{s_{12}}}q\cos\theta+\frac{|P|}{2}\ ;\ i\left(-\frac{|P|}{\sqrt{s_{12}}}q\cos\theta+\frac{E_{12}}{2}\right)\right)\\
P_\mu=\left(0,0,-|P|\ ;\ iE\right)\\
P''_\mu=\left(0,0,0\ ;\ im_{\Upsilon''}\right)
\end{cases}$$

$$q=\sqrt{\frac{s_{12}}{4}-m_\pi^2}$$

q: ππ重心系でのπの運動量

崩壊率

$$\Gamma=\frac{1}{2m_{\Upsilon''}}\int\frac{d\sqrt{s_{12}}}{\pi}\int_{-1}^{1}d(\cos\theta)\frac{|P(s_{12})|}{4\pi m_{\Upsilon''}}\frac{\overset{q}{|p_1(s_{12})|}}{8\pi}\frac{1}{3}\sum_{i,j}\left|\tilde{\varepsilon}_\mu^{(i)}(v)\,\varepsilon_\mu^{(j)}(v')\right|^2\left|\mathcal{F}_{\pi\pi}(s_{12},\cos\theta)\right|^2$$

$\longrightarrow$ $\frac{d\Gamma}{d\sqrt{s_{12}}}$, $\frac{d\Gamma}{d(\cos\theta)}$ を実験結果と比べる

6、解析

すべての過程で共通の値をとる
$$\begin{cases} m_\sigma = 0.563\,\mathrm{GeV} \\ \Gamma_\sigma = 0.372\,\mathrm{GeV} \quad (g_{\sigma\pi\pi} = 3.48\,\mathrm{GeV}) \end{cases}$$

$\Upsilon(2S) \longrightarrow \Upsilon(1S)\pi\pi$

$\xi = 2.6 \times 10^3$ 〔無次元〕

$\xi^{(\omega)} = 25$ 〔GeV^{-4}〕

$\theta_\sigma = -28^\circ$

$\Upsilon(3S) \longrightarrow \Upsilon(1S)\pi\pi$

$\xi = 218$ 〔無次元〕

$\xi^{(\omega)} = 46$ 〔GeV^{-4}〕

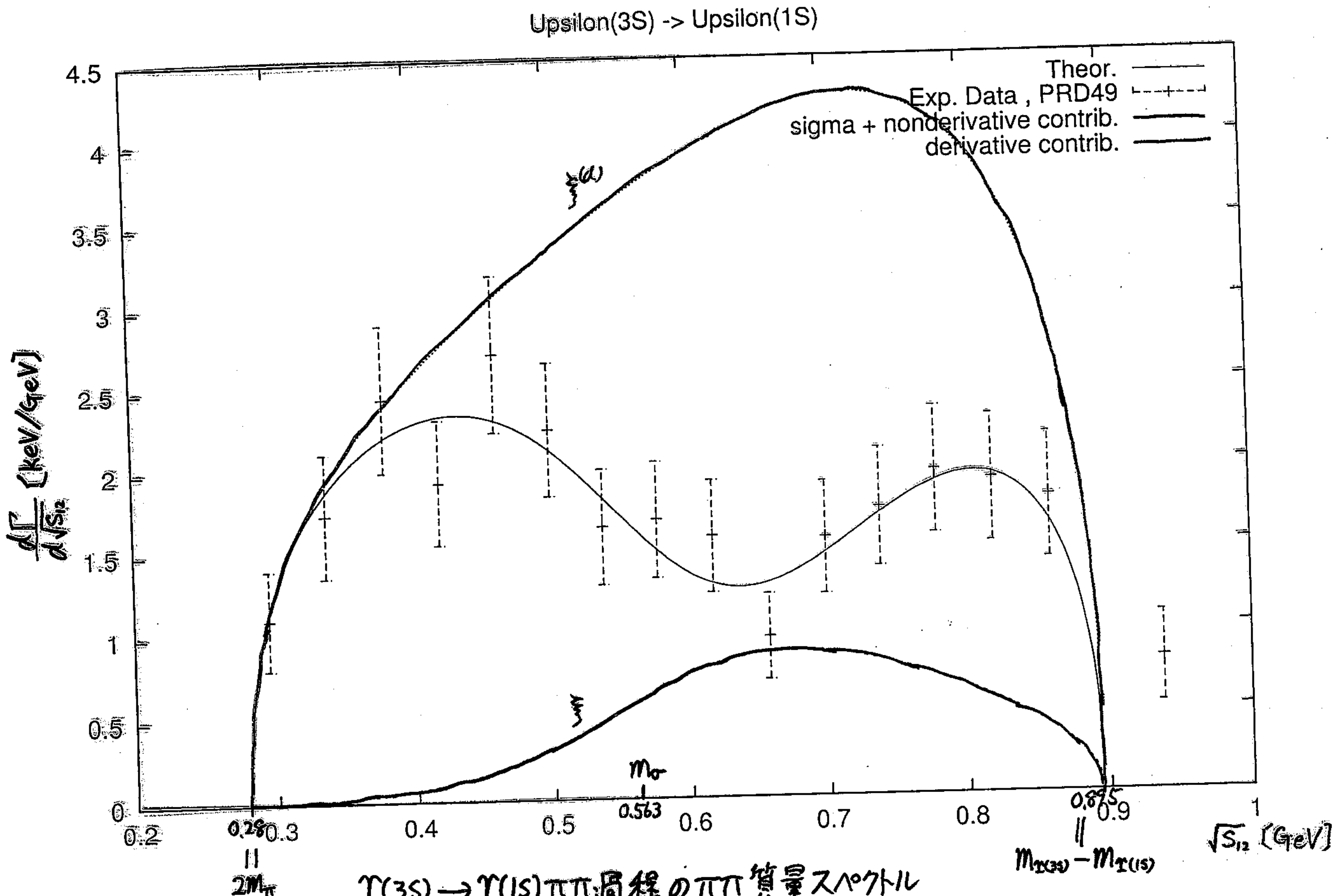
$\theta_\sigma = 248^\circ$

$\Upsilon(3S) \longrightarrow \Upsilon(2S)\pi\pi$

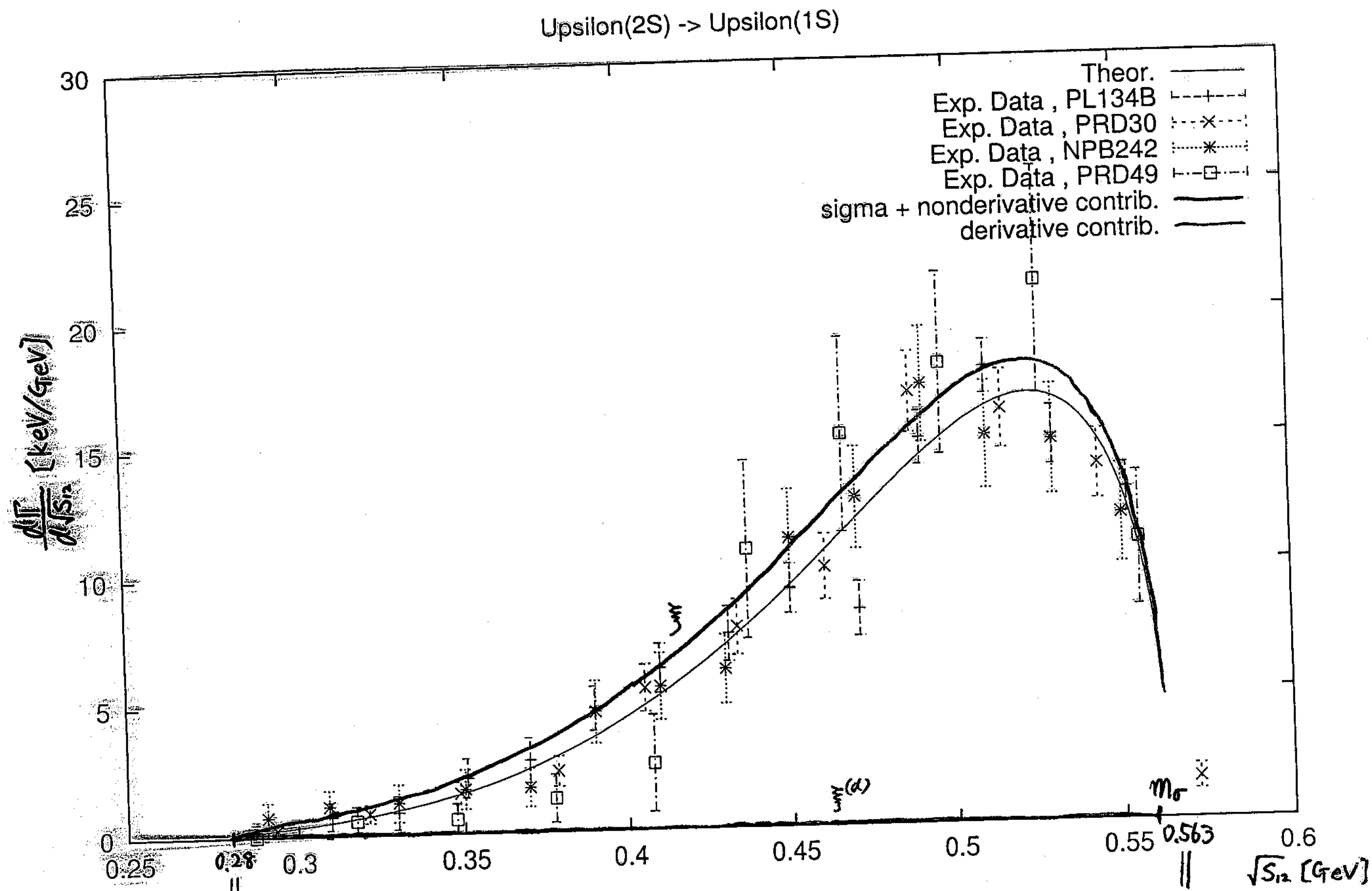
$\xi = 1.77 \times 10^4$ 〔無次元〕

$\xi^{(\omega)} = 2.05 \times 10^3$ 〔GeV^{-4}〕

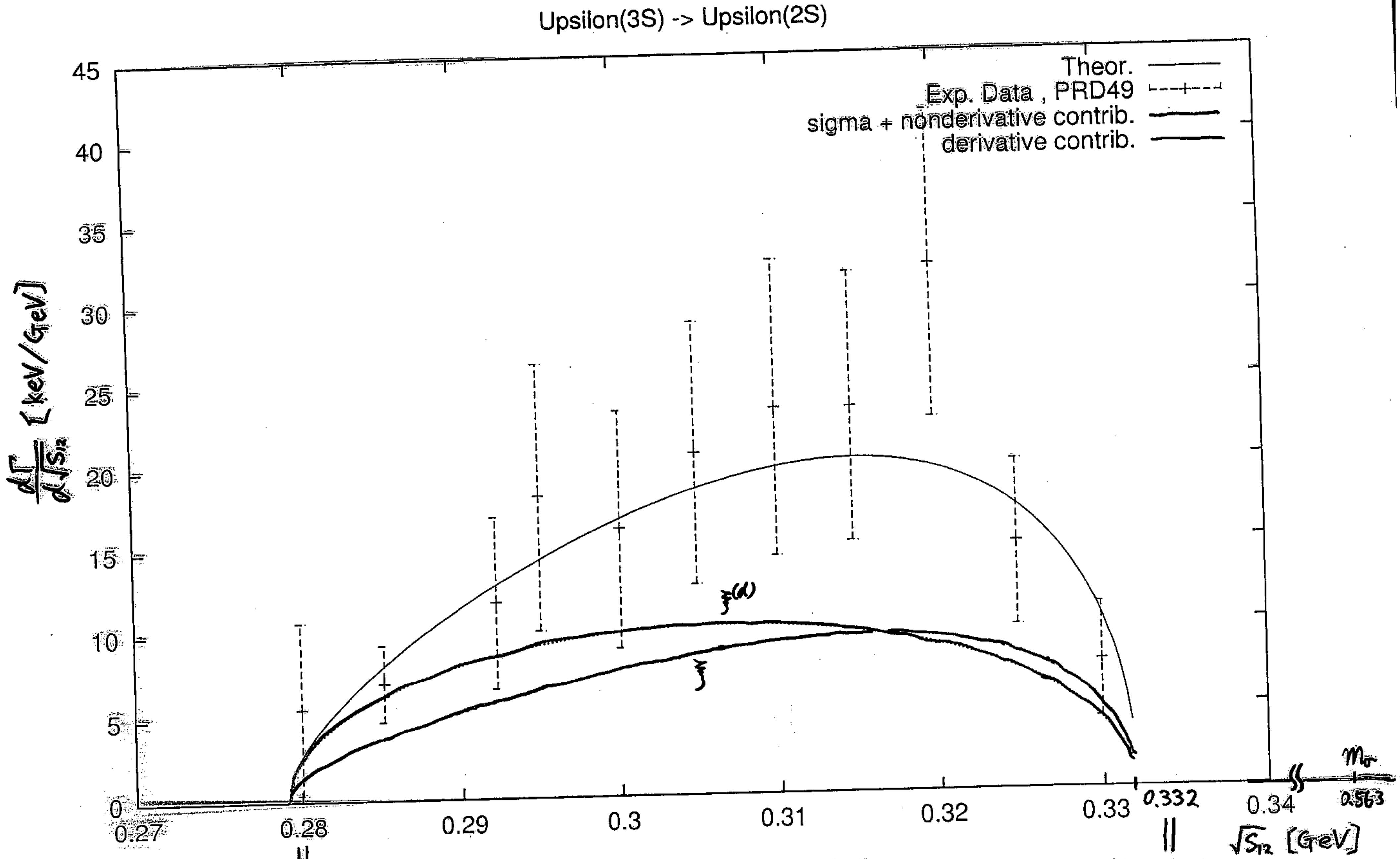
$\theta_\sigma = 66^\circ$



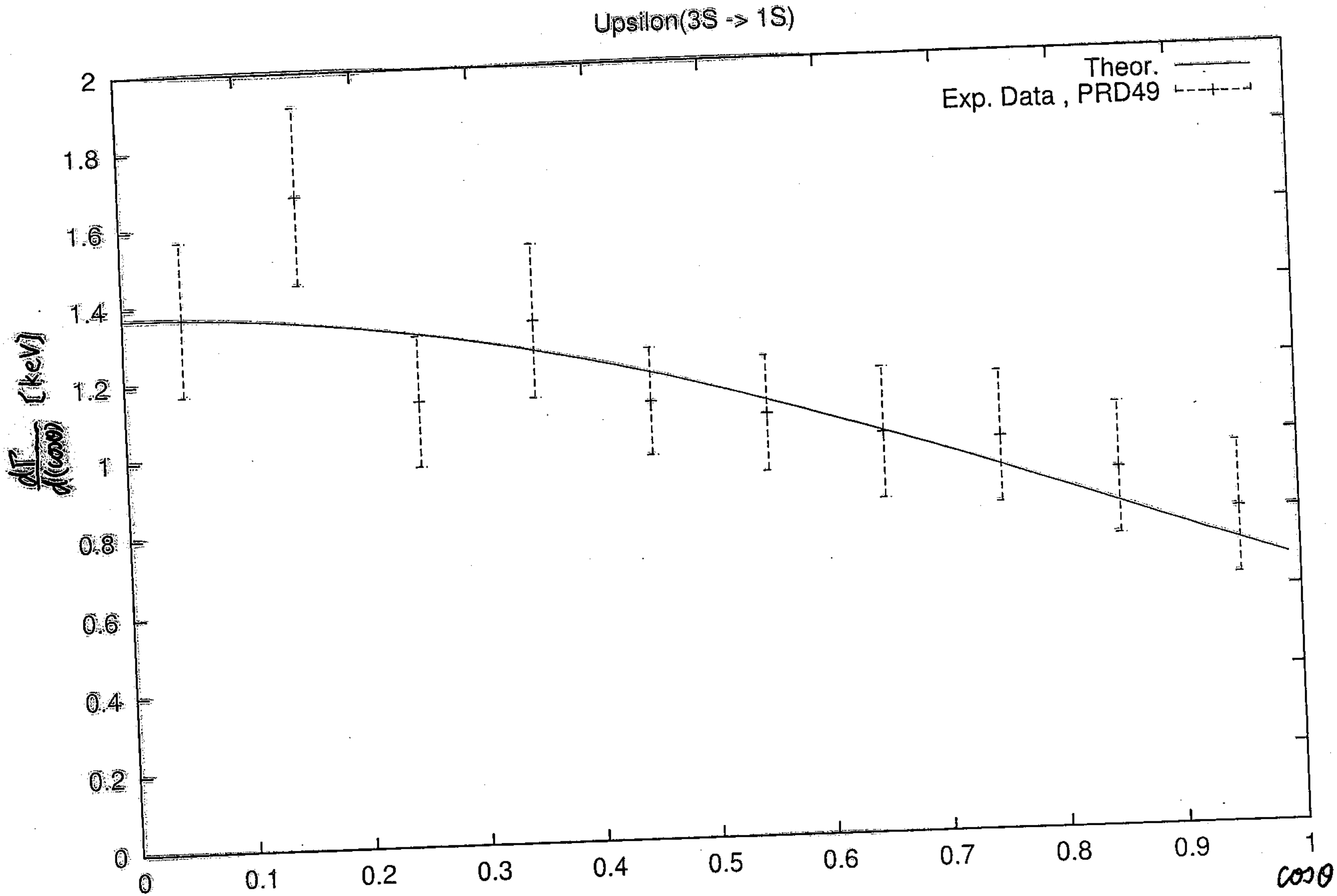
$\Upsilon(3S) \rightarrow \Upsilon(1S)\pi\pi$過程の$\pi\pi$質量スペクトル



$\Upsilon(2S) \longrightarrow \Upsilon(1S)\pi\pi$過程の$\pi\pi$質量スペクトル



$\Upsilon(3S)\to\Upsilon(2S)\pi\pi$過程の$\pi\pi$質量スペクトル



$\Upsilon(3S) \longrightarrow \Upsilon(1S)\pi\pi$ 過程の $\pi\pi$ 角分布

7、まとめと課題

まとめ

- カイラル対称性から要求される制限と矛盾しない振幅を用いて、Υ崩壊過程に対する$\pi\pi$質量分布及び角分布のスペクトルの形が説明できた。
- universality argument は Energy release ΔE が m_π に比べて十分に大きいため成り立たない。

$\pi\pi$生成過程と$\pi\pi$散乱過程の違い

	$\pi\pi$生成過程	$\pi\pi$散乱過程
Energy release ΔE	一般に大きい $\gg m_\pi$	threshold付近で 0
振幅の形	$P'\cdot P_1$ $P\cdot P_2$ $\pi\pi$ threshold付近でも大きい $\sim O(M\Delta E)^2$	$P_1\cdot P_2$ 等 $\pi\pi$ threshold付近で小さい $\sim O(m_\pi^2)$
$\pi\pi$ threshold付近でのσと2π振幅の相殺	一般には起こらない	起こる
Adler 0 ($P_{\mu} \to 0$)	存在するが、ΔEが大きいために$\sqrt{s}$が小さい領域に対応しない	存在する
スペクトルの特徴	多くの場合、$\pi\pi$ thresholdからの鋭い立ち上がりを示すσ共鳴のpeakが直接観測される	$\pi\pi$ thresholdで小さいσの直接のpeakは観測されない

$M_{\Upsilon(3S)} = 10.355\,\mathrm{GeV}$　　$\Upsilon(3S)\to\Upsilon(1S)\pi\pi$, $\Delta E = 895\,\mathrm{MeV}$

$M_{\Upsilon(2S)} = 10.023\,\mathrm{GeV}$　　$\Upsilon(2S)\to\Upsilon(1S)\pi\pi$, $\Delta E = 563\,\mathrm{MeV}$

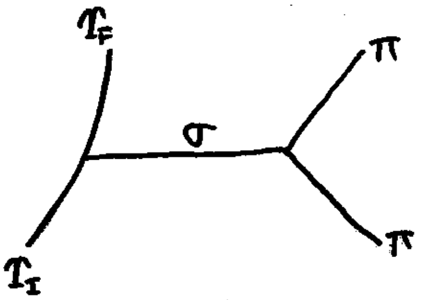
$M_{\Upsilon(1S)} = 9.46\,\mathrm{GeV}$　　$\Upsilon(3S)\to\Upsilon(2S)\pi\pi$, $\Delta E = 332\,\mathrm{MeV}$

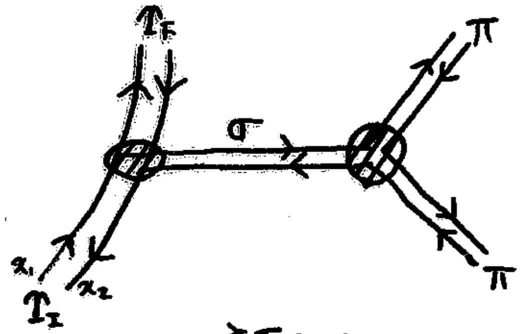
$m_\pi = 0.14\,\mathrm{GeV}$

今後の課題

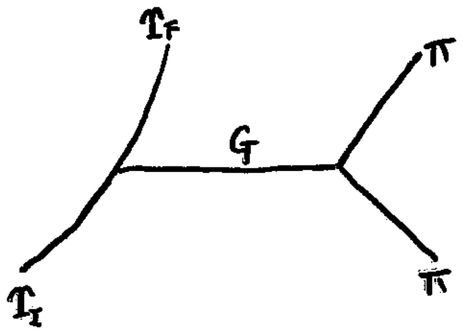
$\frac{fg^2 g_{G\pi\pi}}{m_G^2 M_{\Upsilon''} M_{\Upsilon}}$

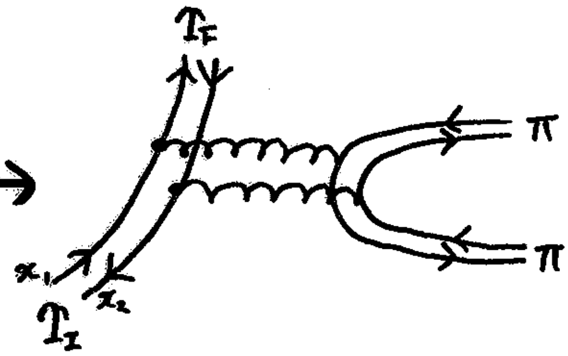
・過程ごとに異なる結合定数(ξ, $\xi^{(\omega)}$)の値をΥ mesonの構造の違い(例えばform factor)によって説明できるか検討する。





$\xi \longrightarrow \xi F_1(s_{12})$





$$\xi^{(\omega)}\left(=\frac{fg^2 g_{G\pi\pi}}{m_G^2 M_{\Upsilon_I} M_{\Upsilon_F}}\right) \longrightarrow \frac{fg^2 g_{G\pi\pi}}{m_G^2 M_{\Upsilon_I} M_{\Upsilon_F}} F_2(s_{12})$$