Possible break-down of chairal SU(2)

2001-10-3　日大理工コロキウム

藤田保健衛生大学　手嶋久三
梅沢栄三

Weyl fermion の SU(2) 二重項 : $\begin{pmatrix} u_w \\ d_w \end{pmatrix}$ が 1つ

の理論では、 gauge 不変な fermion の凝縮はおきない。

∵

$$\begin{cases} u_L = \begin{pmatrix} 0 \\ u_w \end{pmatrix} \\ d_L = \begin{pmatrix} 0 \\ d_w \end{pmatrix} \end{cases} \quad \cdots \text{ chairal 4-comp. spinor}$$

$$\cdot\ \Psi = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$$

$$\cdot\ i\sigma^2 \Psi^c = \begin{pmatrix} d_L^c \\ -u_L^c \end{pmatrix} \quad \cdots \text{ SU(2) 二重項}$$

$$(\ \Psi^c \equiv i\gamma^2 \Psi^*)$$

gauge invariants :

$$\bar{\Psi}\Psi = \bar{u}_L u_L + \bar{d}_L d_L = 0$$

$$\bar{\Psi} i\sigma^2 \Psi^c = \bar{u}_L d_L^c - \bar{d}_L u_L^c = 0$$

$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle$。 , $\langle \bar{\Psi} i\sigma^2 \Psi^c + h.c. \rangle$ は 0 しかありえない。

一般に奇数個の場合、

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} u_{L1} \\ d_{L1} \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} u_{L2} \\ d_{L2} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \psi_{2n+1}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi_{\mathrm{I}} &= \psi_1 + i\sigma^2 \psi_2^c \\ \psi_{\mathrm{II}} &= \psi_3 + i\sigma^2 \psi_4^c \\ &\vdots \\ \psi_N &= \psi_{2n-1} + i\sigma^2 \psi_{2n}^c \end{aligned}\right\} \quad n \text{コの Dirac 4-spinor}$$

Strong coupling reagion で Chiral Symmetry Breaking :

$$\langle \bar{\psi}_{\mathrm{I}} \psi_{\mathrm{I}} \rangle_0, \quad \cdots, \quad \langle \bar{\psi}_N \psi_N \rangle_0 \neq 0$$

でも、1組の Weyl fermion (ψ_{2n+1}) は mass less のまま！

"it is hard to belive that the fermion could remain massless in the presence of Strong SU(2) forces at long distance."

chairal SU(2) 二重項が奇数個の理論は
どこかおかしいに違いない！

↳ global anomaly (E. Witten, Phys. Lett. 117B (1982))

— global anomaly —

$$\langle 0|0\rangle = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi_L \mathcal{D}\bar{\psi}_L \exp\left[-\int d^4x \left(\frac{1}{2g^2}\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi}_L i\not{D}\psi_L\right)\right]$$

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp\left[-\int \bar{\psi} i\not{D}\psi\right] = \det(i\not{D})$$

$$\parallel$$

$$\int \mathcal{D}\psi_L \mathcal{D}\bar{\psi}_L \exp\left[-\int \bar{\psi}_L i\not{D}\psi_L\right] \cdot \int \mathcal{D}\psi_R \mathcal{D}\bar{\psi}_R \exp\left[-\int \bar{\psi}_R i\not{D}\psi_R\right]$$

$$\parallel$$

$$\left(\int \mathcal{D}\psi_L \mathcal{D}\bar{\psi}_L \exp\left[-\int \bar{\psi}_L i\not{D}\psi_L\right]\right)^2$$

$\therefore$

$$\int \mathcal{D}\psi_L \mathcal{D}\bar{\psi}_L \exp\left[-\int \bar{\psi}_L i\not{D}\psi_L\right] = \underset{\sim\sim}{\pm} \left\{\det(i\not{D})\right\}^{\frac{1}{2}}$$

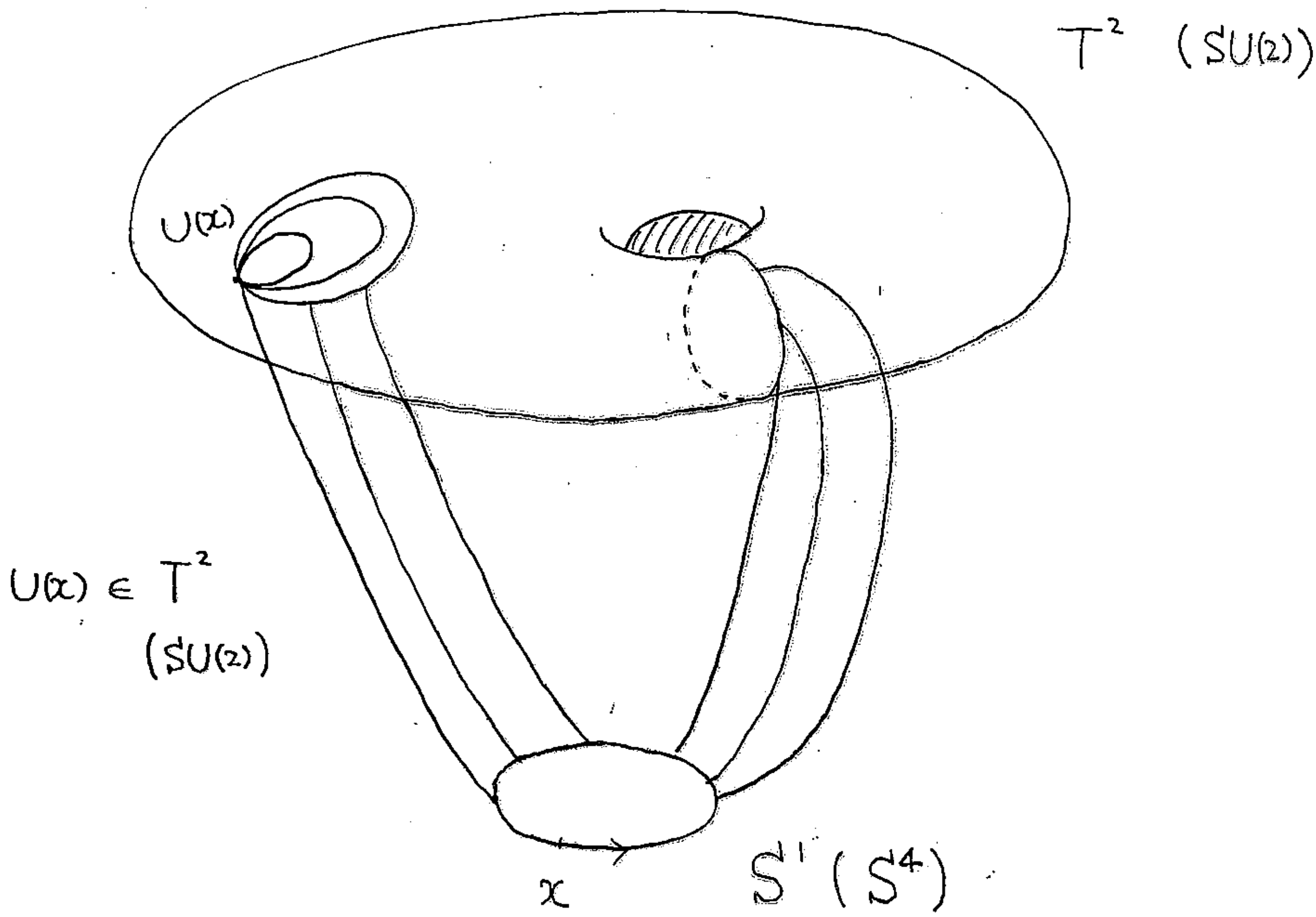
"巻きつきあり"の gauge 変換
で ± が入れ換る

$$\pi^4(SU(2)) = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$$

巻きつきなし. 巻きつきあり

π^4 : 4次の homotopy group

ex. $\pi^1(T^2) = \mathbb{Z}$: 整数



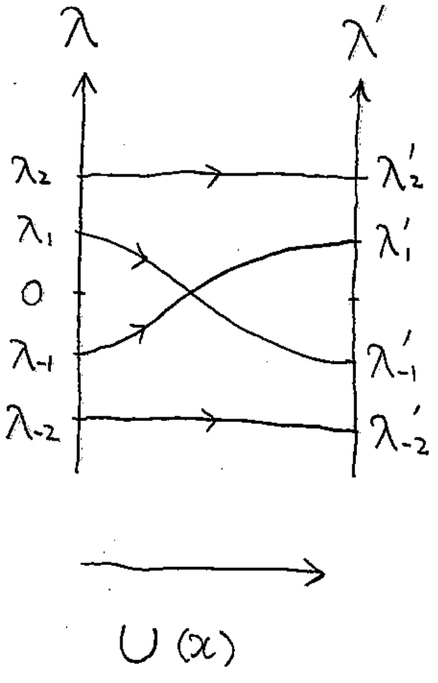
$$\left\{ \det i \not{D}(A_\mu) \right\}^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[U(x)]{} - \left\{ \det i \not{D}(A_\mu^U) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{cases} U(x): & SU(2) \text{ に“巻きついた”方に属する gauge 変換} \\ A_\mu^U = U^\dagger A_\mu U - i U^\dagger \partial_\mu U \end{cases}$$

i.e.

$$\left\{ \det i \not{D} \right\}^{\frac{1}{2}} = \prod_{i=1}^{\infty} \lambda_i \ ;$$

$\lambda_i \in$ $i\not{D}$ の固有値



rearrangement が起り、

“0をはさんで、
奇数個が入れ換る”

---- the mode two index theorem

という訳で、

$$\langle 0|0\rangle = \int \mathcal{D}A_\mu \left\{\det i\not{D}(A_\mu)\right\}^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\int \frac{1}{2g^2} \mathrm{tr} F_{\mu\nu}^2\right]$$

$$= 0$$

同じく、

$\langle 0|\chi|0\rangle = 0$, χ : gauge invariant

$\therefore$

$$\frac{\langle 0|\chi|0\rangle}{\langle 0|0\rangle} = \frac{0}{0}$$

The theory is ill-defined.

- Standard Model では、

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}_{\underbrace{i=1,2,3}_{SU(3)\ \text{color}}} , \quad \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$$

----- 各世代ごとに4コ（偶数）

- $\pi^4(G) = 0$ でも $G \supset SU(2)$ なら

global anomaly の危険性あり

"chairal anomaly free のための G の表現に対する条件は、global anomaly free の十分条件"

low energy での SU(2) 理論 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Confinement} \cdots\cdots \times \\ \text{Dynamical Symmetry Breaking} \cdots ? \end{array} \right.$

$$Q \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_L + i\sigma^2 \psi_L^c \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u_L + d_L^c \\ d_L - u_L^c \end{pmatrix} \cdots \text{SU(2) 二重項}$$

$$\left(\cdot \ \bar{Q} Q = 0 \right)$$

$$\cdot \ \bar{Q} \sigma^3 Q = \overline{u_L} d_L^c + \overline{d_L^c} u_L \neq 0 \quad \text{in general.}$$

---- $e^{i\theta_3 \frac{\sigma^3}{2}}$ 対称性以外は破れる

$\langle \bar{Q} \sigma^3 Q \rangle_0$ は起きるか？

($SU(2) \rightarrow U(1) \ni e^{i\theta_3 \frac{\sigma^3}{2}}$ というD.S.B.)

Naive に考えると $\overline{u}_L d_L^c + \overline{d}_L^c u_L$ は

Attractive channel でなく、D.S.B. は起らないと

思えるが、本当?

" S-D eq. で検討にみる"

fermion propagators :

$$\overline{\Psi}_L i \not\partial \Psi_L + g \overline{\Psi}_L \not{W} \Psi_L = \overline{Q} i \not\partial Q + g \overline{Q} \not{W} Q$$

$$\left(Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u_L + d_L^c \\ d_L - u_L^c \end{pmatrix} \right)$$

$$\downarrow$$

$$i \, \mathrm{F.T.} \langle 0 | T Q(y) \overline{Q}(x) | 0 \rangle = \frac{1}{M^2 - A^2 p^2} \begin{pmatrix} A\not{p} + M, & 0 \\ 0 & , A\not{p} - M \end{pmatrix}$$

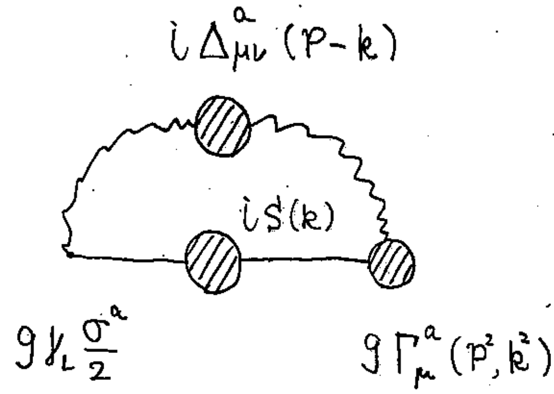
$$\parallel\!\!|$$

$$i S(p)$$

$$i S^{-1}(p) = A(p^2) \not{p} - M(p^2) \sigma^3$$ … fermion の 2点頂点関数

S-D eq. for fermions

$$\left\{ A(p^2)\not{p} - M(p^2)\sigma^3 \right\} - Z_2 \not{p} = Z_1$$



- Landau gauge , ghost 場 , gauge 場の3点vertex 無視

$\longrightarrow$ $Z_1 = Z_2 = 1$ (QED like)

$\longrightarrow$ $A(p^2) = 1$

- Euclid 化

- $g^2\Gamma^a_\mu(p^2,k^2) \longrightarrow g^2(\ell^2)\gamma_\mu \frac{\sigma^a}{2}$, $\ell^2 \equiv \max(p^2,k^2)$

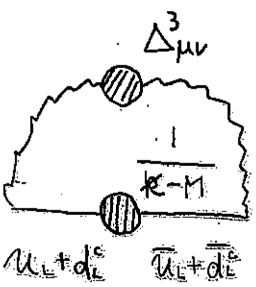
- $$\begin{cases} \Delta^3_{\mu\nu}(p^2) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\frac{1}{p^2 - m_3^2(p^2)} & (m_3^2(0) = 0) \\ \Delta^{1,2}_{\mu\nu}(p^2) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\frac{1}{p^2 - m^2(p^2)} & (m^2(0) \neq 0) \end{cases}$$

$$M(p^2) = \frac{3}{16\pi}\int_0^\infty dk^2\,\frac{g^2(\ell^2)}{4\pi}\left\{\underbrace{\frac{1}{\ell^2+m_3^2(\ell^2)}}_{\text{①}} - \underbrace{\frac{2}{\ell^2+m^2(\ell^2)}}_{\text{②}}\right\}\frac{k^2 M(k^2)}{M^2(k^2)+k^2}$$

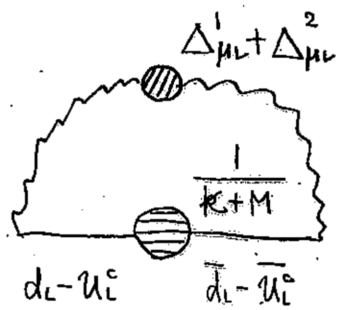
成分で考えると、

(fermion の有効作用) $\ni -\int d^4p\, M(p^2)\left(\bar{u}_L d_L^c + \bar{d}_L^c u_L\right)$,

$$M = \frac{1}{4}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 i}\, g^2 \gamma_\mu \Big(\quad \text{①} \quad + \quad \text{②} \quad \Big) \gamma_L$$



①



②

$m_3^2 = m^2 = 0$ とおくと、通常の QCD like 模型で χSB を考えるときの S-D eq. と右辺全体の符号を除いて一致。

↓

$W^\pm$ の質量 ($m^2(\ell^2)$) が大きく, ② が Suppress されていれば、解はあるだろう

(② ≪ ①)

S-D eq. $\to$ 微分方程式へ.

$$4N'' + 4\left(2 - \frac{R'}{R}\right)N' + \left(3 - 2\frac{R'}{R}\right)N = -4R\frac{N}{N^2+1}$$

$$\cdot \begin{cases} M(p^2) \equiv (p^2)^{\frac{1}{2}} N(t) & , \ t = \ln\left(p^2/\Lambda_{QCD}^2\right) \\ m_3^2 \equiv p^2 n_3^2(t) & \\ m^2 \equiv p^2 n^2(t) & \end{cases}$$

$$\cdot\ \lambda \equiv \frac{3}{16\pi}\frac{g^2}{4\pi}\Big(\underset{\underset{W^3}{\uparrow}}{\frac{1}{1+n_3^2}} - \underset{\underset{W^\pm}{\uparrow}}{\frac{2}{1+n^2}}\Big)$$

$$\cdot\ R \equiv \lambda - \lambda'$$

「S-D eq.（積分 eq.） = 微分 eq.」

のための条件

$$\begin{cases} ⓐ \quad \lim_{t\to -\infty} e^{\frac{3}{2}t} \dfrac{N+2N'}{R} = 0 \\ ⓑ \quad \lim_{t\to \infty} e^{\frac{1}{2}t} \left\{ N + \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{1-\lambda'/\lambda} (N+2N') \right\} = 0 \end{cases}$$

$$M(p^2=0) = \text{const.} \neq 0 \rightarrow \lim_{t\to -\infty} N \propto e^{-\frac{t}{2}}$$

⇩

t_I : Infra の scale （ ex. $= -100$ ）

$$\begin{cases} N(t_I) = \text{const.} \\ N'(t_I) = -\frac{1}{2} N(t_I) \end{cases} \quad \cdots\cdots \text{初期条件}$$

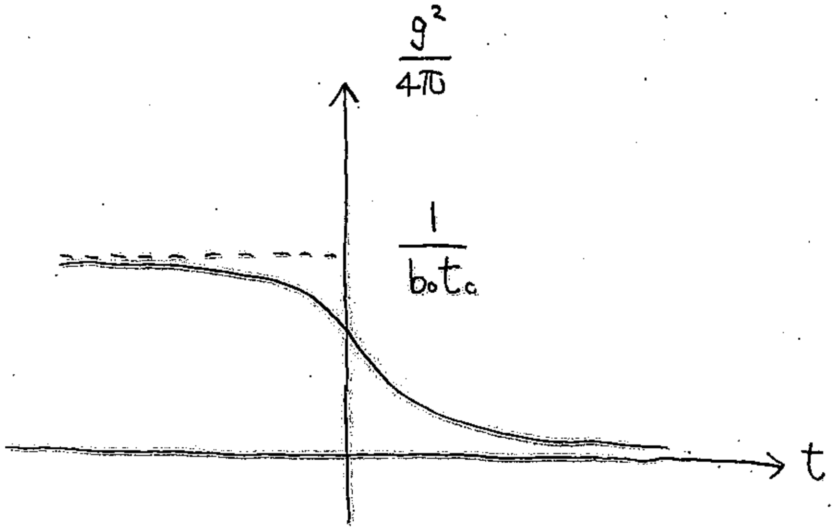
このとき、解が ⓑ を満足すれば、それは S-D eq. の解.

ⓑ : $\lim_{t\to\infty} N \rightarrow 0$

$$\lambda = \frac{3}{16\pi}\,\frac{g^2}{4\pi}\left(\frac{1}{1+n_3^2}-\frac{1}{1+n_3^2}\right)$$

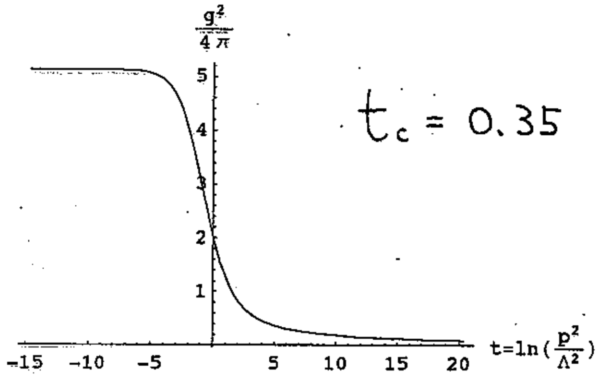
$$\frac{g^2}{4\pi} = \frac{1}{b_0 \ln\left(e^t + e^{t_c}\right)} = \begin{cases} \dfrac{1}{b_0 t} & \cdots \quad t \gg t_c \\[2ex] \dfrac{1}{b_0 t_c} : \text{const.} & \cdots \quad t \ll t_c \end{cases}$$

$$b_0 = \frac{7}{4\pi}$$



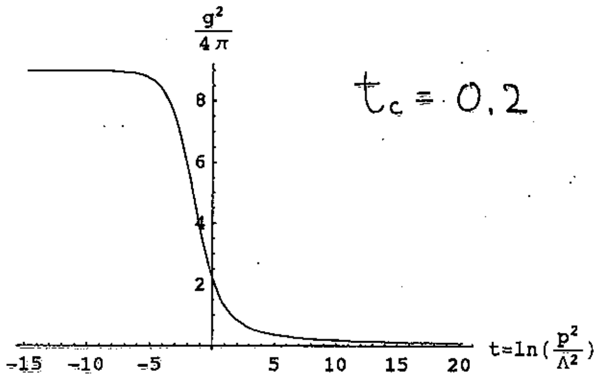
t_c : Coupling の大きさの目安

— gauge coupling —



$t_c = 0.35$

小

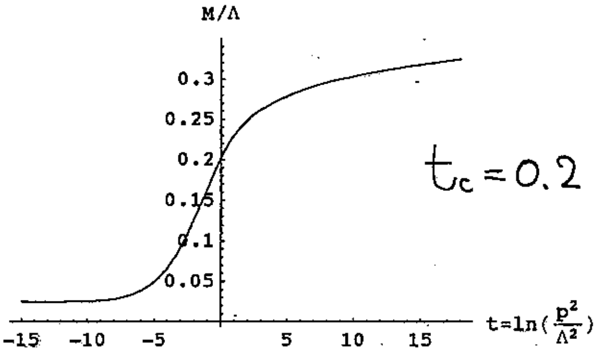


$t_c = 0.2$

大

◦ $m_3^2(p^2) = m^2(p^2) = 0$

[通常のQCD like 模型のS-Deq.と右辺の符号が逆の場合]



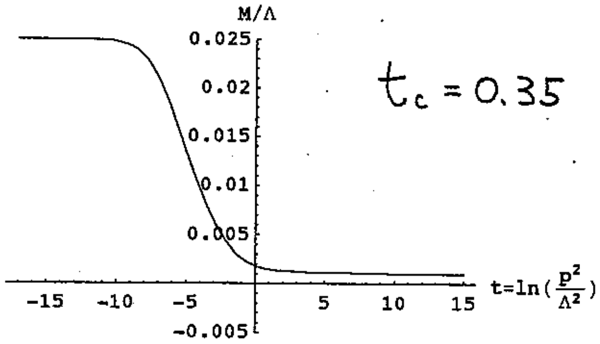
$t_c = 0.2$ ㊇

$\lim_{t\to\infty} M \longrightarrow 0$ を満していない。

S-D eq. の解でない

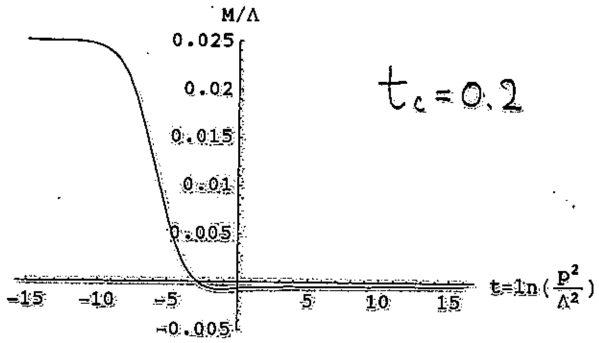
∘ $m_3^2(p^2) = 0$, $m^2(p^2) = 10^2 p^2$ $(n^2(t) = 10^2)$

[$\Delta^{\pm}_{\mu L}$ の寄与が $\Delta^{3}_{\mu L}$ に比べて常に小さい場合]



$t_c = 0.35$

小



$t_c = 0.2$

大

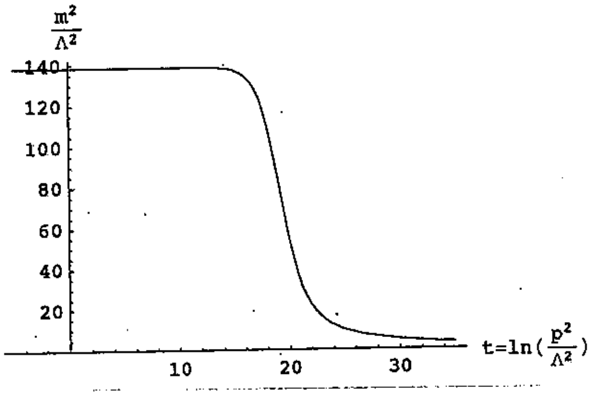
解あり、だが、

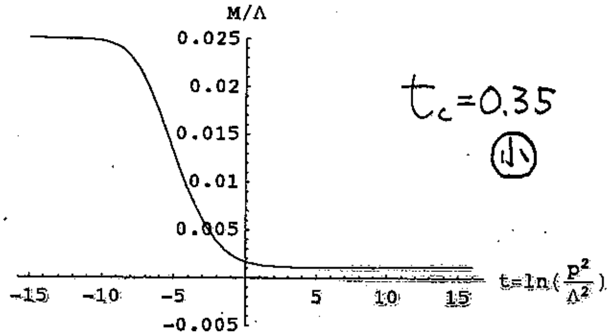
実際には

$$\begin{cases} m_3^2(0) = 0 \\ m^2(0) \neq 0 \leftarrow \end{cases}, \quad \begin{cases} m_3^2(p^2 \to \infty) = 0 \\ m^2(p^2 \to \infty) = 0 \leftarrow \end{cases}$$

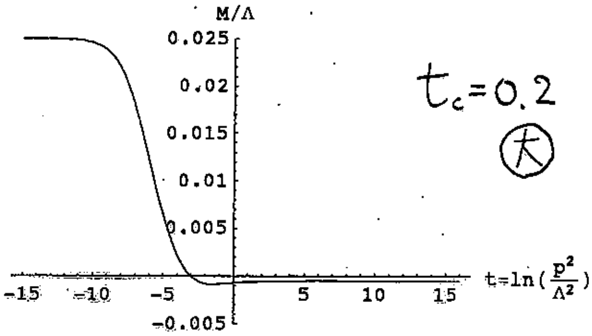
が必要

∘ $m_3^2(0) = 0$, $m^2(p^2)$ ↓

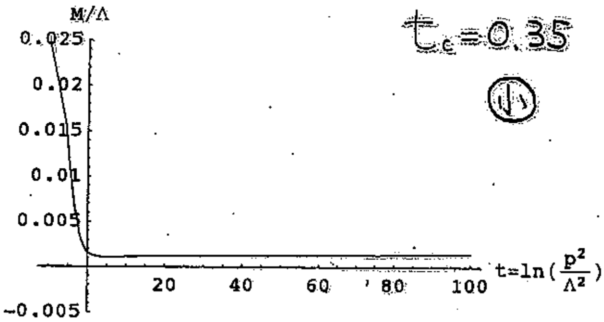




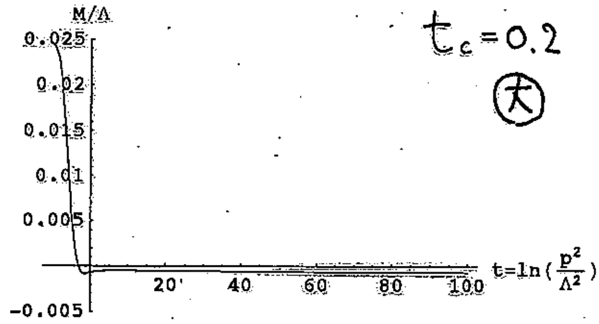
$t_c=0.35$ (小)



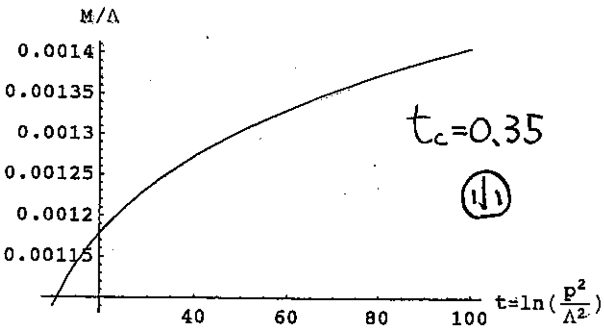
$t_c=0.2$ (大)



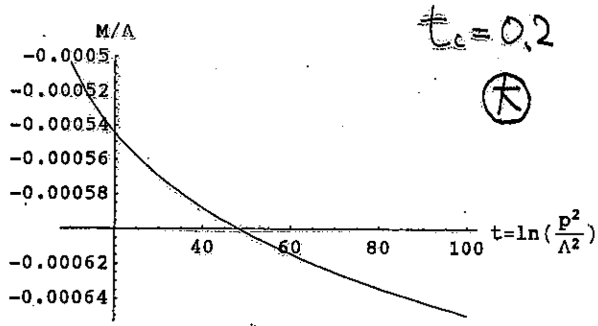
$t_c=0.35$ (小)



$t_c=0.2$ (大)



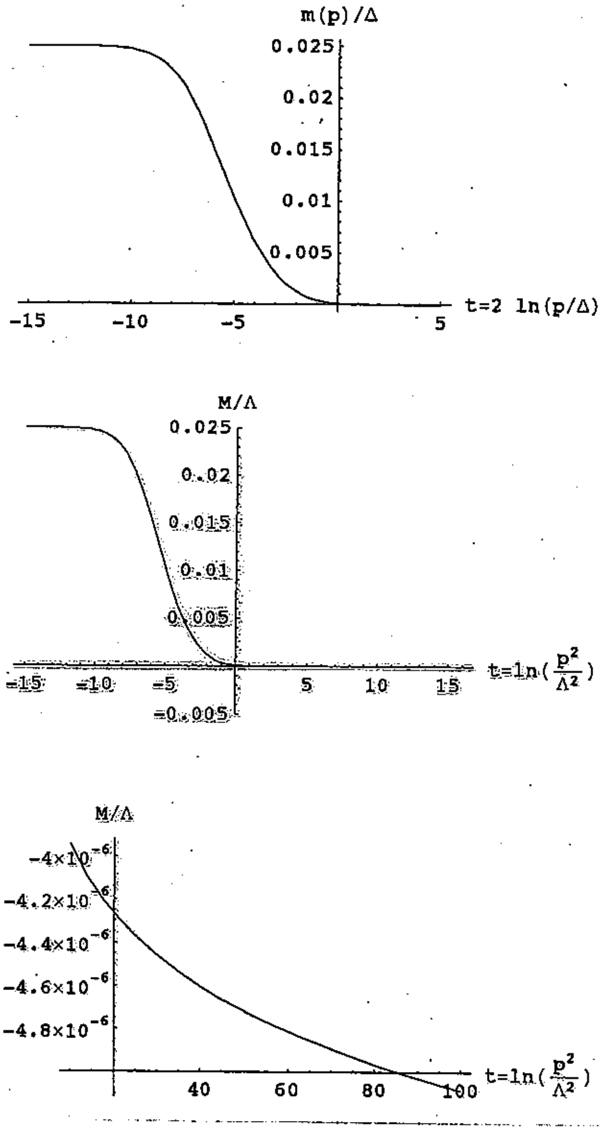
$t_c=0.35$ (小)



$t_c=0.2$ (大)

fine-tuning :

$0.35 < t_c = 0.27 < 0.2$



"Critical Coupling 以上で凝縮" とはなっていない(?)

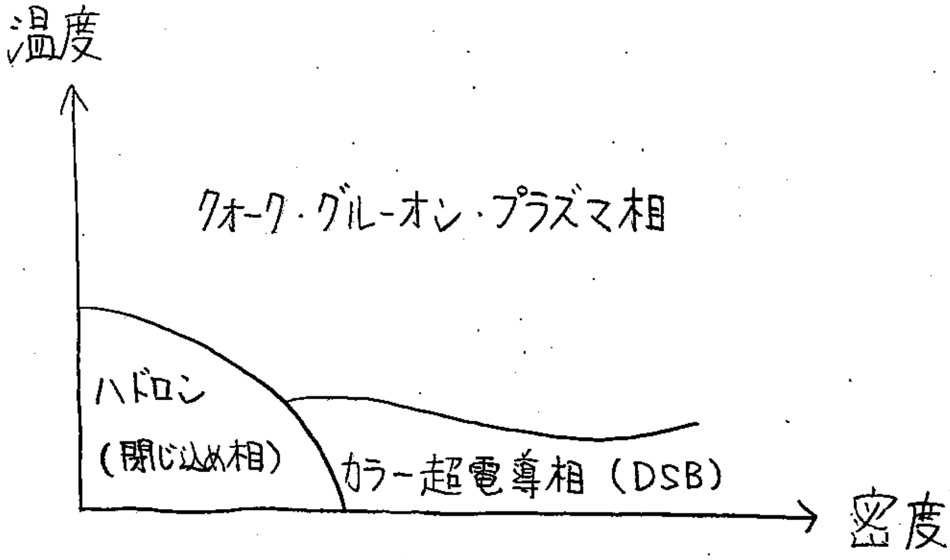
- $m_3^2(p^2)$, $m^2(p^2)$ を手で与えて、
  S-D eq. の non-trivial な解はあるかどうか (検討中)

  (Coupling を fine-tuning すればある

  ↳ 有限密度QCDにおける
  カラー超電導相 (Majorana型凝縮
  により、DSB)
  との関係?)

- gauge boson self-energy の S-D eq. との Consistency

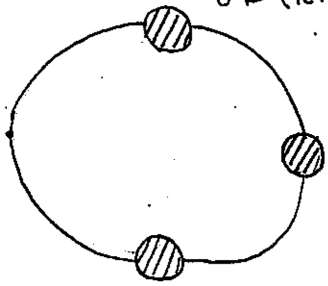
- global anomaly との関係
  (DSB は global anomaly の有無に関係するか?)


温度
クォーク・グルーオン・プラズマ相
ハドロン
（閉じ込め相）
カラー超電導相（DSB）
密度

S-D eq. for gauge boson

$$\delta^{ab} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \left\{ (1 - Z_3) p^2 - m_a^2(p^2) \right\}$$

$$= Z_1 \times g \gamma_\nu \frac{\sigma^a}{2}$$



$$g \Gamma_\mu (p^2, k^2)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \left\{ (1 - Z_3) p^2 + m_a^2(p^2) \right\}$$

$$= - \frac{\delta_{\mu\nu}}{4\pi} \int_0^\infty dk^2 \, \frac{g^2(\ell^2)}{4\pi} \, \frac{1}{M^2(\ell^2) + \ell^2} \, \frac{k^2}{M^2(k^2) + k^2} \left\{ k^2 \pm M(\ell^2) M(k^2) \right\}$$