第8章　作用変数・角変数・位相

前期量子論において、重要な役割を演じた作用変数や角変数が、量子力学の通常の定式化の中ではどのような形で現れるかを、簡単な系について検討する。また、これらの変数に特有な表示についても触れる。

8.1　古典論的な考察

8.1.1　断熱不変量と保存量

一次元の周期系に対する正準運動量および同座標を、それぞれ p, q とする。このとき、作用量 (action) または角運動量と同じ次元をもつ変数として作用変数 (action variable)J が定義される: $J \equiv \oint pdq$。ここに積分は一周期にわたるものとする。他方、J を正準運動量と見なしたとき、これに正準共役な座標は、角変数（angle variable) と呼ばれている。

系の運動がいくつかのパラメーター $a_i (i = 1, 2, \cdots)$ に依存し、それらが時間的に変化する場合 ($a_i = a_i(t)$) にも、J は適当な仕方で定義される[1]。このとき、系のエネルギー E は時間的な不変量（保存量）とはならないが、a_i の時間的変化が極めて緩やかであるならば（断熱的変化）、J は不変に保たれる。こうした J は断熱不変量 (adiabatic invariant) と呼ばれている。例えば調和振動子（振動数：ν）の場合、E や ν は不変でなくとも、E/ν は不変量となる。まさにこの性質のゆえに、前期量子論においては、量子条件が $J = n\hbar + \text{const.}$ の形で仮定されたのであった。

断熱不変量は、しかしながら、いわゆる断熱近似（7.1.2a 参照）の範囲内での近似的な保存量に過ぎない。そこで以下の議論においては、

---

[1] 例えば朝永振一郎「量子力学 I」(みすず書房 1988)。

J の代わりに、その一般化として、厳密な意味での保存量 $P(t)$ を採用することにする。ここで時間変数 t を陽に含む物理量の保存とは、7.2 で与えた意味のものとする。この $P(t)$ を新しい正準運動量と見做し、適当な正準変換によって、系のハミルトニアンが $P(t)$ のみの関数となり、それに正準共役な座標 $Q(t)$、すなわち一般化された角変数を含まないようにできるならば、この $Q(t)$ はいわゆる循環座標 (cyclic coordinate) となる。

以下においては、上述のプログラムを、比較的簡単な一次元系に対して遂行することにする。系のハミルトニアンとしては

$$H(t) = X(t)p^2 + Y(t)(pq + qp) + Z(t)q^2 \tag{8.1}$$

を採る。ここに $X(t), Y(t), Z(t)$ は、時刻 t の適当な実関数とする。系のエネルギーは、従って、一般には保存しない。しかしこの系は、特別な場合 $(X(t) = 1/2m, Y(t) = 0, Z(t) = m\omega^2/2)$ に通常の調和振動子に帰着するので、便宜上、以下ではこれを '一般振動子' と呼ぶことにする。

8.1.2 一般振動子の古典的取り扱い（1）

古典的運動方程式は　$\dot{q}$

$$\ddot{q} - \frac{\dot{X}}{X}\dot{q} + \Omega q = 0, \tag{8.2}$$
$$\Omega(t) \equiv \frac{2}{X}(\dot{X}Y - X\dot{Y}) + 4(XZ - Y^2).$$

因みに、この場合のハミルトン·ヤコビの方程式 (Hamilton-Jacobi equation) は

$$X\Big(\frac{\partial S}{\partial q}\Big)^2 + 2Yq\,\frac{\partial S}{\partial q} + Zq^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{8.3}$$

となる。ここに $S = S(q,t)$ はハミルトンの主関数 (Hamilton's principal function) である。さて、問題を取り扱うためには、正準変換によるのが便利であり、以下では 2 種類の変換 (1), (2) を考える。

先ず、正準変換 (1) においては、J に代るべき P として

$$P = A(t)p^2 + 2B(t)pq + C(t)q^2 \tag{8.4}$$

を採る。ここに $A(t)(>0), B(t), C(t)$ は t の適当な実関数であり、P が保存量となるように決定する。正準変換 $(p,q) \to (P,Q)$ の母関数を $S_1(q,P,t)$ とすれば、

$$p = \frac{\partial S_1(q,P,t)}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial S_1(q,P,t)}{\partial P} \tag{8.5}$$

であり、(8.4) , (8.5) より、$S_1(q,P,t)$ に対して微分方程式

$$\frac{\partial S_1(q,P,t)}{\partial q} = -\frac{B}{A}q + \frac{1}{A}\sqrt{AP - \kappa q^2}, \tag{8.6}$$
$$\kappa(t) \equiv A(t)C(t) - B^2(t)$$

が得られる。

κ に対しては $\kappa = 0, > 0, < 0$ の三つの可能性が考えられるが、以下ではもっぱら $\kappa > 0$ の場合を取り扱う。このとき $P > 0$ となる。さて (8.6) を積分すれば

$$S_1(q,P,t) = -\frac{B}{2A}q^2 + \frac{\sqrt{\kappa}}{2A}\Big[q\sqrt{\frac{AP}{\kappa} - q^2} + \frac{AP}{\kappa}\sin^{-1}\Big(\sqrt{\frac{\kappa}{AP}}\, q\Big)\Big] + s_1(P,t), \tag{8.7}$$

ただし、$s_1(P,t)$ は P, t の任意関数である。(8.5), (8.7) より

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}\sin^{-1}\Big(\sqrt{\frac{\kappa}{AP}}\, q\Big) + \frac{\partial s_1(P,t)}{\partial P} \tag{8.8}$$

であり、他方 (8.5), (8.6), (8.8) より

$$q = \sqrt{\frac{AP}{\kappa}}\sin\Theta, \quad p = \sqrt{\frac{P}{A}}\Big\{-\frac{B}{\sqrt{\kappa}}\sin\Theta + \cos\Theta\Big\}, \tag{8.9}$$
$$\Theta \equiv 2\sqrt{\kappa}\Big(Q - \frac{\partial s_1(P,t)}{\partial P}\Big)$$

となる。正準変換後のハミルトニアン $K_1(P,Q,t)$ は $K_1 = H(t) + \partial S_1/\partial t$ で与えられるが、(8.7), (8.9) を用いれば

$$\begin{aligned} K_1(P,Q,t) &= \frac{X}{A}P + \frac{\partial s_1(P,t)}{\partial t} \\ &+ \frac{P}{\kappa A}\Big\{A(AZ - BY) + B(AY - BX) + \frac{1}{2}(\dot{A}B - A\dot{B}) - \kappa X\Big\}\sin^2\Theta \\ &+ \frac{P}{4A\sqrt{\kappa}}\Big\{4(AY - BX) + \frac{A}{2}\frac{\dot{\kappa}}{\kappa} - \dot{A}\Big\}\sin(2\Theta) - \frac{P\Theta}{4\sqrt{\kappa}}\frac{\dot{\kappa}}{\kappa}. \end{aligned} \tag{8.10}$$

$\dot{Q}, \dot{P}$ は、もちろん、K_1 をハミルトニアンとしたハミルトンの方程式より求められる。このようにして、正準変換 (1)、すなわち $(p,q) \to (P,Q)$ は、任意関数 $A(t), B(t), C(t)$ を媒介として決定されたことになる。

次に、これら三つの任意関数を適当に選び、ハミルトニアン K_1 をさらに制約することにしよう。先ず K_1 が座標 Q を含まないようにすることを試みる。このとき Q は循環座標となる。(8.10) から明らかなように、このための必要充分条件は $A(t), B(t), C(t)$ が次の関係式を満たすことである：

$$2A(AZ - BY) - 2B(AY - BX) + (\dot{A}B - A\dot{B}) - 2\kappa X = 0, \tag{8.11}$$

$$2\dot{A} - A\frac{\dot{\kappa}}{\kappa} - 8(AY - BX) = 0, \tag{8.12}$$

$$\dot{\kappa} = \dot{A}C + A\dot{C} - 2B\dot{B} = 0. \tag{8.13}$$

(8.13) より $\kappa = \text{const.}$ となるから、これを (8.12) に代入して

$$\dot{A} = 4(AY - BX), \tag{8.14}$$

これを (8.11) に代入すれば

$$\dot{B} = \frac{2}{A}(A^2 Z - B^2 X - \kappa X) \tag{8.15}$$

となる。さらに (8.14), (8.15) を用いて (8.12) から $B, \dot{B}$ を消去すれば、$A(t)$ に対する二階非線型の微分方程式が導かれる：

$$\ddot{A} - \frac{1}{2}\frac{\dot{A}^2}{A} - \frac{\dot{X}}{X}\dot{A} + 2\Omega A - 8\kappa\frac{X^2}{A} = 0. \tag{8.16}$$

このとき $B(t), C(t)$ は $A(t)$ で表せて

$$B = \frac{4AY - \dot{A}}{4X}, \quad C = \frac{\kappa + B^2}{A} = \frac{\kappa}{A} + \frac{(4AY - \dot{A})^2}{16AX^2} \tag{8.17}$$

となる。すなわち、ひとたび $A(t)$ が (8.16) の解として求められるならば、$B(t), C(t)$ は (8.17) によって決定されることになる。

このとき、ハミルトニアン K_1 は

$$K_1(P,t) = \frac{X}{A}P + \frac{\partial s_1(P,t)}{\partial t}$$

$$(8.10')$$

と簡単化され、ハミルトンの方程式 $\dot{P} = \partial K_1/\partial Q = 0$ より、$P(t) =$ const. となる。このとき

$$\frac{dP}{dt} \equiv \frac{\partial P}{\partial t} + \{P, H\} = 0 \tag{8.18}$$

も直接確かめられる。

上記 K_1 は、しかしながら、なお未定関数 $s_1(P,t)$ を含んでいる。その関数について、次の二つの場合を考える。

i) $s_1(P,t) = 0$ の場合：

このとき

$$K_1(P,t) = \frac{X(t)}{A(t)}P,$$

$$(8.10'')$$

従って、$\dot{Q}(t) = X(t)/A(t)$、すなわち

$$Q(t) = \int^t \frac{X(t')}{A(t')}dt'. \tag{8.19}$$

これを (8.9) に代入すれば

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{AP}{\kappa}}\sin(\varphi(t)+\varphi_0), \\ p &= \sqrt{\frac{P}{A}}\Big\{-\frac{B}{\sqrt{\kappa}}\sin(\varphi(t)+\varphi_0)+\cos\big(\varphi(t)+\varphi_0\big)\Big\} \end{aligned}$$

$$(8.9')$$

が得られる。ここに $\varphi_0 =$ const.、かつ

$$\varphi(t) \equiv 2\sqrt{\kappa}\int_0^t \frac{X(t')}{A(t')}dt' \tag{8.20}$$

とおいた。なお、この $\varphi(t)$ を用いれば

$$Q(t) = \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}\varphi(t) + Q(0)$$

$$(8.19')$$

となる。(8.9′), (8.20) が運動方程式 (8.2) に対する形式解を与える。(8.19) より見られるように、一般化された角変数 $Q(t)$ は、必ずしも t の一次関数とはならない。

とくに X, Y, Z が t によらず、かつ $XZ - Y^2 > 0$ の場合には

$$A = \sqrt{\frac{\kappa}{XZ - Y^2}} X, \quad B = \sqrt{\frac{\kappa}{XZ - Y^2}} Y, \quad C = \sqrt{\frac{\kappa}{XZ - Y^2}} Z \tag{8.21}$$

が (8.16), (8.17) を満たし、このとき P, Q は

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{\frac{\kappa}{XZ - Y^2}}\left(Xp^2 + 2Ypq + Zq^2\right) = \frac{1}{\nu} H, \\ Q &= \nu t + \text{const.}, \quad \nu = \sqrt{(XZ - Y^2)/\kappa} \end{aligned} \tag{8.22}$$

となる。すなわち、P および Q は、それぞれ通常の作用変数および角変数に一致する。次に

ii) $s_1(P.t)$ が

$$s_1(P, t) = -P \int_0^t \frac{X(t')}{A(t')} dt', \tag{8.23}$$

である場合:

このとき、(8.10′) より $K_1 \equiv 0$ であり、P も Q もともに const. となる。正準変換 (1) の母関数 (8.7) は

$$\begin{aligned} S_1(q, P, t) \;=\; & -\frac{B(t)}{2A(t)} q^2 + \frac{\sqrt{\kappa}}{2A(t)}\Big[q\sqrt{\frac{A(t)P}{\kappa} - q^2} + \frac{A(t)P}{\kappa} \sin^{-1}\Big(\sqrt{\frac{\kappa}{A(t)P}}\, q\Big)\Big] \\ & -P \int_0^t \frac{X(t')}{A(t')} dt', \end{aligned} \tag{8.7'}$$

となり、ハミルトン・ヤコビの方程式 (8.3) を満たす。(8.23) を (8.9) に代入するならば、q, p に対する形式解は、この場合も、(8.9′) と同一の形で与えられる。

8.1.3 一般振動子の古典的取り扱い (2)

形式解を求めるための正準変換として、以下では変換 (2):$(p,q)\to(\gamma,\eta)$ を考える。ただし正準運動量 γ としては、p,q の一次結合

$$\gamma = f(t)p + g(t)q \tag{8.24}$$

を採る。ここに $f(t), g(t)$ は t の適当な実関数である。この変換の母関数を $S_2(q,\gamma,t)$ とすれば

$$p = \frac{\partial S_2(q,\gamma,t)}{\partial q} = \frac{\gamma}{f} - \frac{g}{f}q \tag{8.25}$$

であり、これを積分して

$$S_2(q,\gamma,t) = \frac{\gamma}{f}q - \frac{g}{2f}\,q^2 + s_2(\gamma,t) \tag{8.26}$$

が得られる。ただし、$s_2(\gamma,t)$ は γ, t の任意関数である。

他方、γ の正準共役な座標 η は

$$\eta = \frac{\partial S_2(q,\gamma,t)}{\partial \gamma} = \frac{q}{f} + \frac{\partial s_2(\gamma,t)}{\partial \gamma} \tag{8.27}$$

で与えられる。従って (8.25), (8.27) より

$$q = f\Big(\eta - \frac{\partial s_2(\gamma,t)}{\partial\gamma}\Big), \qquad p = \frac{\gamma}{f} - g\Big(\eta - \frac{\partial s_2(\gamma,t)}{\partial\gamma}\Big). \tag{8.28}$$

となる。上記 (8.24), (8.27) および (8.28) が正準変換 (2) を決定する。

このとき、ハミルトニアン H は $K_2(\gamma,\eta,t)$ に変換される：

$$\begin{aligned} K_2(\eta,\gamma,t) \ &= \ \frac{X}{f^2}\gamma^2 + \Big(-\frac{\dot f}{f} - 2X\frac{g}{f} + 2Y\Big)\gamma\Big(\eta - \frac{\partial s_2(\gamma,t)}{\partial\gamma}\Big) \\ &\quad + \Big(Xg^2 - 2Yfg + Zf^2 + \frac{\dot f g - f\dot g}{2}\Big)\Big(\eta - \frac{\partial s_2(\gamma,t)}{\partial\gamma}\Big)^2 + \frac{\partial s_2(\gamma,t)}{\partial t}. \end{aligned} \tag{8.29}$$

次に、変換 (1) におけるように、座標 η が循環座標になるように、関数 $f(t), g(t)$ を制約しよう。$K_2(\gamma,\eta,t)$ が η を含まないための必要充分条件は、(8.29) より

$$\dot f = 2(Yf - Xg), \qquad \dot g = 2(Zf - Yg). \tag{8.30}$$

上二式より

$$\ddot{f} - \frac{\dot{X}}{X}\dot{f} + \Omega f = 0 \tag{8.31}$$

が得られるが、これは運動方程式 (8.2) と全く同形である。

(8.31) の解 $f(t)$ が得られるならば、(8.30) 第一式より $g(t)$ は

$$g(t) = \frac{2fY - \dot{f}}{2X}. \tag{8.32}$$

として求められる。f, g がそれぞれ (8.31), (8.32) を満たすとき、ハミルトニアン $K_2(\gamma, t)$ は

$$K_2 = \frac{X}{f^2}\gamma^2 + \frac{\partial s_2(\gamma, t)}{\partial t} \tag{8.29$'$}$$

であり、もはや η を含まない。従って正準運動量 γ は $\gamma =$ const. となる。

再び未定関数 $s_2(\gamma, t)$ に関して、次の二つの場合を考えよう。

i) $s_2(\gamma, t) = 0$ の場合：

このとき $K_2(\gamma, t) = (X/f^2)\gamma^2$ であり、$\dot{\eta} = \partial K_2/\partial\gamma = 2(X/f^2)\gamma$ となる。従って

$$\eta = 2\gamma\tilde{\varphi}(t) + \eta_0, \quad \tilde{\varphi}(t) \equiv \int_0^t \frac{X(t')}{f^2(t')}dt'. \tag{8.33}$$

ここで $\eta_0 =$ const. とする。このとき q は、(8.28) 第一式および (8.33) より

$$q = f(t)\Big(2\gamma\tilde{\varphi}(t) + \eta_0\Big). \tag{8.34}$$

として得られる。これは運動方程式 (8.2) の形式解に対する別の表式を与える。

ii) $s_2(\gamma, t)$ が

$$s_2(\gamma, t) = -\gamma^2\tilde{\varphi}(t) \tag{8.35}$$

である場合:

このとき $K_2 = 0$ であり、γ も η もともに const. となる。正準変換の母関数 $S_2(q, \gamma, t)$ は (8.26), (8.35) より

$$S_2(q, \gamma, t) = \frac{\gamma}{f(t)}q - \frac{g(t)}{2f(t)}q^2 - \gamma^2\tilde{\varphi}(t)$$

(8.26′)

であり、これはハミルトン・ヤコビの方程式 (8.3) を満たす。また (8.27), (8.24) より

$$\eta = \left(-2f(t)\tilde{\varphi}(t)\right) p + \left(\frac{1}{f(t)} - 2g(t)\tilde{\varphi}(t)\right) q \tag{8.36}$$

が導かれる。

8.1.4 $A(t)$ と $f(t)$ の関係

上記の議論では、同一の問題を取り扱うために、二種類の正準変換 (1) と (2) を用いた。そして、それぞれの場合の形式解は、本質的に、関数 $A(t)$ および $f(t)$ でもって表されることを見た。ところで、前者が非線形な微分方程式 (8.16) を満たすのに対し、後者は線形な微分方程式 (8.31) を満たす。以下では、両関数の数学的関係について考察してみる。

$f_1(t), f_2(t)$ を (8.31) の一次独立な二つの解としたとき、次の関係が成り立つことが容易に示される：

$$\dot{f}_1(t)f_2(t) - f_1(t)\dot{f}_2(t) = \text{const.}X(t). \tag{8.37}$$

そこで、$f_1(t), f_2(t)$ を適当に調節し、上記の const. が 1 になるようにしよう。このとき

$$A(t) = k_1(f_1^2(t) + f_2^2(t)) + k_2(f_1^2(t) - f_2^2(t)) + 2k_3 f_1(t)f_2(t) \tag{8.38}$$

は、(8.16) の解となっている。ここで、k_1, k_2, k_2 は $(k_1^2 - k_2^2 - k_3^2) = 4\kappa$ を満たす定数である。(8.38) の証明は、(8.37) を用いて行われるが、計算は初等的だが長くなるので、ここでは省略する。

さて、$f(t)$ を (8.31) の一つの解であり、$f(0) \neq 0$ としよう。このとき、(8.33) で定義された $\tilde{\varphi}(t)$ と $f(t)$ の積 $f(t)\tilde{\varphi}(t)$ もまた、(8.31) を満たし、$f(0)\tilde{\varphi}(0) = 0$ である。いま、$f_1(t) = f(t), f_2(t) = -f(t)\tilde{\varphi}(t)$ と取るならば、$f_1(t), f_2(t)$ は互いに独立な (8.31) の解であり、$\dot{f}_1(t)f_2(t) - f_1(t)\dot{f}_2(t) = X(t)$ となっている。この両関数を (8.38) に代入すれば

$$A(t) = \{(k_1 + k_2) - 2k_3\tilde{\varphi}(t) + (k_1 - k_2)\tilde{\varphi}^2(t)\}f^2(t).$$

(8.38′)

が得られる。

さて、(8.38′) の $A(t)$ を用いるならば、(8.20) で定義された $\varphi(t)$ を $\tilde{\varphi}(t)$ でもって書くことができる：

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= 2\sqrt{\kappa}\int_0^t \frac{X(t')}{f^2(t')} \times \frac{dt'}{k_1+k_2-2k_3\tilde{\varphi}(t')+(k_1-k_2)\tilde{\varphi}^2(t')}\\ &= 2\sqrt{\kappa}\int_0^{\tilde{\varphi}(t)} \frac{d\tilde{\varphi}(t')}{k_1+k_2-2k_3\tilde{\varphi}(t')+(k_1-k_2)\tilde{\varphi}^2(t')}\\ &= \tan^{-1}\Big\{\frac{(k_1-k_2)\tilde{\varphi}(t)-k_3}{2\sqrt{\kappa}}\Big\}+\tan^{-1}\Big\{\frac{k_3}{2\sqrt{\kappa}}\Big\}, \end{aligned} \tag{8.39}$$

従って

$$\begin{aligned}\sin\varphi(t) &= \frac{2\sqrt{\kappa}\tilde{\varphi}(t)}{\sqrt{k_1+k_2-2k_3\tilde{\varphi}(t)+(k_1-k_2)\tilde{\varphi}^2(t)}\times\sqrt{k_1+k_2}},\\ \cos\varphi(t) &= \frac{k_1+k_2-k_3\tilde{\varphi}(t)}{\sqrt{k_1+k_2-2k_3\tilde{\varphi}(t)+(k_1-k_2)\tilde{\varphi}^2(t)}\times\sqrt{k_1+k_2}}. \end{aligned} \tag{8.40}$$

(8.38′), (8.40) を用いるならば、正準変換 (1) で得た q に対する形式解 (8.9′) は、以下のように書き直される：

$$q = \sqrt{\frac{P}{(k_1+k_2)\kappa}}\,\{(2\sqrt{\kappa}\cos\varphi_0-k_3\sin\varphi_0)\tilde{\varphi}(t)+(k_1+k_2)\sin\varphi_0\}f(t). \tag{8.41}$$

ここで、定数に対して

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{P}{(k_1+k_2)\kappa}}\,(2\sqrt{\kappa}\cos\varphi_0-k_3\sin\varphi_0) &\equiv 2\gamma,\\ \sqrt{\frac{P}{(k_1+k_2)\kappa}}\,(k_1+k_2)\sin\varphi_0 &\equiv \eta_0 \end{aligned} \tag{8.42}$$

とおくならば、(8.41) は正準変換 (2) で得た形式解 (8.34) に一致する。

非線形な微分方程式 (8.16) の解 $A(t)$ が、線形な微分方程式 (8.31) の二つの解 $f_1(t), f_2(t)$ でもって表されたのは、物理的にも数学的にもまことに興味深いことである。これは物理的に見れば、正準変換 (1) から

導かれた正準運動量 P, (84), が、変換 (2) から導かれた二つの γ, (8.24), のいわば積の形をしていることに由る。数学的には、しかしながら、何かさらに深い理由があるのかもしれない。

8.2 量子論的考察

8.2.1 一般振動子の量子力学

本章では、(8.1) をハミルトニアンとする系の量子力学を、シュレーディンガー表示において検討する。p, q は、従って、この表示における正準変数の演算子とする。ハミルトニアン $H = H(t)$ は時刻 t に依存するので、7 章で述べた方法が有効である。

(8.4) に対応するエルミート演算子を $G(t)$ とする。すなわち

$$G(t) \equiv A(t)p^2 + B(t)(pq + qp) + C(t)q^2. \tag{8.43}$$

容易に示されるように、$A(t), B(t), C(t)$ が (8.16), (8.17) を満たすならば、演算子 $G(t)$ は保存量に対する条件式 $\mathcal{D}G(t)/\mathcal{D}t = 0$ (7.2.2 参照) を満たす。そこで以下での $G(t)$ は、このような性質のものと考える。

$G(t)$ の固有状態を求めるために、一対の演算子 $a(t), a^\dagger(t)$ を次式によって導入する：

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\sqrt{\kappa}A(t)}}\Big\{(\sqrt{\kappa} + iB(t))q + iA(t)p\Big\}, \\ a^\dagger(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\sqrt{\kappa}A(t)}}\Big\{(\sqrt{\kappa} - iB(t))q - iA(t)p\Big\}. \end{aligned} \tag{8.44}$$

$a(t), a^\dagger(t)$ は t に依存する演算子であり、$[q, p] = i\hbar$ より

$$[a(t), a^\dagger(t)] = 1 \tag{8.45}$$

が任意の t に対して成り立つ。(8.44) を逆に解けば

$$\begin{aligned} p &= -\sqrt{\frac{\hbar}{2A(t)\sqrt{\kappa}}}\,\{(B(t) + i\sqrt{\kappa})a(t) + (B(t) - i\sqrt{\kappa})a^\dagger(t)\}, \\ q &= \sqrt{\frac{\hbar A(t)}{2\sqrt{\kappa}}}\,\{a(t) + a^\dagger(t)\} \end{aligned} \tag{8.46}$$

となる。(8.46) を (8.43) に代入すると

$$G(t)=2\hbar\Big(N(t)+\frac{1}{2}\Big),\qquad N(t)\equiv a^\dagger(t)a(t) \tag{8.47}$$

が得られる。

$G(t)$ と $N(t)$ は、もちろん、同時対角化され、同時固有状態は

$$|n;t\rangle\equiv\frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger(t))^n\;|0;t\rangle,\quad (n=0,1,2,\cdots), \tag{8.48}$$

で与えられる。ここに $|0;t\rangle$ は

$$a(t)\;|0;t\rangle=0. \tag{8.49}$$

によって規定される状態である。固有状態 $|n;t\rangle$ に対しては、次の関係式が成り立つ：

$$\begin{aligned}&N(t)|n;t\rangle=n|n;t\rangle,\quad G(t)|n;t\rangle=2\hbar\sqrt{\kappa}\big(n+\tfrac{1}{2}\big)|n;t\rangle,\\ &\textstyle\sum_n|n;t\rangle\langle n;t|=\mathrm{I},\qquad \langle n;t|n';t\rangle=\delta_{nn'}.\end{aligned} \tag{8.50}$$

従って、$G(t)$ を一般化された作用変数と見なすならば、上記第二式が量子条件になっている。

さて、状態 $|n;t\rangle$ の座標空間表示、あるいは $q-$ 表示 $\langle q|n;t\rangle$ は、以下のようにして求められる。先ず、$|0;t\rangle$ に対しては、(8.44) 第一式と (8.49) より

$$\langle q|a(t)|0;t\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\hbar A(t)\sqrt{\kappa}}}\Big[(\sqrt{\kappa}+iB(t))q+\hbar A(t)\frac{d}{dq}\Big]\langle q|0;t\rangle=0 \tag{8.51}$$

がなりたち、これを解いて

$$\langle q|0;t\rangle=\Big(\frac{\sqrt{\kappa}}{\hbar\pi A(t)}\Big)^{1/4}\exp\{-\frac{(\sqrt{\kappa}+iB(t))}{2\hbar A(t)}q^2\} \tag{8.52}$$

が得られる。明らかに、上式右辺は t に依存する（この時間依存性は、もちろん、シュレーディンガー方程式に起因するものではない）。

他方、$a^\dagger(t)$ は (8.44) の第2式より

$$\begin{aligned}a^\dagger(t)&=\frac{1}{\sqrt{2\hbar A(t)\sqrt{\kappa}}}\Big\{(\sqrt{\kappa}-iB(t))q-\hbar A(t)\frac{d}{dq}\Big\}\\ &=-\sqrt{\frac{\hbar A(t)}{2\sqrt{\kappa}}}\;\exp\Big\{\frac{(\sqrt{\kappa}-iB(t))}{2\hbar A(t)}q^2\Big\}\frac{d}{dq}\;\exp\Big\{-\frac{(\sqrt{\kappa}-iB(t))}{2\hbar A(t)}q^2\Big\},\end{aligned} \tag{8.53}$$

と書かれるから、$(a^\dagger(t))^n$ に対しては

$$(a^\dagger(t))^n = \Big(-\sqrt{\frac{\hbar A(t)}{2\sqrt{\kappa}}}\Big)^n \exp\Big\{\frac{(\sqrt{\kappa}-iB(t))}{2\hbar A(t)}q^2\Big\}\frac{d^n}{dq^n}\exp\Big\{-\frac{(\sqrt{\kappa}-iB(t))}{2\hbar A(t)}q^2\Big\}. \tag{8.53$'$}$$

が成り立つ。従って (8.48) より

$$\begin{aligned}\langle q|n;t\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle q|(a^\dagger(t))^n|0;t\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\xi(t)}{n!\sqrt{2\pi}}}\ \exp\{-\Big(\frac{\xi^2(t)}{4}q+\frac{iB(t)}{2\hbar A(t)}\Big)q^2\}\ H_n(\xi(t)q), \quad (8.54)\\ &\quad \xi(t)\equiv\sqrt{2\sqrt{\kappa}/(\hbar A(t))}\end{aligned}$$

が得られる。

ハミルトニアン (8.1) に対する表式は、$a(t), a^\dagger(t)$ で書くといささか煩雑な形となる：

$$\begin{aligned}H &= \frac{\hbar}{2\sqrt{\kappa}}\Big[\{\frac{X}{A}(B^2+2i\sqrt{\kappa}B-\kappa)-2Y(B+i\sqrt{\kappa})+AZ\}a^2(t) \\ &\quad +\{\frac{X}{A}(B^2-2i\sqrt{\kappa}B-\kappa)+2Y(-B+i\sqrt{\kappa})+AZ\}(a^\dagger(t))^2 \\ &\quad +\{\frac{X}{A}(B^2+\kappa)-2BY+AZ\}(a^\dagger(t)a(t)+a(t)a^\dagger(t))\Big].\end{aligned} \tag{8.55}$$

次に公式 (7.24) を適用する際に必要な $\theta_n(t)$, (7.9), を求めておく。先ず $\langle n;t|H(t)|n;t\rangle$ は、長いがしかし単純な計算の結果

$$\langle n;t|H(t)|n;t\rangle = (n+\frac{1}{2})\frac{\hbar}{\sqrt{\kappa}}\Big\{\frac{X(t)}{A(t)}(B^2(t)+\kappa)-2B(t)Y(t)+A(t)Z(t)\Big\}. \tag{8.56}$$

となる。また (8.54) を用いれば、$\langle n;t|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|n;t\rangle$ は

$$\begin{aligned}\langle n;t|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|n;t\rangle &= \int d^3q\langle n;t|q\rangle\Big(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Big)\langle q|n;t\rangle \\ &= (n+\frac{1}{2})\frac{\hbar}{2\sqrt{\kappa}}\frac{A(t)\dot{B}(t)-\dot{A}(t)B(t)}{A(t)}\end{aligned} \tag{8.57}$$

である。(8.57) に対して (8.14), (8.15) を用いれば

$$\theta_n(t) = -\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\Big(\hbar\sqrt{\kappa}\Big)\ \frac{2X(t)}{A(t)} \tag{8.58}$$

が見出される。従って、ハミルトニアンを $H(t)$ とするシュレーディンガー方程式の解を $|t\rangle_s$ とすると、その $q-$ 表示 $\langle q|t\rangle_s$ は、(7.24), (8.54) より

$$\begin{aligned}\langle q|t\rangle_s \;&=\; \sum_n c_n\sqrt{\frac{\xi(t)}{n!\sqrt{2\pi}}}\ \exp\Big[-i(n+\frac{1}{2})\varphi(t)\Big] \\ &\qquad \times\exp\Big[-\Big(\frac{\xi^2(t)}{4}q^2+\frac{iB(t)}{2\hbar A(t)}\Big)q^2\Big]H_n(\xi(t)q)\end{aligned} \tag{8.59}$$

となる。上式中の $\varphi(t)$ は、すでに (8.20) で定義した。

(8.9′)、(8.19′) および (8.59) に見られるように、一般振動子に対しては、その古典的振舞いも量子論的振舞いも、ともに同一の関数 $\varphi(t)$ でもって特徴づけられている。前者においては、一般化された角変数 $Q(t)$ の中に、後者においては状態の位相の中に、この関数が現れる。ところで後者には、動力学的位相のみならず幾何学的位相も同様に寄与している。上の結果は、従って、量子力学における幾何学的位相のもつ重要性を示すものと言える。

時間発展の演算子 $U(t,0)$, (7.37), を用いれば、ファインマンの伝播関数 (Feynman propagator) は、次のように求められる：

$$\begin{aligned}\langle q_1|U(t,0)|q_2\rangle \;&=\; \sum_n\langle q_1|n;t\rangle\exp\Big[\frac{i}{\hbar}\int_0^t\theta_n(t')dt'\Big]\ \langle n;0|q_2\rangle \\ &=\; \Big(\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi i\hbar\sin\varphi(t)}\Big)^{1/2}\Big(A(t)A(0)\Big)^{-1/4}\exp\Big[-\frac{i}{2\hbar}\Big(\frac{B(t)}{A(t)}q_1^2-\frac{B(0)}{A(0)}q_2^2\Big)\Big] \\ &\qquad \times\exp\Big[i\frac{(\xi^2(t)q_1^2+\xi^2(0)q_2^2)\cos\varphi(t)-2\xi(t)\xi(0)q_1q_2}{4\sin\varphi(t)}\Big].\end{aligned} \tag{8.60}$$

ただし、この計算では次の公式を用いた：

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\beta(n+\frac{1}{2})}}{n!\sqrt{\pi}}H_n(\xi_1x_1)H_n(\xi_2x_2)\exp\Big\{-\frac{(\xi_1^2x_1^2+\xi_2^2x_2^2)}{4}\Big\} \\ &\qquad=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sinh\beta}}\exp\Big\{-\frac{(\xi_1^2x_1^2+\xi_2^2x_2^2)\cosh\beta-2\xi_1\xi_2x_1x_2}{4\sinh\beta}\Big\}.\end{aligned} \tag{8.61}$$

8.2.2 一般振動子のコヒーレント状態

(8.44) で定義された演算子 $a(t)$ の固有状態について考察する。これは時間依存の演算子であるが、固有値方程式は 5.2.1 におけるように

$$a(t)|\alpha;t\rangle=\alpha|\alpha;t\rangle, \tag{8.62}$$

と書かれる。ここに固有値 α は任意の複素数であり、時間によらないとしてよい。これは、一見、7.2.3 の結果に抵触するかのようであるが、固有値 α が連続的で、しかも任意の複素数値を取り得ることのために、$a(t)$ と $a(t')(t\neq t')$ は同一の固有値をもち得るのである。実際、固有状態 $|\alpha;t\rangle$ は、(5.29) と類似の形で具体的に構成される：

$$|\alpha;t\rangle=e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n;t\rangle. \tag{8.63}$$

ここで $a(t)$ の時間依存性は、$|n;t\rangle$ の中に反映されている。

さて、$t=0$ で $|\alpha;0\rangle$ から出発し、シュレーディンガー方程式に従って時刻 t まで時間発展した状態を $|t\rangle_{\alpha,s}$ としよう：

$$|t\rangle_{\alpha,s}=U(t,0)|\alpha;0\rangle. \tag{8.64}$$

ここで $U(t,0)$ に対して、再び (7.37) を用い、(8.58), (8.20) を考慮すれば

$$\begin{aligned}|t\rangle_{\alpha,s} &= \exp\Big[-\frac{|\alpha|^2}{2}-\frac{i}{2}\varphi(t)\Big]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\tilde{\alpha}(t))^n}{\sqrt{n!}}|n;t\rangle, \\ &\tilde{\alpha}(t)\equiv\alpha\exp(-i\varphi(t))\end{aligned} \tag{8.65}$$

が得られる。(8.65) を (8.63) と比較すると、$|t\rangle_{\alpha,s}$ は、$|\alpha;t\rangle$ とは定義が異なるにも拘わらず、やはり $a(t)$ の固有状態、あるいはコヒーレント状態 $|\tilde{\alpha}(t);t\rangle$ に留まることが分かる。すなわち、

$$a(t)|t\rangle_{\alpha,s}=\tilde{\alpha}(t)|t\rangle_{\alpha,s}. \tag{8.66}$$

上式はまた、~~右~~左辺を直接計算することによっても確かめられる。

状態 $|t\rangle_{\alpha,s}$ の $q-$ 表示は、(8.63) に (8.54), (5.39) を併用すれば求められる：

$$\begin{aligned}\langle q|t\rangle_{\alpha,s} &= \sqrt{\frac{\xi(t)}{\sqrt{2\pi}}}\exp\Big[-\frac{|\alpha|^2}{2}-\frac{i}{2}\varphi(t)-\Big(\frac{\xi^2(t)}{4}+\frac{i}{2\hbar}\frac{B(t)}{A(t)}\Big)q^2 \\ &\qquad +\tilde{\alpha}(t)\xi(t)q-\frac{1}{2}(\tilde{\alpha})^2\Big].\end{aligned} \tag{8.67}$$

因みに上の結果は、(8.59) において $c_n = \alpha^n \exp(-|\alpha|^2/2)/\sqrt{n!}$ とおくことによっても求められる。

次に状態 $|t\rangle_{\alpha,s}$ に関する期待値 $\langle\cdots\rangle$ を、q, p, q^2, p^2 に対して求めてみる。結果は、$\beta_\pm(t) \equiv \tilde{\alpha} \pm \tilde{\alpha}^*(t)$ とおけば

$$\begin{aligned}
\langle q\rangle &= \frac{\beta_+(t)}{\xi(t)}, \quad \langle p\rangle = \Big(\frac{\hbar\xi(t)}{2i}\Big)\beta_-(t) - \Big(\frac{B(t)}{A(t)}\Big)\frac{\beta_+(t)}{\xi(t)}, \\
\langle q^2\rangle &= \frac{1+\beta_+^2(t)}{\xi^2(t)}, \qquad\qquad\qquad\qquad (8.68)\\
\langle p^2\rangle &= \frac{\hbar^2\xi^2(t)}{4}\{1-\beta_-^2(t)\} + i\hbar\Big(\frac{B(t)}{A(t)}\Big)\beta_+(t)\beta_-(t) + \Big(\frac{B^2(t)}{A^2(t)}\Big)\frac{1+\beta_+^2(t)}{\xi^2(t)}
\end{aligned}$$

となる。これを用いて p^2, q^2 に対する平均自乗偏差 $(\triangle q)^2, (\triangle p)^2$ を求めると

$$\begin{aligned}
(\triangle q)^2 &\equiv \langle q^2\rangle - \langle q\rangle^2 = \frac{1}{\xi^2(t)}, \\
(\triangle p)^2 &\equiv \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = \frac{\hbar^2\xi^2(t)}{4} + \frac{B^2(t)}{A^2(t)\xi^2(t)} \qquad (8.69)
\end{aligned}$$

であり、従って

$$(\triangle q)(\triangle p) = \frac{\hbar}{2}\sqrt{1+\frac{4B^2(t)}{\hbar^2A^2(t)\xi^4(t)}} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{A(t)C(t)}{\kappa}} \qquad (8.70)$$

が得られる。

この結果は、たとえコヒーレント状態であっても、$B(t) \neq 0$ である限り、最小不確定性は必ずしも実現されるものではない、ことを示している。

ここで $\alpha = |\alpha|e^{-i\epsilon}$ とおくと、(8.67) はさらに書き直されて

$$\begin{aligned}
\langle q|t\rangle_{\alpha,s} \;=\; &\sqrt{\frac{\xi}{\sqrt{2\pi}}}\exp\Big[\Big\{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{\xi^2}{4}q^2 - \frac{1}{2}|\alpha|^2\cos\Big(2\varphi(t)+2\epsilon\Big) + |\alpha|\xi q\cos\Big(\varphi(t)+\epsilon\Big)\Big\} \\
&+ i\Big\{-\frac{1}{2}\varphi(t) - \frac{1}{2\hbar}\frac{B(t)}{A(t)}q^2 + \frac{1}{2}|\alpha|^2\sin\Big(2\varphi(t)+2\epsilon\Big) - |\alpha|\xi q\sin\Big(\varphi(t)+\epsilon\Big)\Big\}\Big],
\end{aligned}$$

$$(8.67')$$

$|\alpha| = \sqrt{\frac{P}{2\sqrt{\kappa}\hbar}}$

従って

$$|\langle q|\phi(t)\rangle_\alpha|^2 = \frac{\xi}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big[-\frac{\xi^2(t)}{2}\Big\{q - 2\frac{|\alpha|}{\xi(t)}\cos\big(\varphi(t)+\epsilon\big)\Big\}^2\Big]. \quad (8.71)$$

となる。いま $|\alpha| = \sqrt{2\cancel{\sqrt{\kappa}/}(\hbar A)}$ と取れば、$|\alpha|/\xi = \sqrt{AP/4\kappa}$。そこで $\sqrt{A(t)P/4\kappa}$ を一定に保ち $\hbar \to 0$ とすれば、$|\alpha| \to \infty, \xi \to \infty$ となる。従って、5.2.1 におけると同様にして

$$\lim_{\hbar\to 0} |\langle q|t\rangle_{\alpha,s}|^2 = \delta\Big\{q - \sqrt{\frac{A(t)P}{\kappa}}\cos\big(\varphi(t)+\epsilon\big)\Big\}, \quad (8.72)$$

が結論される。上式で $\epsilon = \varphi_0 + 3\pi/2$ とすれば、波束の運動の極限は古典的軌道 (6.9′) に一致する。すなわち、波束が最小不確定性をもたなくても、それは正しい古典的な極限をもつことになる。古典論におけると同一の関数 $\varphi(t)$ が量子論的状態にも現れることが、上の結果を可能ならしめていることを、ここで改めて強調しておく。

8.3 ハミルトン・ヤコビ表示

8.3.1 新しい表示への移行

よく知られているように、古典（解析）力学においては、ハミルトン・ヤコビの方程式の解、すなわちハミルトンの主関数（Hamilton's principal functions）を母関数とするような正準変換を行うことにより、変換後のハミルトニアン K を 0 とすることができる:$H \to K = 0$。量子力学においても、以下に示すように、例えば通常のシュレーディンガー表示から出発してこのような変換を行うことができる。こうして得られた表示のことを、以下では便宜上、ハミルトン・ヤコビ表示 (Hamilton-Jacobi representation)、略して H·J 表示と呼ぶことにする。

H · J 表示を、一般振動子について調べることとし、このために 8.1.3 で論じた正準変換 (2) の方法を採る。ここでの正準運動量および座標は、それぞれ γ, η である。関数 $s_2(\gamma, t)$ を 8.1.3 ii) のように選べば、量子論においても、変換後のハミルトニアンに対して $K_2 = 0$ が期待されよう。このとき γ, η と p, q の関係は (8.24), (8.36) で与えられる。演算子に対しては、以下必要な折には、上付き記号ˆを用いることにすれば

$$\hat{\gamma}(t) = f(t)\hat{p} + g(t)\hat{q},$$

(8.24′)

$$\hat{\eta}(t) = (-2f(t)\tilde{\varphi}(t))\hat{p} + \Big(\frac{1}{f(t)} - 2g(t)\tilde{\varphi}(t)\Big)\hat{q}$$

(8.36′)

である。両式から明らかなように、ここで考えている変換は単なる点変換ではなく、また $q-$ 表示から $p-$ 表示に移る変換とも異なる。以下では、先ず、この変換に対する変換関数を求めることから始める。

さて、容易に確かめられるように、$\hat{\eta}(t)$ 自体は $\mathcal{D}\hat{\eta}/\mathcal{D}t = 0$ の意味での保存量であるが、t を陽に含んでいるので、その固有値方程式は、7.2.2 におけるように

$$\hat{\eta}(t)|\eta; t\rangle = \eta|\eta; t\rangle \tag{8.73}$$

の形に書かれる。ここで固有値 η は、t によらない任意の実数であり、固有状態 $|\eta; t\rangle$ に対する $q-$ 表示は、以下のようにして求められる。先ず $\langle q|\hat{\eta}|\eta; t\rangle$ を考えると

$$\langle q|\hat{\eta}|\eta; t\rangle = \Big[2i\hbar f(t)\tilde{\varphi}(t)\frac{\partial}{\partial q} + \Big(\frac{1}{f(t)} - 2g(t)\tilde{\varphi}(t)\Big)q\Big]\langle q|\eta; t\rangle = \eta\langle q|\eta; t\rangle. \tag{8.74}$$

上式を $\langle q|\eta; t\rangle$ について解けば、規格化された解は

$$\langle q|\eta; t\rangle = \Phi(\eta)\ (4\pi\hbar f(t)\tilde{\varphi}(t))^{-1/2}\exp\Big[-\frac{i}{\hbar}\frac{\eta q + (g(t)\tilde{\varphi}(t) - \frac{1}{2f(t)})q^2}{2f(t)\tilde{\varphi}(t)}\Big] \tag{8.75}$$

となる。ここで $\Phi(t)$ は任意の位相係数である：$|\Phi(t)| = 1$。

他方、任意の状態 $|\ \rangle$ に対する行列要素 $\langle\eta; t|\hat{\gamma}|\ \rangle$ は、(8.24′), (8.75) より

$$\langle\eta; t|\hat{\gamma}|\ \rangle = \Phi^*(\eta)\int dq\langle\eta; t|q\rangle\langle q|\hat{\gamma}|\ \rangle = \Big(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\eta} - \frac{\hbar}{i\Phi^*}\frac{\partial\Phi^*}{\partial\eta} - \frac{\eta}{2\tilde{\varphi}(t)}\Big)\langle\eta; t|\ \rangle \tag{8.76}$$

ゆえ、$\Phi(t) = \exp[i\eta^2/(4\hbar\tilde{\varphi}(t)]$ とおけば、結局

$$\langle\eta; t|\hat{\eta}|\ \rangle = \eta\langle\eta; t|\ \rangle, \quad \langle\eta; t|\hat{\gamma}|\ \rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\eta}\langle\eta; t|\ \rangle \tag{8.77}$$

が得られる。このとき (8.75) は

$$\langle q|\eta; t\rangle = (4\pi\hbar f(t)\tilde{\varphi}(t))^{-1/2}\exp\Big[\frac{i}{\hbar}\frac{f(t)\eta^2 - 2\eta q - 2(g(t)\tilde{\varphi}(t) - \frac{1}{2f(t)})q^2}{4f(t)\tilde{\varphi}(t)}\Big]$$

(8.75′)

となる。$\left\langle \eta; t|q\right\rangle = \langle q|\eta; t\rangle^*$ が、$q-$ 表示から $\eta-$ 表示への求める変換関数である。

基底状態 $\{|q\rangle\}$ が完全直交系をなすならば、容易に示されるように上記の変換関数で結ばれた $\{|\eta; t\rangle\}$ もまた完全直交系となる。そこで時間依存のユニタリー演算子 $T(t)$ を次式によって定義しよう：

$$T(t) \equiv \int d\eta |\eta; t\rangle\langle\eta|. \tag{8.78}$$

$T(t)$ のユニタリー性は上記のことから明らかである。このとき当然のことながら

$$|\eta; t\rangle = T|\eta\rangle \tag{8.79}$$

である。

(8.78) を用いれば直ちに

$$\begin{aligned} T\hat{q}T^\dagger &= \int d\eta d\eta' |\eta; t\rangle\langle\eta|\hat{q}|\eta'\rangle\langle\eta'; t| = \int d\eta\ \eta|\eta; t\rangle\langle\eta; t| \\ &= \int d\eta\hat{\eta}|\eta; t\rangle\langle\hat{\eta}; t| = \hat{\eta}. \end{aligned} \tag{8.80}$$

他方、$T\hat{p}T^\dagger$ に対しても同様にして

$$T\hat{p}T^\dagger = i\hbar\int d\eta\frac{\partial}{\partial\eta}|\eta; t\rangle\cdot\langle\eta; t| \tag{8.81}$$

が得られる。従ってその行列要素

$$\langle q|T\hat{p}T^\dagger|q'\rangle = i\hbar\int d\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\langle q|\eta; t\rangle\cdot\langle\eta; t|q'\rangle$$

において、(8.75′) の具体的表式を用いれば

$$= -\frac{1}{2\tilde{\varphi}}\int d\eta\overset{\langle q}{\,}\eta|\eta; t\rangle\langle\eta; t|\overset{q'\rangle}{\,} + \frac{1}{2f\tilde{\varphi}}q\langle q|q'\rangle,$$

ここで第一項に対して (8.80) を考慮すれば

$$= \langle q|\hat{\gamma}|q'\rangle$$

となり、結局

$$T\hat{p}T^\dagger = \hat{\gamma}$$

(8.81′)

が得られる。

また、(8.80), (8.81′) を逆に解けば

$$T^\dagger \hat{p} T = (\frac{1}{f} - 2g\tilde{\varphi})\hat{p} - g\hat{q}, \quad T^\dagger \hat{q} T = 2f\tilde{\varphi}\hat{p} + f\hat{q} \tag{8.82}$$

となる。これは 8.1.3 における変数変換 (8.28) に対応する。

8.3.2　HJ 表示のハミルトニアン

シュレーディンガー方程式に従う状態を $|t\rangle_s$ とするとき、通常の波動関数は $\langle q|t\rangle_s = \psi(q,t)$ で与えられるのに対応して

$$\langle \eta; t|t\rangle_s \equiv \Psi(\eta, t) \tag{8.83}$$

を HJ 表示の波動関数と定義しよう。このとき $\Psi(\eta,t) = \langle \eta|T^\dagger(t)|t\rangle_s$ である。$i\hbar\dot{\psi}(q,t) = \int dq' \langle q|\hat{H}(\hat{p},\hat{q},t)|q'\rangle\psi(q',t)$ であるから、$\Psi(\eta,t)$ に対しては

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\eta,t)}{\partial t} = \int d\eta' \langle \eta|\hat{K}|\eta'\rangle\Psi(\eta',t) \tag{8.84}$$

が成り立つ。ここに HJ 表示におけるハミルトニアン $\hat{K}$ は

$$\hat{K} \equiv T^\dagger \hat{H}(\hat{p},\hat{q},t)T + i\hbar\dot{T}^\dagger T \tag{8.85}$$

で与えられる。

さて、上式右辺第一項は、$\hat{H}(\hat{p},\hat{q},t)$ に対する表式 (8.1) および (8.82) を用いると

$$\begin{aligned} T^\dagger \hat{H}(\hat{p},\hat{q},t)T \;=\; & \Big\{\Big(\frac{1}{f} - 2g\tilde{\varphi}\Big)^2 X + 4\tilde{\varphi}(1 - 2fg\tilde{\varphi})Y + 4f^2\tilde{\varphi}^2 Z\Big\}\hat{p}^2 \\ & + \Big\{-(\frac{g}{f} - 2g^2\tilde{\varphi}\Big)X + (1 - 4fg\tilde{\varphi})Y + 2f^2\tilde{\varphi}Z\Big\}(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}) \\ & + (g^2 X - 2fgY + f^2 Z)\hat{q}^2 \end{aligned} \tag{8.86}$$

となる。

他方、(8.85) 式第二項に対しては、その行列要素をとると

$$
\begin{aligned}
i\hbar\langle\eta|\dot{T}^\dagger T|\eta'\rangle &= i\hbar\int dq\frac{\partial}{\partial t}\langle\eta|T^\dagger|q\rangle\cdot\langle q|T|\eta'\rangle \\
&= i\hbar\int dq\frac{\partial}{\partial t}\langle\eta;t|q\rangle\cdot\langle q|\eta';t\rangle \\
&= i\hbar\int dq\Big[-\frac{\dot{f}\tilde{\varphi}+f\dot{\tilde{\varphi}}}{2f\tilde{\varphi}}+\frac{i}{4\hbar f^2\tilde{\varphi}^2}\{f^2\dot{\varphi}\eta^2-2(\dot{f}\tilde{\varphi}+f\dot{\tilde{\varphi}})\eta q \\
&\qquad -2(\dot{f}g\tilde{\varphi}^2-f\dot{g}\tilde{\varphi}^2-\frac{1}{2}\dot{\tilde{\varphi}}-\frac{\dot{f}}{f}\tilde{\varphi})q^2\}\Big]\langle\eta;t|q\rangle\langle q|\eta';t\rangle
\end{aligned} \tag{8.87}
$$

となる。ここで

$$
q\langle\eta:t|q\rangle=2f\tilde{\varphi}\Big(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\eta}{2\tilde{\varphi}}\Big)\langle\eta;t|q\rangle, \tag{8.88}
$$

および (8.30), (8.33) を用いると、(8.87) は

$$
\begin{aligned}
(8.87) &= \Big[-\hbar^2\Big\{\Big(\frac{4g\tilde{\varphi}}{f}-\frac{1}{f^2}-4g^2\tilde{\varphi}^2\Big)X+4\tilde{\varphi}(2fg\tilde{\varphi}-1)Y-4f^2\tilde{\varphi}^2Z\Big\}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \\
&\quad -\frac{i\hbar}{f}\{g(1-2fg\tilde{\varphi})X-f(1-4fg\tilde{\varphi})Y-2f^3\tilde{\varphi}Z\}\Big(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\partial}{\partial\eta}\eta\Big) \\
&\qquad -(g^2X-2fgY+f^2Z)\eta^2\Big]\langle\eta|\eta'\rangle
\end{aligned} \tag{8.87'}
$$

と変形されるが、これは更に次の形に書かれる：

$$
\begin{aligned}
(8.87') &= -\langle\eta|\Big[\Big\{\Big(\frac{1}{f}-2g\tilde{\varphi}\Big)^2X+4\tilde{\varphi}(1-2fg\tilde{\varphi})Y+4f^2\tilde{\varphi}^2Z\Big\}\hat{p}^2 \\
&\quad +\{-(\frac{g}{f}-2g^2\tilde{\varphi})X+(1-4fg\tilde{\varphi})Y+2f^2\tilde{\varphi}Z\}(\hat{p}\hat{q}+\hat{q}\hat{p}) \\
&\qquad +(g^2X-2fgY+f^2Z)\hat{q}^2\Big]|\eta'\rangle.
\end{aligned} \tag{8.87''}
$$

従って、(8.86) と (8.87″) により $\langle\eta|(T^\dagger\hat{H}T+i\hbar\dot{T}^\dagger T)|\eta'\rangle=\langle\eta|\hat{K}|\eta'\rangle=0$、すなわち

$$
\hat{K}=T^\dagger\hat{H}T+i\hbar\dot{T}^\dagger T=0 \tag{8.89}
$$

が結論される。

(8.84) から上式は

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\eta,t)}{\partial t}=0 \tag{8.90}$$

を意味する。この事情は、まさに古典力学における $\gamma=\text{const.}, \eta=\text{const.}$ の反映である。これを要するに、HJ 表示とは、喩えて言うならば、運動物体を、物体に固定した座標系から眺めることに対応している。

さて、上記ハミルトニアンの変換 $\hat{H}\to\hat{K}=T^\dagger\hat{H}T+i\hbar\dot{T}^\dagger T$ は、古典力学における変換 $H\to K=H+\partial S/\partial t$ (S は母関数) の量子力学版であり、$T^\dagger\hat{H}T+i\hbar\dot{T}^\dagger T=0$ は、従って、ハミルトン・ヤコビの方程式の量子力学版と言える。ところでこの方程式は $i\hbar\dot{T}=\hat{H}T$ を意味し、状態の時間発展の演算子 $U(t,0)$ に対する (7.27) 第一式と全く同一である。両演算子の相違は、従って、その初期条件のみであり、$T(t)=U(t,0)T(0)$ と書くことができる。このとき $\Psi(\eta,t)\equiv\langle\eta|T^\dagger(t)|t\rangle_s=\langle\eta|T^\dagger(0)U^\dagger(t,0)U(t,0)|0\rangle_s=\langle\eta|T^\dagger(0)|0\rangle_s=\Psi(\eta,0)$ となり、(8.90) はまさに当然の帰結であった。ここで $|0\rangle_s$ をハイゼンベルグ表示における状態と見なすならば、これは HJ 表示の状態とは、たんに、時間に依らないユニタリー変換 $T^\dagger(0)$ だけ相違している。他方、HJ 表示の演算子については、ハイゼンベルグ演算子とは異なり、時間 t を陽に含む特別なシュレーディンガー演算子 $\hat{\gamma}(t),\hat{\eta}(t)$ を用いねばならない。このような演算子が、古典力学における対応物、すなわち正準変数 $\gamma(t),\eta(t)$ から直接導かれることを、上記の議論は示している。

8.3.4 では、(8.90) を二、三の場合について、具体的な計算によって直接確認する。

8.3.3 変換 $T(t)$ の演算子による表現

ここでは、さきに (8.78) で定義した時間依存のユニタリー演算子 $T(t)$ を、直接演算子 p,q でもって表現することを試みる。

そのために先ず

$$T(t)=\exp\Bigl(\frac{i}{\hbar}G(t)\Bigr),\quad G(t)=\frac{1}{2}\Bigl\{a(t)p^2+b(t)(pq+qp)+c(t)q^2\Bigr\} \tag{8.91}$$

とおく。ここに $a(t),b(t),c(t)$ は t の実関数とする。このとき、次の関

係が成り立つ：

$$TpT^\dagger = \Big(\cosh z - \frac{b}{z}\sinh z\Big)p - \frac{c}{z}\sinh z\cdot q,$$
$$TqT^\dagger = \Big(\cosh z + \frac{b}{z}\sinh z\Big)q + \frac{a}{z}\sinh z\cdot p, \tag{8.92}$$
$$z^2 \equiv b^2 - ac.$$

従って問題は、(8.92) の変換式が、それぞれ (8.81′), (8.80) を再現するように、$a(t), b(t), c(t)$ を決定することとなる：

$$TpT^\dagger = f(t)p + g(t)q \equiv \alpha_1 p + \alpha_2 q,$$
$$TqT^\dagger = \Big(\frac{1}{f(t)} - 2g(t)\tilde{\varphi}(t)\Big)q + (-2f(t)\tilde{\varphi}(t))p \equiv \beta_1 q + \beta_2 p; \tag{8.93}$$

すなわち

$$\alpha_1 = \cosh z - \frac{b}{z}\sinh z, \qquad \alpha_2 = -\frac{c}{z}\sinh z,$$
$$\beta_1 = \cosh z + \frac{b}{z}\sinh z, \qquad \beta_2 = \frac{a}{z}\sinh z \tag{8.94}$$

が要求される。

(8.94) を a,b,c,z について解けば

$$a = -\frac{\beta_2}{\alpha_2}c, \quad b = \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2\alpha_2}c,$$
$$c = 2\alpha_2\Big\{(\alpha_1 - \beta_2)^2 + 4\alpha_2\beta_2\Big\}^{-1/2} z, \tag{8.95}$$
$$z = \frac{1}{2}\log\Big\{\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha_1 + \beta_1)^2 - 4}\Big\}^2$$

が得られる。従って最終的な表式は

$$a = \frac{2f}{g}\tilde{\varphi}c, \qquad b = \frac{1}{g}\Big(\frac{f}{2} - \frac{1}{2f} + g\tilde{\varphi}\Big)c,$$
$$c = \frac{g}{2\sqrt{(\frac{f}{2} + \frac{1}{2f} - g\tilde{\varphi})^2 - 1}}\log\Big\{(\frac{f}{2} + \frac{1}{2f} - g\tilde{\varphi}) + \sqrt{(\frac{f}{2} + \frac{1}{2f} - g\tilde{\varphi})^2 - 1}\Big\}^2 \tag{8.95′}$$

となる。因みに (8.91) 右辺では、$z^2 > 0\ (< 0)$ に応じて、$\cosh(\cos), \sinh(\sin)$ が現れる。

8.3.4 状態のHJ表示

以下では、これまで考察してきた二三の状態に対して、HJ表示での波動関数 $\Psi(\eta, t) = \langle \eta, t | \ \rangle$ を、具体的に求めてみる。通常の $q-$ 表示 $\left\langle q | \ \right\rangle$ が既知ならば、$\langle \eta; t | \ \rangle$ は、もちろん、公式

$$\left\langle \eta; t | \ \right\rangle = \int dq \langle \eta; t | q \rangle \langle q | \ \rangle \tag{8.96}$$

に (8.75′) を併用すれば計算できる。例として先ず。8.2.1 で考察した演算子 $a(t)$ の固有状態 $|n; t\rangle$ を調べてみる。しかし、(8.96) において $|\ \rangle = |n; t\rangle$ とした場合、その $q-$ 積分はいささか面倒である。ここでは従って、次のような迂回路をとろう。

そのために、先ず行列要素 $\langle \eta; t | a^\dagger(t) | \ \rangle$ を計算する。ただし、$|\ \rangle$ は任意の状態である。(8.96) 式の $|\ \rangle$ を $a^\dagger(t)|\ \rangle$ で置き換え、$a^\dagger(t)$ に対して (8.44) の表式を採れば

$$\begin{aligned}
\langle \eta; t | a^\dagger(t) | \ \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\sqrt{\kappa}A}} \int dq \langle \eta; t | q \rangle \Big\{ (\sqrt{\kappa} - iB) - \hbar A \frac{d}{dq} \Big\} \langle q | \ \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\sqrt{\kappa}A}} \int dq \Big\{ (\sqrt{\kappa} - iB) + \hbar A \frac{d}{dq} \Big\} \langle \eta; t | q \rangle \cdot \langle q | \ \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\sqrt{\kappa}A}} \int dq \Big[\frac{iA}{2f\tilde{\varphi}} \eta + \Big\{ (\sqrt{\kappa} - iB) - i \frac{A(1 - 2fg\tilde{\varphi})}{2f^2\tilde{\varphi}} \Big\} q \Big] \langle \eta; t | q \rangle \langle q | \ \rangle .
\end{aligned} \tag{8.97}$$

ここで (8.88) を用いると

$$\begin{aligned}
(8.97) \ = \ & \frac{1}{\sqrt{2\hbar\sqrt{\kappa}A}} \int dq \Big[\Big\{ \sqrt{\kappa} f - i(fB - gA) \Big\} \eta \\
& + \frac{\hbar}{i} \Big\{ 2\sqrt{\kappa} f \tilde{\varphi} - 2i\tilde{\varphi}(fB - gA) - i\frac{A}{f} \Big\} \frac{\partial}{\partial \eta} \Big] \langle \eta; t | \ \rangle .
\end{aligned} \tag{8.97′}$$

上式で更に、(8.17), (8.32) より得られる関係式

$$\begin{aligned}
fB - gA &= \frac{1}{2} \{ k_3 - (k_1 - k_2) \tilde{\varphi} \} f, \\
2\tilde{\varphi}(fB - gA) + \frac{A}{f} &= (k_1 + k_2 - k_3 \tilde{\varphi}) f,
\end{aligned} \tag{8.98}$$

および $f(t)$ に対する表式 (8.38′) を用いれば

$$(8.97') = -\sqrt{\frac{(k_1+k_2)\hbar}{2\sqrt{\kappa}}}\mathcal{F}(t)\exp\Big[\frac{2\sqrt{\kappa}-ik_3}{4\hbar(k_1+k_2)}\eta^2\Big]\frac{\partial}{\partial\eta}\Big\{\exp[-\frac{2\sqrt{\kappa}-ik_3}{4\hbar(k_1+k_2)}\eta^2]\langle\eta;t|\ \rangle\Big\},$$

$$\mathcal{F}(t)\equiv\Big(\frac{k_1+k_2-k_3\tilde{\varphi}(t)+2i\sqrt{\kappa}\tilde{\varphi}(t)}{k_1+k_2-k_3\tilde{\varphi}(t)-2i\sqrt{\kappa}\tilde{\varphi}(t)}\Big) \tag{8.97''}$$

が得られる。従って

$$\begin{aligned}\langle\eta;t|n;t\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle\eta;t|(\hat{a}^\dagger(t))^n|0;t\rangle \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}}\Big(\frac{(k_1+k_2)\hbar}{2\sqrt{\kappa}}\Big)^{n/2}(\mathcal{F}(t))^n\exp\Big[\frac{2\sqrt{\kappa}-ik_3}{4\hbar(k_1+k_2)}\eta^2\Big]\frac{\partial^n}{\partial\eta^n}\Big\{\exp[-\frac{2\sqrt{\kappa}-ik_3}{4\hbar(k_1+k_2)}\eta^2]\langle\eta;t|0;t\rangle\Big\}\end{aligned} \tag{8.99}$$

となる（ただしここでの $|0;t\rangle$ は $|n;t\rangle|_{n=0}$ とする）。ところで $\langle\eta;t|0;t\rangle$ は簡単に求められて

$$\begin{aligned}\langle\eta;t|0;t\rangle &= \int dq\langle\eta;t|q\rangle\langle q|0;t\rangle \\ &= (-i)^{1/2}\Big(\frac{\sqrt{\kappa}}{\pi\hbar(k_1+k_2)}\Big)^{1/4}(\mathcal{F}(t))^{1/2}\exp\Big[-\frac{2\sqrt{\kappa}+ik_3}{4\hbar(k_1+k_2)}\eta^2\Big].\end{aligned} \tag{8.100}$$

(8.100) を (8.99) に代入すれば、求める HJ 表示は

$$\langle\eta;t|n;t\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}\Big(\frac{-\sqrt{\kappa}}{\pi\hbar(k_1+k_2)}\Big)^{1/4}(\mathcal{F}(t))^{n+1/2}\exp\Big[-\frac{2\sqrt{\kappa}+ik_3}{4\hbar(k_1+k_2)}\eta^2\Big]H_n\Big(\sqrt{\frac{2\sqrt{\kappa}}{\hbar(k_1+k_2)}}\eta\Big) \tag{8.101}$$

となる。

他方、(8.58), (8.20), (8.40) より

$$\exp\Big[\frac{i}{\hbar}\int_0^t\theta_n(t')dt'\Big]=\exp\Big[-i(n+\frac{1}{2})\varphi(t)\Big]=(\mathcal{F}(t))^{-(n+1/2)} \tag{8.102}$$

である。ところでシュレーディンガー方程式を満たす状態 $|t\rangle_s$ に対しては (7.24) が成り立つが、この式に (8.101), (8.102) を代入すれば

$$\langle\eta;t|t\rangle_s = \sum_{n=0} c_n\exp\Big[\frac{i}{\hbar}\int_0^t\theta(t')dt'\Big]\langle\eta;t|n;t\rangle$$

$$= \sum_n \frac{c_n}{\sqrt{n!}}\Big(\frac{-\sqrt{\kappa}}{\pi\hbar(k_1+k_2)}\Big)^{1/4} \exp\Big[-\frac{2\sqrt{\kappa}+ik_3}{4\hbar(k_1+k_2)}\eta^2\Big] H_n\Big(\sqrt{\frac{2\sqrt{\kappa}}{\hbar(k_1+k_2)}}\,\eta\Big) \tag{8.103}$$

が得られる。これはシュレーディンガー方程式の一般の解に対する HJ 表示に他ならない。(8.101), (8.103) から明らかなように、$\langle\eta;t|n;t\rangle$ は t に依存するのに対し、$\langle\eta;t|t\rangle_s$ は t には依らない。これは (8.90) よりして当然の結果である。このためには、幾何学的位相からの寄与が不可欠であったことに注意されたい。

ファインマンの伝播関数の HJ 表示も興味深い形をしている。(7.37) を用いれば、以下のように求められる：

$$\begin{aligned}
\langle\eta_1;t|U(t,0)|\eta_2;0\rangle &= \sum_n \langle\eta_1;t|n;t\rangle \exp\Big[\frac{i}{\hbar}\int_0^t \theta_n(t')dt'\Big]\langle n;0|\eta_2;0\rangle \\
&= \Big(\frac{\sqrt{\kappa}}{\pi\hbar(k_1+k_2)}\Big)^{1/2} \exp\Big[-\frac{\sqrt{\kappa}(\eta_1^2+\eta_2^2)}{2\hbar(k_1+k_2)}\Big] \exp\Big[-\frac{ik_3(\eta_1^2-\eta_2^2)}{4\hbar(k_1+k_2)}\Big] \\
&\quad \times \sum_n \frac{1}{n!} H_n\Big(\sqrt{\frac{2\sqrt{\kappa}}{\hbar(k_1+k_2)}}\,\eta_1\Big) H_n\Big(\sqrt{\frac{2\sqrt{\kappa}}{\hbar(k_1+k_2)}}\,\eta_2\Big), \\
&= \exp\Big[-\frac{i}{4\hbar}\frac{k_3(\eta_1^2-\eta_2^2)}{k_1+k_2}\Big]\delta(\eta_1-\eta_2) = \delta(\eta_1-\eta_2).
\end{aligned} \tag{8.104}$$

ここでは公式

$$\lim_{\beta\to 0}\sum_{n=0} \frac{e^{-\beta(n+1/2)}}{n!} H_n(\xi_1 x_1) H_n(\xi_2 x_2) \exp\Big[-\frac{\xi_1^2 x_1^2 + \xi_2^2 x_2^2}{4}\Big] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\delta\Big(\frac{\xi_1}{2}x_1 - \frac{\xi_2}{2}x_2\Big). \tag{8.105}$$

を用いた。(8.104) の結果も (8.90) に対応したものである。

コヒーレント状態の HJ 表示も容易に求められる。(8.65) で与えられた $|t\rangle_{\alpha,s}$ に対しては

$$\langle\eta;t|t\rangle_{\alpha,s} = \Big(\frac{-\sqrt{\kappa}}{\pi\hbar(k_1+k_2)}\Big)^{1/4} \exp\Big[-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{2\sqrt{\kappa}+ik_3}{4\hbar(k_1+k_2)}\eta^2 + \alpha\sqrt{\frac{2\sqrt{\kappa}}{\hbar(k_1+k_2)}}\eta\Big] \tag{8.106}$$

であり、t に無関係になる。さらに

$$|\langle\eta;t|t\rangle_{\alpha,s}|^2 = \Big(\frac{\sqrt{\kappa}}{\pi\hbar(k_1+k_2)}\Big)^{1/2} \exp\Big[-\frac{\sqrt{\kappa}}{\hbar(k_1+k_2)}\Big\{\eta - |\alpha|\sqrt{\frac{2\hbar(k_1+k_2)}{\sqrt{\kappa}}}\cos\epsilon\Big\}^2\Big]. \tag{8.107}$$

従って、その古典的極限は

$$\lim_{\hbar\to 0}|\langle\eta;t|t\rangle_{\alpha,s}|^2=\delta(\eta-\eta_0), \tag{8.108}$$
$$|\alpha|=\sqrt{\frac{\sqrt{\kappa}}{\pi\hbar(k_1+k_2)}\frac{\eta_0}{\cos\epsilon}}$$

となる。これも古典的な軌道 $\eta=\eta_0(=\text{const.})$ に対応した結果である。

8.4 具体的な例

8.4.1 調和振動子

$X(t)=1/(2m), Y(t)=0, Z(t)=m\omega^2/2$ のとき、われわれの系は通常の調和振動子に帰着する。このとき $f(t)=\sqrt{1/(2m\omega)}\cos\omega t$ が (8.31) を満たし、(8.38), (8.33) で導入した $f_1(t), f_2(t), \tilde{\varphi}(t)$ はそれぞれ

$$f_1(t)=\sqrt{\frac{1}{2m\omega}}\cos\omega t,\qquad f_2(t)=-\sqrt{\frac{1}{2m\omega}}\sin\omega t,\qquad \tilde{\varphi}(t)=\tan\omega t \tag{8.109}$$

としてよい。このとき $\dot{f}_1f_2-f_1\dot{f}_2=X$ である。

(8.16) はいまの場合

$$\ddot{A}-\frac{\dot{A}^2}{2A}+2\omega^2A-\frac{2\kappa}{m^2}\frac{1}{A}=0 \tag{8.110}$$

であるが、(8.38), (8.109), (8.17) より解 $A(t)$、およびそれに対応する $B(t), C(t)$ は以下のようになる：

$$\begin{aligned}A(t)&=\tfrac{1}{2m\omega}(k_1+k_2\cos 2\omega t-k_3\sin 2\omega t),\\ B(t)&=\tfrac{1}{2}(k_2\sin 2\omega t+k_3\cos 2\omega t),\\ C(t)&=\tfrac{m\omega}{2}(k_1-k_2\cos 2\omega t+k_3\sin 2\omega t),\\ &\qquad (k_1^2-k_2^2-k_3^2=4\kappa).\end{aligned} \tag{8.111}$$

(8.4) で定義された保存量 P、あるいは一般化された作用変数に対する（古典的な）表式は

$$\begin{aligned}P&=\frac{1}{2m\omega}(k_1+k_2\cos 2\omega t-k_3\sin 2\omega t)p^2+(k_2\sin 2\omega t+k_3\cos 2\omega t)pq\\ &\quad+\frac{m\omega}{2}(k_1-k_2\cos 2\omega t+k_3\sin 2\omega t)q^2\end{aligned} \tag{8.112}$$

であり、一般にはtを陽に含む。とくに$k_2 = k_3 = 0(k_1 = 2\sqrt{\kappa})$ならば

$$P = \frac{2\sqrt{\kappa}}{\omega} H \tag{8.112'}$$

である。

以下、系の古典的、量子論的性質について、二、三の結果を付加しておく。先ず、(8.41), (8.109) より古典的運動方程式の解は

$$q = \sqrt{\frac{P}{2m\omega\kappa(k_1+k_2)}}\Big\{(2\sqrt{\kappa}\cos\varphi_0 - k_3\sin\varphi_0)\sin\omega t + (k_1+k_2)\sin\varphi_0\cos\omega t\Big\} \tag{8.113}$$

であり、$k_2 = k_3 = 0(k_1 = 2\sqrt{\kappa})$ならば$q = \sqrt{P/(m\omega\sqrt{\kappa})}\sin(\omega t + \varphi_0)$に帰着する。また (8.109),(8.111) を用いると、次の関係式が導かれる：

$$\begin{aligned}
&\frac{\xi(t)\xi(0)}{\sin\varphi(t)} = \frac{2m\omega}{\hbar\sin\omega t}, \qquad \cot\varphi(t) = \frac{(k_1-k_2)\cos\omega t + k_3\sin\omega t}{2\sqrt{\kappa}\sin\omega t},\\
&-\frac{1}{2\hbar}\frac{B(t)}{A(t)} + \frac{\xi^2(t)}{4}\cot\varphi(t) = \frac{m\omega}{2\hbar}\cot\omega t,\\
&\frac{1}{2\hbar}\frac{B(0)}{A(0)} + \frac{\xi^2(0)}{4}\cot\varphi(t) = \frac{m\omega}{2\hbar}\cot\omega t.
\end{aligned} \tag{8.114}$$

これらを (8.60) に代入すれば、ファインマンの伝播関数は

$$\langle q_1|U(t,0)|q_2\rangle = \Big(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega t}\Big)^{1/2}\exp\Big[\frac{im\omega}{2\hbar}\frac{\big((q_1^2+q_2^2)\cos\omega t - 2q_1q_2\big)}{\sin\omega t}\Big] \tag{8.115}$$

となり、k_1, k_2, k_3に無関係なよく知られた表式に一致する。動力学的位相や幾何学的位相に関係した量も計算しておくと

$$\begin{aligned}
&\big\langle n;t|H|n;t\big\rangle = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega\ \frac{k_1}{2\sqrt{\kappa}},\\
&\langle n;t|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|n;t\rangle = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega\ \frac{k_2(k_2+k_1\cos 2\omega t) + k_3(k_3+k_1\sin 2\omega t)}{2\sqrt{\kappa}(k_1+k_2\cos 2\omega t - k_3\sin 2\omega t)}
\end{aligned} \tag{8.116}$$

となる。また不確定性関係は

$$\triangle q\triangle p = \frac{\hbar}{2}\sqrt{1+\frac{(k_2\sin 2\omega t + k_3\cos 2\omega t)^2}{4\kappa}} \tag{8.117}$$

となる。従って一般に $(k_2 \neq 0, k_3 \neq 0)$ 幾何学的位相は 0 ではなく、不確定性関係も必ずしも最小値にはならない。これらの結果から、さらに次のことも結論される：幾何学的位相は、$H = H(t)$ の場合にのみ妥当する概念ではない。

8.4.2 減衰振動子

この場合

$$X(t) = \frac{1}{2m}e^{-2\mu t}, \quad Y(t) = 0, \quad Z(t) = \frac{m\omega^2}{2}e^{2\mu t} \ \ (\mu < \omega) \tag{8.118}$$

であり、運動方程式は

$$\ddot{q} + 2\mu\dot{q} + \omega^2 q = 0, \tag{8.119}$$

(8.16) 式は

$$\ddot{A} - \frac{\dot{A}^2}{2A} + 2\mu\dot{A} + 2\omega^2 A - \frac{2\kappa}{m^2}\frac{e^{-4\mu t}}{A} = 0 \tag{8.120}$$

となる。また (8.109), (8.111) は変形されて以下のようになる：

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{1}{2m\tilde{\omega}}}e^{-\mu t}\cos\tilde{\omega}t, \quad f_2(t) = -\sqrt{\frac{1}{2m\tilde{\omega}}}e^{-\mu t}\sin\tilde{\omega}t, \quad \tilde{\varphi}(t) = \tan\tilde{\omega}t$$
$$\tilde{\omega} \equiv \sqrt{\omega^2 - \mu^2}; \tag{8.121}$$

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{e^{-2\mu t}}{2m\tilde{\omega}}(k_1 + k_2\cos 2\tilde{\omega}t - k_3\sin 2\tilde{\omega}t), \\ B(t) &= \frac{1}{2}(k_2\sin 2\tilde{\omega}t + k_3\cos 2\tilde{\omega}t) + \frac{\mu}{2\tilde{\omega}}(k_1 + k_2\cos 2\tilde{\omega}t - k_3\sin 2\tilde{\omega}t), \\ C(t) &= \frac{m\tilde{\omega}}{2}e^{2\mu t}(k_1 - k_2\cos 2\tilde{\omega}t + k_3\sin 2\tilde{\omega}t) + m\mu e^{2\mu t}(k_2\sin 2\tilde{\omega}t + k_3\cos 2\tilde{\omega}t) \\ &\quad + \frac{m\mu^2}{2\tilde{\omega}}e^{2\mu t}(k_1 + k_2\cos 2\tilde{\omega}t - k_3\sin 2\tilde{\omega}t) \\ &\qquad (k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 = 4\kappa). \end{aligned} \tag{8.122}$$

これに応じて保存量 P の（古典的）表式も

$$
\begin{aligned}
P \;=\; & (k_1 + k_2 \cos 2\tilde{\omega}t - k_3 \sin 2\tilde{\omega}t)\Big(\frac{e^{-2\mu t}}{2m\tilde{\omega}}p^2 + \frac{\mu}{\tilde{\omega}}pq + \frac{m\mu^2}{2\tilde{\omega}}e^{2\mu t}q^2\Big) \\
& + (k_2 \sin 2\tilde{\omega}t + k_3 \cos 2\tilde{\omega}t)(pq + m\mu e^{2\mu t}q^2) \\
& + \frac{m\tilde{\omega}}{2}e^{2\mu t}(k_1 - k_2 \cos 2\tilde{\omega}t + k_3 \sin 2\tilde{\omega}t)q^2 \qquad (8.123)
\end{aligned}
$$

と拡張される。とくに $k_2 = k_3 = 0$ $(k_1 = 2\sqrt{\kappa})$ の場合、P は

$$
P = \frac{2\sqrt{\kappa}}{\tilde{\omega}}(H + \mu pq) \qquad (8.123')
$$

となる。

運動方程式 (8.119) の解は、(8.113) に対応して

$$
q = \sqrt{\frac{P}{2m\tilde{\omega}\kappa(k_1 + k_2)}}e^{-\mu t}\Big\{(2\sqrt{\kappa}\cos\varphi_0 - k_3 \sin\varphi_0)\sin\tilde{\omega}t + (k_1 + k_2)\sin\varphi_0 \cos\tilde{\omega}t\Big\} \qquad (8.124)
$$

であり、とくに $k_2 = k_3 = 0$ $(k_1 = 2\sqrt{\kappa})$ ならば $q = \sqrt{\frac{P}{m\tilde{\omega}\sqrt{\kappa}}}e^{-\mu t}\sin(\tilde{\omega}t + \phi_0)$ である。

ファインマンの伝播関数も、先の場合と同様にして求められて

$$
\begin{aligned}
\langle q_1|U(t,0)|q_2\rangle \;=\; & \Big(\frac{m\tilde{\omega}}{2\pi i\hbar \sin\tilde{\omega}t}\Big)^{1/2} e^{\mu t/2} \\
& \times \exp\Big[\frac{im\tilde{\omega}}{2\hbar}e^{2\mu t}(-\mu + \cot\tilde{\omega}t)q_1^2 \\
& \qquad + \frac{im\tilde{\omega}}{2\hbar}(\mu + \cot\tilde{\omega}t)q_2^2 - \frac{im\tilde{\omega}}{\hbar}\frac{e^{\mu t}}{\sin\tilde{\omega}t}q_1 q_2\Big] \qquad (8.125)
\end{aligned}
$$

となる。動力学的ならびに幾何学的位相に関係した行列要素 $\langle n;t|H(t)|n;t\rangle$, $\langle n;t|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|n;t\rangle$ も煩雑な形をとるが、とくに $k_2 = k_3 = 0$ $(k_1 = 2\sqrt{\kappa})$ の場合には

$$
\langle n;t|H(t)|n;t\rangle = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega\,\Big(\frac{\omega}{\tilde{\omega}}\Big), \quad \Big\langle n;t\Big|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Big|n;t\Big\rangle = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega\,\Big(\frac{\mu^2}{\omega\tilde{\omega}}\Big) \qquad (8.126)
$$

である。$\mu \neq 0$ ならば後者 $\neq 0$ であるのは興味深い。

糸の長さが変わる振り子

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{l_0}{l}\right)^2 p^2 + \frac{m\omega^2}{2}\left(\frac{l}{l_0}\right) q^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l_0}}$$

運動方程式

$$\ddot{q} + 2\frac{\dot{l}}{l}\dot{q} + \frac{g}{l} q = 0$$

lが時間の一次関数のとき $(l = l_0(1+\varepsilon t))$

$$f_1(t) = \frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{\frac{\pi g}{2m l_0}}\ \frac{1}{z} J_1(z) \equiv f(t)$$

$$z = \frac{2}{l_0\varepsilon}\sqrt{g l}$$

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{N_1(z)}{J_1(z)} - \frac{N_1(z_0)}{J_1(z_0)} \qquad z_0 = \frac{2}{\varepsilon}\sqrt{\frac{g}{l_0}}$$

$$f_2(t) = -f(t)\tilde{\varphi}(t) = \frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{\frac{\pi g}{2m l_0}}\ \frac{1}{z}\left(N_1(z) - \frac{N_1(z_0)}{J_1(z_0)} J_1(z)\right)$$

$$A(t) = \{(k_1+k_2) - 2k_3\tilde{\varphi} + (k_1-k_1)\tilde{\varphi}^2\} f^2(t)$$

$$B(t) = -\frac{1}{2\chi}\frac{\dot{f}}{f}A + \frac{1}{2}\{k_3 - (k_1-k_2)\tilde{\varphi}\}$$

$$C(t) = \frac{\dot{f}^2}{4\chi^2 f^2} A + \frac{k_1-k_2}{4f^2} - \frac{\dot{f}}{2\chi f}\{k_3 - (k_1-k_2)\tilde{\varphi}\}$$

よって

$$P = A(t)\left(p - \frac{\dot{f}}{2\chi f} q\right)^2 + \{k_3 - (k_1-k_2)\tilde{\varphi}\}\left(p - \frac{\dot{f}}{2\chi f} q\right) q + \frac{k_1-k_2}{4f^2} q^2$$

とする。但し

$$\frac{\dot{f}}{\chi f} = -\frac{m\varepsilon l}{l_0} z \frac{J_2(z)}{J_1(z)}$$

Classical and Quantum Behavior of Generalized Oscillators

- action variable, angle variable and quantum phase -

M. Omote[1)], S. Sakoda[2)] and S. Kamefuchi[3]

[1] Department of Physics, Keio University, Hiyoshi, Yokohama

[2] Department of Mathematics and Physics, National Defense Academy, Yokosuka

[3] Atomic Energy Research Institute, Nihon University, Kanda-Surugadai, Tokyo

Abstract

The relation that exits in quantum mechanics among action variables, angle variables and the phases of quantum states is clarified, by referring to the system of a generalized oscillator. As a by-product, quantum-mechanical meaning of the classical Hamilton-Jacobi equation and related matters is clarified, where a new picture of quantum mechanics is introduced, to be called the Hamilton-Jacobi picture.

I. INTRODUCTION

In the correspondence-theoretical arguments of the early quantum theory the so-called action and angle variables played a very important role[1]: the quantum condition used to be imposed on the former variables, owing to their property of being adiabatic invariants. And the purpose of the present paper is then to study the quantum-mechanical aspects thereof, that is, the problem as to where and how these variables come into play in the conventional formalism of quantum mechanics. As will be seen in what follows, the behavior of these variables are closely related to phases of quantum mechanical states.

Recently, adiabatic invariants have further been utilized in the study of some related problems , such as the Berry phase[2], the Hannay angle[3] etc. . In this connection, we should which is equivalent to (46), provided that the parameters γ and η_0 are assumed to be

$$2\gamma \equiv \sqrt{\frac{P}{(k_1+k_2)\kappa}}(2\sqrt{\kappa}\cos\varphi_0 - k_3\sin\varphi_0), \quad \eta_0 \equiv \sqrt{\frac{P}{(k_1+k_2)\kappa}}(k_1+k_2)\sin\varphi_0. \tag{56}$$

Thus we have shown that two kinds of canonical transformations generated by $S_1(q,P,t)$ and $S_2(q,\gamma,t)$ lead to the same classical solution to the equation of motion (2).

III. QUANTUM SOLUTIONS

In this section we discuss, in the Schrödinger picture, the quantum theory of the system with $H(t)$ given by

$$H(t) = X(t)p^2 + Y(t)(pq+qp) + Z(t)q^2, \tag{57}$$

which is the quantum version of (1).

A. Formal solutions to the Schrödinger equation

In a previous paper[4], we have shown that formal solutions $|\phi(t)\rangle$ of the Schrödinger equation

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\phi(t)\rangle = H(t)|\phi(t)\rangle, \tag{58}$$

can be written in the form

$$|\phi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)\exp\Big[\frac{i}{\hbar}\int_0^t \theta_n(t')dt'\Big]|n;t\rangle, \tag{59}$$

where $|n;t\rangle$ represents the eigenstate of a hermitian operator $\Lambda(t)$ with eigenvalue λ_n. Here we assume for simplicity that the eigenstates are non-degenerate, and the set of $|n;t\rangle$ forms an ortho-normal complete set (for the degenerate cases, see ref.4):

$$\begin{aligned} &\Lambda(t)|n;t\rangle = \lambda_n(t)|n;t\rangle, \quad \langle n;t|m;t\rangle = \delta_{nm}, \\ &\textstyle\sum_n |n;t\rangle\langle n;t| = \mathrm{I}. \end{aligned} \tag{60}$$

The phase function $\theta_n(t)$ is defined by

$$\theta_n(t) \equiv \langle n;t|(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t))|n;t\rangle = \theta^*(t). \tag{61}$$

In this connection let us note that for the case when $\Lambda(\tau) = \Lambda(0)$, or $|n;\tau\rangle \propto |n;0\rangle$ the time integrals $(-1/\hbar)\int_0^\tau dt\langle n;t|H(t)|n;t\rangle$ and $\int_0^\tau dt\langle n;t|i\partial/\partial t|n;t\rangle$ provide, respectively, the so-called dynamical and geometrical phases of the states $|n;t\rangle$[2,7] .

The coefficient $c_n(t)$ in (59) satisfies the differential equation

$$\frac{dc_n(t)}{dt} = \sum_{n'\neq n} \exp\Big[\frac{i}{\hbar}\int_0^t \Big((\theta_{n'}(t') - \theta_n(t')\Big)dt'\Big] \times \frac{\langle n;t|\frac{\mathcal{D}\Lambda(t)}{\mathcal{D}t}|n';t\rangle}{(\lambda_n(t) - \lambda_{n'}(t))}\, c_{n'}(t), \tag{62}$$

where $\mathcal{D}\Lambda(t)/\mathcal{D}t$ denotes

$$\frac{\mathcal{D}\Lambda(t)}{\mathcal{D}t} \equiv \frac{\partial\Lambda(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[\Lambda(t), H(t)]. \tag{63}$$

From (62) and (63), we see that when $\Lambda(t)$ satisfies the relation

$$\frac{\mathcal{D}\Lambda(t)}{\mathcal{D}t} = 0, \tag{64}$$

$\Lambda(t)$ corresponds to a conserved quantity, and all eigenvalues $\lambda_n(t)$ do not depend on t: $\lambda_n(t) = \lambda_n(=\text{const})$. Incidentally, (64) is the quantum version of the classical equation (23), but should not be regarded here as the equation of motion for the operator $\Lambda(t)$, since all operators concerned are those in the Schrödinger picture.

Now for such cases all the coefficients $c_n(t)$ become constants, and the formal solution $|\phi(t)\rangle$ is reduced to[4,8]

$$|\phi(t)\rangle = \sum_n c_n \exp\Big[\frac{i}{\hbar}\int_0^t \theta_n(t')dt'\Big]|n;t\rangle. \tag{65}$$

In this case transitions between eigenstates with different eigenvalues do not occur, that is, in the course of time the state $|n;t\rangle$ keeps its identity specified by n.

B. Formal solutions for a generalized oscillator

We now consider a hermitian operator $\Lambda(t)$ such as

$$\Lambda(t) = A(t)p^2 + B(t)(pq+qp) + C(t)q^2, \tag{66}$$