Warped Compactification with an Abelian Gauge Theory

東大理
早川祥子

contents

宇宙項問題

真空のエネルギー密度

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2}R - \text{定数項} + \mathcal{L}_M \right)$$

Λ_4

現在の観測 $\cancel{\longleftarrow}$? Standard Model dynamics

$\Lambda_4 \sim 0$?

- SUSY?
- ラグランジアンパラメータのfine-tuning?

Λ_4が積分定数であれば、初期値のfine-tuningへと問題が移る。

remaining question

なぜ積分定数として$\Lambda_4 \sim 0$となるものが特に選ばれたのか。

some attempts

・changing gravity

通常の general covariance を持つ作用

$\downarrow$ metricの変分をとる。$\delta g^{\mu\nu}$ s.t. $g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}=0$

($g=\det g_{\mu\nu}$ を dynamical と解釈しない)

Einstein eq. の traceless part

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{4}Rg_{\mu\nu}=-\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}T^{\lambda}{}_{\lambda}\right)$$

Bianchi identity $\quad\quad\quad\quad$ general covariance

$$\nabla^{\mu}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right)=0 \quad \downarrow \quad \nabla^{\mu}T_{\mu\nu}=0$$

$$\partial_{\mu}R=\partial_{\mu}T$$

$$R-T=4\Lambda \qquad \Lambda\text{:積分定数}$$

$$\therefore R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}=-\Lambda g_{\mu\nu}-T_{\mu\nu}$$

· 3-form gauge field

$$F_{\mu\nu\rho\sigma} = \partial_{[\mu} A_{\nu\sigma\rho]}$$

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} R - \text{定数項} - \frac{1}{48} F_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu\rho\sigma} \right\}$$

$$F^{\mu\nu\rho\sigma} = \underbrace{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}_{\text{anti-sym tensor}} f(x)$$

anti-sym tensor $\varepsilon^{0123} = 1$

field eq. $\nabla_\mu F^{\mu\nu\rho\sigma} = 0$

$$\Downarrow$$

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} f) = 0$$

$$\sqrt{-g} f = C \qquad C\text{:積分定数}$$

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} R \underbrace{- \text{定数項} + \frac{1}{2} C^2}_{\Lambda} \right\}$$

・高次元時空の理論からのアプローチ

宇宙項Λの高次元時空

$$\hat{R}_{MN}-\frac{1}{2}\hat{R}\hat{g}_{MN}=-\Lambda\hat{g}_{MN}$$

$$\cup$$

宇宙項Λ_4の4dim時空

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}=-\Lambda_4 g_{\mu\nu}$$

Λ_4：Λに依らない任意のパラメータ

どのアプローチもΛ_4をラグランジアンパラメータに依らない積分定数とすることができる。

高次元時空の理論

- warped metric, brane…
- regularな時空，コンパクトな余次元，安定性，….

basic idea

V.A.Rubakov & M.E.Shaposhnikov
PLB 125 ('83) 139

background metric を warped metric に仮定

$$dS^2 = \hat{g}_{MN}\,dx^M dx^N$$

$$= \underbrace{\sigma(y)}_{\text{warp factor}}\ \underbrace{g_{\mu\nu}(x)}_{\text{4dim observed metric}}\,dx^\mu dx^\nu + \underbrace{\tilde{g}_{ab}(y)\,dy^a dy^b}_{\text{extra N dim spaces}}$$

$$\begin{cases} \hat{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}^a \sigma + \frac{1}{2\sigma} g_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_a \sigma \tilde{\nabla}^a \sigma \\ \hat{R}_{\mu a} = \frac{1}{2\sigma} \partial_a \sigma\, g^{\kappa\lambda} \left(\nabla_\mu g_{\kappa\lambda} - \nabla_\kappa g_{\mu\lambda} \right) = 0 \\ \hat{R}_{ab} = \frac{2}{\sigma} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \sigma - \frac{1}{\sigma^2} \tilde{\nabla}_a \sigma \tilde{\nabla}_b \sigma + \tilde{R}_{ab} \\ \hat{R} = \frac{1}{\sigma} R + \frac{4}{\sigma} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}^a \sigma + \frac{1}{\sigma^2} \tilde{\nabla}_a \sigma \tilde{\nabla}^a \sigma + \tilde{R} \end{cases}$$

$$\hat{R}_{MN} - \frac{1}{2} \hat{R}\, \hat{g}_{MN} = -\Lambda\, \hat{g}_{MN}$$

$$\cup$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = -\Lambda_4\, g_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{R}_{ab} = -\frac{2}{\sigma} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \sigma + \frac{1}{\sigma^2} \tilde{\nabla}_a \sigma \tilde{\nabla}_b \sigma + \frac{2}{N+2} \Lambda\, \tilde{g}_{ab} \\ \frac{2}{N+2} \Lambda \sigma - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}^a \sigma - \frac{1}{2\sigma} \tilde{\nabla}_a \sigma \tilde{\nabla}^a \sigma = \Lambda_4 \end{cases}$$

N=2　$\Lambda>0$を仮定

$$ds^2=\sigma(r)g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu-dr^2-\rho(r)d\theta^2$$

$$(r\geq 0,\ 0\leq\theta<2\pi)$$

満たすべき式

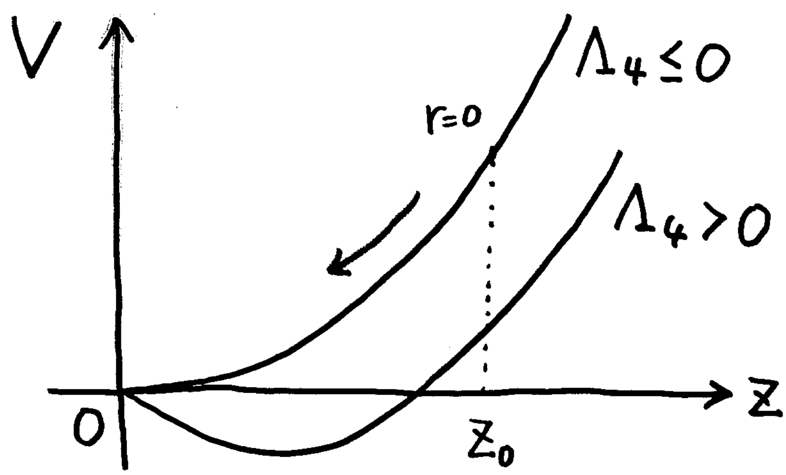
$$\begin{cases} 2\dfrac{\sigma''}{\sigma}-\dfrac{\sigma'^2}{\sigma^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\rho''}{\rho}-\dfrac{1}{4}\dfrac{\rho'^2}{\rho^2}=-\dfrac{\Lambda}{2} & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{\sigma'}{\sigma}\dfrac{\rho'}{\rho}+\dfrac{\sigma'^2}{\sigma^2}-2\dfrac{\sigma''}{\sigma}=0 & \cdots\cdots ② \\ \Lambda_4=\dfrac{1}{2}\Lambda\sigma+\dfrac{1}{4}\dfrac{\sigma'^2}{\sigma^2}+\sigma'' & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

② ⇒ 拘束条件

$$\sigma=Z^{\frac{4}{5}},\quad \rho=C^{-2}Z'^2Z^{-\frac{6}{5}}\quad C:定数$$

$\frac{d}{dr}$③ ⇔ ①　　∴ Λ_4:積分定数

③ ⇒ $Z''=-\dfrac{\partial V}{\partial Z}$, $V(Z)=\dfrac{5}{16}\Lambda Z^2-\dfrac{25}{24}\Lambda_4 Z^{\frac{6}{5}}$



$\Lambda_4=0$のとき$r=r_{max}$で$\sigma=0$ → degenerate singularity!
摂動に対し、不安定

6次元の宇宙項が正

warp factor　→ 余次元がコンパクト化

・余次元の体積

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_{max}} dr\sqrt{\tilde{g}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_{max}} \frac{|z'|\, z^{-\frac{3}{5}}}{c}\, dr$$

$$= 2\pi \int_0^{z_0} \frac{z^{-\frac{3}{5}}}{c}\, dz = \frac{5\pi}{c} z_0^{\frac{2}{5}} = \frac{8\pi}{\Lambda}$$

r=0で正則である条件

$$(\sqrt{\rho})'\Big|_{r=0} = -\frac{1}{c} z'' z^{-\frac{3}{5}}\Big|_{r=0} = \frac{5\Lambda}{8c} z_0^{\frac{2}{5}} = 1$$

・6次元の基本スケールMと4次元のPlanckスケールM_{Pl}との関係

・直積の場合：　$V_e M^4 = M_{Pl}^2$　　V_e：余次元の体積

・warpedコンパクト化の場合：

$$M^4 \int d^6x \sqrt{-\hat{g}} \left(\frac{1}{2}\hat{R} - \Lambda\right) = M_{Pl}^2 \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2}R - \Lambda_4\right)$$

$$M_{Pl}^2 = M^4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_{max}} \frac{z' z}{c\sigma}\, dr = \frac{5\pi M^4}{3c} z_0^{\frac{6}{5}} = \frac{8\pi M^4}{5\Lambda} z_0^{\frac{4}{5}}$$

初期値z_0をどこに選ぶかによって、M_{Pl}は異なる。

Abelian gauge fieldの導入

C. Wetterich
Nucl. Phys. B255('85)480

$$\begin{cases} \hat{R}_{MN}-\frac{1}{2}\hat{R}\hat{g}_{MN}=F_{ML}F_N{}^L-\frac{1}{4}F_{KL}F^{KL}\hat{g}_{MN}-\Lambda\hat{g}_{MN} \\ \partial_M(\sqrt{-\hat{g}}F^{MN})=0 \end{cases}$$

background U(1) ゲージ場

$$A_\mu=0,\ A_r=0,\ A_\theta=a(r)$$

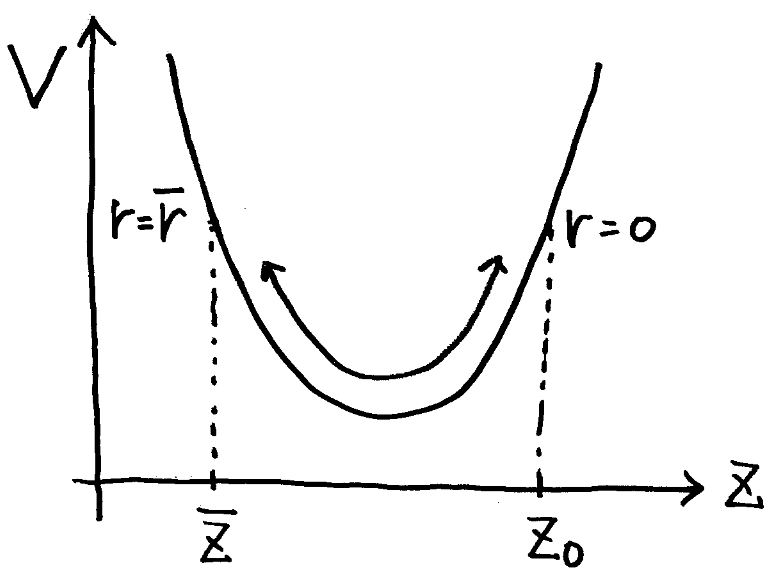
$$\Rightarrow \begin{cases} F_{r\theta}=B\sigma^{-2}\rho^{\frac{1}{2}} \\ \text{others}=0 \end{cases} \qquad B:\text{積分定数}$$

満たすべき式

$$\begin{cases} 2\frac{\sigma''}{\sigma}-\frac{\sigma'^2}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\frac{\rho''}{\rho}-\frac{1}{4}\frac{\rho'^2}{\rho^2}=-\frac{\Lambda}{2}-\frac{3}{4}B^2\sigma^{-4} & \cdots\cdots ①' \\ \frac{\sigma'}{\sigma}\frac{\rho'}{\rho}+\frac{\sigma'^2}{\sigma^2}-2\frac{\sigma''}{\sigma}=0 & \cdots\cdots ② \\ \Lambda_4=\frac{1}{2}\Lambda\sigma-\frac{1}{4}B^2\sigma^{-3}+\frac{1}{4}\frac{\sigma'^2}{\sigma^2}+\sigma'' & \cdots\cdots ③' \end{cases}$$

② $\rightarrow$ $\sigma=z^{\frac{4}{5}},\ \rho=C^{-2}z'^2z^{-\frac{6}{5}}$

③ $\rightarrow$ $z''=-\frac{\partial V}{\partial z}$, $V(z)=\frac{25}{96}B^2z^{-\frac{6}{5}}+\frac{5}{16}\Lambda z^2-\frac{25}{24}\Lambda_4 z^{\frac{6}{5}}$

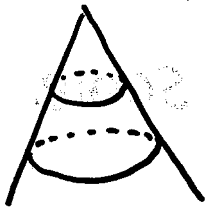


特に $\Lambda_4=0$ の時を考える.

境界条件

no conical singularity at $r=0, \bar{r}$

$\rho(r) \sim r^2 \quad r\sim 0$



$\rho \sim \alpha r^2$

角度欠損

$2\pi\sqrt{1-\alpha}$

$$(\sqrt{\rho})'\big|_{r=0} = -(\sqrt{\rho})'\big|_{r=\bar{r}} = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$Z''(0) = C Z_0^{\frac{3}{5}}, \quad Z''(\bar{r}) = -C\bar{Z}^{\frac{3}{5}}$$

$Z_0 = 1$ とおける.

$$\begin{cases} x^\mu \to \ell^{-1} x^\mu \\ \sigma \to \ell^2 \sigma \\ B \to \ell^4 B \end{cases}$$

スケール変換の対称性

正則な解を持つための条件

$$\begin{cases} C = Z''(0) = \frac{5}{16}B^2 - \frac{5}{8}\Lambda \\ -C\bar{Z}^{\frac{3}{5}} = Z''(\bar{r}) = \frac{5}{16}B^2\bar{Z}^{-\frac{11}{5}} - \frac{5}{8}\Lambda\bar{Z} \\ \frac{25}{96}B^2 + \frac{5}{16}\Lambda = V(1) = V(\bar{Z}) = \frac{25}{96}B^2\bar{Z}^{-\frac{6}{5}} + \frac{5}{16}\Lambda\bar{Z}^2 \end{cases}$$

$\bar{Z} \neq 1$ のとき, 解を持たない!

$\rightarrow$ noncompact な余次元空間

$\bar{Z}=1$ のとき $\sigma = \text{const.}$

直積構造 $M^4 \times S^2$

$\uparrow$ 半径 $\frac{1}{\sqrt{2\Lambda}}$ の球面

3-braneの導入

K.I. Izawa & S.H.
PLB 493 ('00) 380

$r=0$ に tension $\lambda>0$ の 3-brane を入れる。

$$S=\int d^6x\sqrt{-\hat{g}}\left(\frac{1}{2}\hat{R}-F_{MN}F^{MN}-\Lambda\right)-\int d^4x\,\sigma^2(r=0)\sqrt{-g}\,\lambda$$

$\sigma^2(r=0)\,g_{\mu\nu}(x)$: induced metric on 3-brane

ラグランジアン

$$\mathcal{L}=\sqrt{-\hat{g}}\left(\frac{1}{2}\hat{R}-\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN}-\Lambda\right)-\sigma^2\sqrt{-g}\,\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\Theta(\varepsilon-r)$$

$$\begin{cases}\hat{R}_{MN}-\frac{1}{2}\hat{R}\hat{g}_{MN}=F_{ML}F_N{}^L-\frac{1}{4}F_{KL}F^{KL}\hat{g}_{MN}-\Lambda\hat{g}_{MN}\\ \qquad -\sqrt{\frac{\sigma^4 g}{\hat{g}}}\,\delta^\mu_M\delta^\nu_N g_{\mu\nu}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\Theta(\varepsilon-r)\\ \partial_M\left(\sqrt{-\hat{g}}F^{MN}\right)=0 \longrightarrow F_{r\theta}=B^2\sigma^{-2}\rho^{\frac{1}{2}}\end{cases}$$

満たすべき式

$$\begin{cases}2\frac{\sigma''}{\sigma}-\frac{\sigma'^2}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\frac{\rho''}{\rho}-\frac{1}{4}\frac{\rho'^2}{\rho^2}=-\frac{\Lambda}{2}-\frac{3}{4}B^2\sigma^{-4}+\rho^{-\frac{1}{2}}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\Theta(\varepsilon-r) & \cdots ①''\\ \frac{\sigma'}{\sigma}\frac{\rho'}{\rho}+\frac{\sigma'^2}{\sigma^2}-2\frac{\sigma''}{\sigma}=0 & \cdots ②\\ \Lambda_4=\frac{1}{2}\Lambda\sigma-\frac{1}{4}B^2\sigma^{-3}+\frac{1}{4}\frac{\sigma'^2}{\sigma}+\sigma'' & \cdots ③'\end{cases}$$

境界条件

$$① \longrightarrow \left(\sqrt{\rho}\right)'\Big|_0^\varepsilon=\sqrt{\rho}'(\varepsilon)-\sqrt{\rho}'(0)=-\frac{\lambda}{2\pi}$$

正則化 $(\sqrt{\rho})'(0)=1,\ \rho(\varepsilon)=0$

$$\Rightarrow\ Z'(\varepsilon)=0,\ Z''(\varepsilon)=C\left(1-\frac{\lambda}{2\pi}\right)Z_0^{\frac{3}{5}},\ Z''(\bar{r})=-C\,\bar{Z}^{\frac{3}{5}}$$

特に$\Lambda_4=0$となる解を求める。$(z_0=1)$

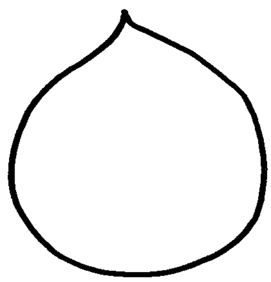
$$\begin{cases} C\left(1-\frac{\lambda}{2\pi}\right) = z''(\varepsilon) = -\frac{\partial V}{\partial z}(\varepsilon) = \frac{5}{16}B^2 - \frac{5}{8}\Lambda \\ -C\bar{z}^{\frac{3}{5}} = z''(\bar{r}) = \frac{5}{16}B^2\bar{z}^{-\frac{11}{5}} - \frac{5}{8}\Lambda\bar{z} \\ \frac{25}{96}B^2 + \frac{5}{16}\Lambda = \frac{25}{96}B^2\bar{z}^{-\frac{6}{5}} + \frac{5}{16}\Lambda\bar{z}^2 \end{cases}$$

$\bar{z}\neq 1$の解が存在。

⇨ 定数B, C, $\bar{z}$を、上の解になるように tuneする。

⇨ ラグランジアンパラメータ$(\Lambda>0, 0<\lambda<2\pi)$の値に依らず、$\Lambda_4=0$になる解が存在

余次元のトポロジーS^2で
北極に3-braneが存在
（時空はすべて正則）



宇宙項問題の第一段階が解決

ところが

$\Lambda_4 \neq 0$ の解も同様に存在。

あるΛ_4ごとに、

B、C、Zが一意に決まる。

⇨連続的なΛ_4が解空間に存在．

remaining question

なぜ、$\Lambda_4 \sim 0$ の積分定数が

選ばれたか？

→これから解かなければ

いけない問題

6次元の宇宙項 $\Lambda<0$ の場合

K.I. Izawa & S.H.
hep-th/0106101

- warped metric
- 4-brane tension λ_1 ←コンパクト化のため
- background $U(1)$ ゲージ場

$$S=\int d^6x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\hat{R}-\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN}-\Lambda\right)-\int d^6x\,\sigma^2\sqrt{-g}\,\lambda_1\delta(r-r_1)$$

Einstein eq.

$$\begin{cases}\frac{3}{2}\frac{\sigma''}{\sigma}+\frac{3}{4}\frac{\sigma'}{\sigma}\frac{\rho'}{\rho}-\frac{1}{4}\frac{\rho'^2}{\rho^2}-\frac{\Lambda_4}{\sigma}=-\frac{B^2}{2\sigma^4}-\Lambda-\lambda_1\delta(r-r_1) & \cdots④\\ \frac{3}{2}\frac{\sigma'^2}{\sigma^2}+\frac{\sigma'}{\sigma}\frac{\rho'}{\rho}-\frac{2}{\sigma}\Lambda_4=\frac{B^2}{2\sigma^4}-\Lambda & \cdots⑤\\ 2\frac{\sigma''}{\sigma}+\frac{1}{2}\frac{\sigma'^2}{\sigma^2}-\frac{2}{\sigma}\Lambda_4=\frac{B^2}{2\sigma^4}-\Lambda-\lambda_1\delta(r-r_1) & \cdots⑥\end{cases}$$

④,⑥ ⇒ junction condition

$$\begin{cases}\sigma'(r_1+0)-\sigma'(r_1-0)=-\frac{1}{2}\lambda_1\sigma(r_1) & \cdots⑦\\ \rho'(r_1+0)-\rho'(r_1-0)=-\frac{1}{2}\lambda_1\rho(r_1) & \cdots⑧\end{cases}$$

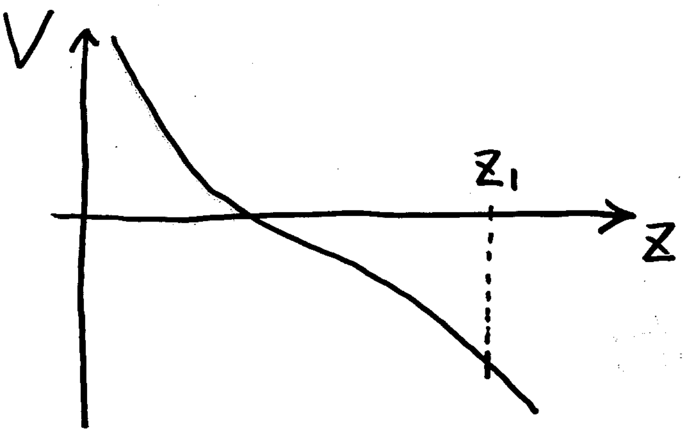
$r<r_1$, $r>r_1$ の領域では各々. zの運動方程式

$$z''=-\frac{\partial V}{\partial z},\quad V(z)=\frac{25}{96}B^2z^{-\frac{6}{5}}+\frac{5}{16}\Lambda z^2-\frac{25}{24}\Lambda_4 z^{\frac{6}{5}}$$

$$\sigma=z^{\frac{4}{5}},\quad \rho=C_{\mp}^{-2}z'^2z^{-\frac{6}{5}}$$

$C_{\mp}$: $r<r_1$, $r>r_1$ での積分定数

$\Lambda_4=0$ の場合を考える。



⑦ $\Rightarrow\ z'_+ - z'_- = -\frac{5}{8}\lambda_1 z_1$

⑧ $\Rightarrow\ z'_+ z'_- = -\frac{5}{16}B^2 z_1^{-\frac{6}{5}} + \frac{5}{8}\Lambda z_1^2$

$\downarrow$ $\qquad z'_\pm = z'(r_1 \pm 0),\ z_1 = z(r_1)$

$z'_+<0,\ z'_->0$ の解 (if $5\lambda_1^2+32\Lambda \geq 0$)

余次元はコンパクト

$0<r<r_1$, $r_1<r<\bar{r}$ での"エネルギー"保存

$$\begin{cases} \frac{25}{96}B^2 z_0^{-\frac{6}{5}} + \frac{5}{16}\Lambda z_0^2 = \frac{1}{2}z_-'^2 + \frac{25}{96}B^2 z_1^{-\frac{6}{5}} + \frac{5}{16}\Lambda z_1^2 \\ \frac{25}{96}B^2 \bar{z}^{-\frac{6}{5}} + \frac{5}{16}\Lambda \bar{z}^2 = \frac{1}{2}z_+'^2 + \frac{25}{96}B^2 z_1^{-\frac{6}{5}} + \frac{5}{16}\Lambda z_1^2 \end{cases}$$

連続性

$$C_-^{-2} z_-'^2 = C_+^{-2} z_+'^2$$

正則性

$$\begin{cases} C_- z_0^{\frac{3}{5}} = \frac{5}{16}B^2 z_0^{-\frac{11}{5}} - \frac{5}{8}\Lambda z_0 \\ C_+ \bar{z}^{\frac{3}{5}} = \frac{5}{16}B^2 \bar{z}^{-\frac{11}{5}} - \frac{5}{8}\Lambda \bar{z} \end{cases}$$

4-braneの両側でsymmetricな解。

$$z'_- = -z'_+ \,, \quad z_0 = \bar{z}$$

$r=r_0$ に tension λ_0 の 3-braneを入れた解も同様に存在。

境界条件

$$C_-\left(1-\frac{\lambda_0}{2\pi}\right) z_0^{\frac{3}{5}} = \frac{5}{16} B^2 z_0^{-\frac{11}{5}} - \frac{5}{8} \Lambda z_0$$

ラグランジアンパラメータ $\Lambda<0, \lambda_1>0, (\lambda_0>0)$ を fine-tuneすることなく, $\Lambda_4 \sim 0$ が実現。このとき, 時空はすべて正則となっている。

$\Lambda>0$ の場合と同様、ゲージ場を導入する必要

tuneできる積分定数を供給

concludion

- 宇宙項問題に対する他のアプローチと同様に、高次元理論によるアプローチにおいても、観測される宇宙項を、ラグランジアンパラメータに依らない積分定数として表すことができる。

- 現在観測されている $\Lambda_4 \sim 0$ の値がなぜ選ばれたかを説明することはできない。

  人間原理？　何らかのメカニズム？

- 高次元時空におけるsingularityの回避、余次元のコンパクト化

  ↓

  realisticな高次元理論の実現

- 余次元方向の自由度
  singularity, 安定性からの制限
  → $\Lambda_4 \sim 0$ を選ぶメカニズム？