

アーベリアンドミナンスの
ゲージ普遍性について

自然科学研究科数物科学専攻
森 祥寛

平成13年5月8日

目次

第 1 章	Introduction	3
第 2 章	アーベリアンドミナンス	6
2.1	abelian projection	6
2.1.1	連続理論における abelian projection[2]	6
2.1.2	lattice 上の理論におけるゲージ場定義と abelian projection	7
2.1.3	ゲージ場の対角、非対角成分の分離	8
2.1.4	いくつかのゲージ固定の仕方について	10
2.2	赤外領域における $U(1)$ 有効理論とアーベリアンドミナンス	12
2.3	アーベリアンドミナンスの問題点	13
第 3 章	キャラクター展開	16
3.1	キャラクターと展開	16
3.1.1	群の表現とキャラクター	16
3.1.2	直交性と完全性	17
3.1.3	キャラクター展開	17
3.2	Elitzur の定理	18
3.3	Wilson loop におけるキャラクター展開とアーベリアンドミナンス	18
第 4 章	lattice 上の Wilson 流くりこみ群と block spin 変換についての概要	21
4.1	連続極限と実空間くりこみ群の概要	21
4.1.1	連続極限	21
4.1.2	実空間のくりこみ群	22
4.2	block spin 変換と lattice 上の理論の長距離極限	23
4.2.1	block spin 変換の概要	23
4.2.2	lattice 上の理論の長距離極限	24
第 5 章	方法と結果	26
5.1	アーベリアンドミナンス調査についての概要と シミュレーションの流れ	26
5.2	Effective Action の設定	27
5.3	実際の blocking 変換①～Swendsen 流 blocking ～	28
5.4	Swendsen 流 blocking のもとでの結果	29
5.5	実際の blocking 変換②～ $U(1)$ blocking ～	32
5.6	$U(1)$ blocking における結果	35
第 6 章	まとめと今後の展望	38

付録 A 逆 Monte-Carlo 法～ Schwinger-Dyson 方程式～	39
A.1 逆 Monte-Carlo 法の概要	39
A.2 初期設定	39
A.3 Schwinger-Dyson 方程式の導出	40
A.4 SU(2) の元上での Schwinger-Dyson 方程式	42

第1章 Introduction

強い相互作用を記述する理論として QCD(Quantum ChromoDynamics) が広く信じられている。この QCD は、「カラー¹」と呼ばれる自由度に対して $SU(3)$ 対称性を持つ理論である。このカラーの大局的対称性からカラーチャージという保存量が導出でき、その対称性の局所化からカラーチャージを運ぶ強い相互作用を媒介するゲージ場とそれにのる粒子 (gluon) が導出された。

QCD がこのカラーという自由度に対し、 $SU(3)$ 非可換ゲージ理論をとるということから、1970年代に Gross-Wilczek、Politzer、't Hooft らによって強い相互作用が漸近的自由な性質を持つことが示された [1]。これは紫外 (短距離) 領域では、QCD は相互作用項の coupling constant が小さく、強い相互作用をする粒子の振る舞いを摂動論で取り扱うことができることを意味している²。逆に赤外 (長距離) 領域では、その coupling constant は大きくなり摂動論では扱えず、非摂動論的取り扱いが必要になった。

実空間における非摂動論的取り扱いの代表的な方法として「lattice 化の手法」があげられる。空間自体を lattice 状に区切るこの手法自体は非常に強力であるが、あくまでも系の正則化の方法の一つでしかない。これがコンピューターによる数値シミュレーションと結びついた時、我々が物理を知る上で強力な手段となった。

特に現在、我々が取り組んでいる、QCD における「赤外領域での quark 閉じ込め問題」の解明などには無くてはならないものになっている。この閉じ込め問題は、赤外 (長距離) 領域、すなわち coupling constant の値が大きくなる領域のものであるのでその解析に摂動論を用いることができない。そこで非摂動論的方法として、lattice 化の手法によって lattice 状に区切った実空間上にゲージ場をのせた lattice gauge theory を用いた解析が行われた。この結果、Creutz が行った数値シミュレーションによって、はじめて QCD では赤外領域における「閉じ込め」と紫外領域における「漸近自由性」が両立していることが示された。しかし数値シミュレーションのみから見ることができるのは、閉じ込め現象がおきていることの確認であって、それがどのようにして起きるのかというメカニズムそのものを理解することはできない。つまり lattice gauge theory による数値シミュレーションは物理現象の解析のための「道具」としては極めて有用だが、あくまでも道具でしかなく、物理そのものを知るには人の手による理論やモデル、描像の構築が必要なのである³。

そうして構築された、QCD における赤外領域での quark 閉じ込めのメカニズムを示した描像に、超伝導のアナロジーからなる dual Meissner 効果による描像がある。これは QCD 真空と超伝導体が dual(双対) な形で対応するという描像である。

通常、超伝導体における Meissner 効果とは、完全反誘導体である超伝導体の両端に磁荷をおくとその中をとる磁力線が線状に絞られることをいう。これを QCD 真空に当てはめて考えたのが dual Meissner 効果である。ここでいう dual の意味とは、超伝導体の時にその両端に置いた磁荷に対し、真空中に置かれるのが電荷を持った quark と anti-quark であり、絞られるのが磁力線

¹ 元は quark 模型において、quark(フェルミ粒子)の Pauli の排他律を回避するために導入された自由度

² 高エネルギー領域における電子-陽子の深非弾性散乱の解析結果などが実験結果をよく再現することからも確かめられている

³ 数値シミュレーションは、人が構築した理論について十分性などを確かめる実験という要素をもつ

ではなく、電気力線であるというようにアナロジーとして互に対応するものが dual な関係にあることを示している。もしこの dual Meissner 効果に従って電気力線が線状に絞られるのであれば、そのポテンシャルは距離の一次関数の項を含む形でかけられることになり、quark と anti-quark 間の距離が大きくなるにつれて2点間に働く力が大きくなるという描像を得ることができる。

この超伝導は Ginzburg-Landau 理論より2つの電子が対となったクーパー対がボーズ凝縮を起こすことで発生する。Meissner 効果と dual Meissner 効果の間のアナロジーが、発生のメカニズムに対しても存在するならば、QCD 真空ではクーパー対と dual に対応するものが凝縮を起こすことで電気力線が線状に絞られる(閉じ込め)現象が起こると考えられる。この理論を dual Ginzburg-Landau(DGL) 理論といい、このクーパー対と dual に対応するものが monopole(磁気単極子)である。すなわち QCD では monopole が凝縮を起こすことによって閉じ込めという現象が引き起こされると考えるのである。

しかしこの描像を考えるに当たって、monopole そのものが QCD には存在しないので、どのように適用すればよいのかが分からなかった。

そして1981年、G. 't Hooft が $SU(3)$ 対称性を持つゲージ場を部分的にゲージ固定を行い abelian に射影する (abelian projection) ことで $U(1) \otimes U(1)$ 対称性を持つ monopole を含む場の理論にすることができることを示し、これから quark の閉じ込め現象を説明できることを示唆した [2]。

1998年には T.Suzuki を中心とする研究グループによって、monopole が QCD 真空において凝縮するという事実と abelian projection を課した系において抜き出した abelian の部分の変数によって物理が記述できるというアーベリアンドミナンスを仮定したときの monopole 場を含む QCD の赤外(長距離)領域における有効理論、Dual Abelian Higgs Model を提案した。これは QCD から直接導き出せる理論であり、前述の dual Ginzburg-Landau 理論による描像をよく示した。さらに T.Suzuki は I.Yotsuyanagi とともに閉じ込めの特徴である string tension⁴ の算出によって、MA ゲージ固定をした系では、赤外領域において Dual Abelian Higgs Model において仮定されたアーベリアンドミナンスと、モノポールドミナンス⁵ が示されることを [3]、H.Shiba とともに monopole current からなる Effective Action の決定をした [4]。その後の研究によって、いくつかの問題(あるいは仮定)を含むものの赤外(長距離)領域では Dual Abelian Higgs Model は十分有効理論として機能することが示された。ここでこのモデルによる閉じ込めメカニズムの解析も進んでいる。この abelian projection から始まり、Dual Abelian Higgs Model を導出、そしてそれによって閉じ込めを解析するという一連の操作を「monopole のシナリオ」と呼ぶことにする。

この monopole のシナリオにおける最も大きな(最もはじめに目に付く)問題は、このモデルが MA ゲージ固定されたゲージ場の系においてしか、キレイに見ることができないということである。詳しく調べてみると、monopole のシナリオにおいてアーベリアンドミナンスの性質が MA ゲージ固定された系でしかうまく見えないのである。物理はゲージ固定の仕方にかかわらず普遍である。これは物理を考える上での信念である。にもかかわらずこのモデルでは MA ゲージという特殊なゲージ固定を行った系でしかキレイに見ることができないというのでは、物理を考えるうえで効果的であることを期待する有効理論としてこのモデルを扱うわけにはいかないということになる⁶。確かにゲージの取り方によって見たい物理がうまく見えるかどうかは変化する。故

⁴ quark・anti-quark 間のポテンシャルの勾配。閉じ込めを特徴付ける量であり、lattice 上での理論を考えるにあたって物理的なメジャーとして扱える

⁵ abelian projection を課した系について抜き出した abelian 部分から、さらに抜き出された monopole の寄与によって物理量を算出できるという性質

⁶ もしゲージに対して依存するのであれば、その背景にある何らかの物理を示す必要があるだろう

に我々は(その必要もあって)計算の際に適当なゲージ固定を課すのである。しかしそれも、どのゲージであっても同じ物理が見えるという、ゲージ固定の仕方に対する普遍性があるこそ言えるのである。

そこで今回の研究では、アーベリアンドミナンスがゲージ固定にかかわらず普遍に存在する性質であることについて調査した。これによって、どのようなゲージで固定された系でも monopole のシナリオが適用できるかどうかという、ゲージ固定に対する普遍性を知ることができる。実際の問題は、ゲージ固定の仕方によって abelian projection された系のアーベリアンドミナンスという性質がうまく見えないということなので、どのようなゲージ固定された系の元でも abelian の部分の変数で abelian projection された系を記述することが可能であることをいえばよい。そこでいくつかの代表的なゲージ固定のもとで abelian projection を課した系を考え、その系の Effective Action がどのような形を取るかを数値シミュレーションによって調査した。lattice 上においてゲージ固定ごとの Effective Action が異なっても、連続理論においてアーベリアンドミナンスを示す同じ物理をえるのであれば⁷、それをもってアーベリアンドミナンスはゲージに対して普遍であるということができる。アーベリアンドミナンスがゲージに対して普遍であるならば、monopole のシナリオ自体もゲージに対して普遍的なものになり、そこにおいて MA ゲージ固定をされた系で monopole のシナリオを考えることは、物理を見やすくするためのものとして妥当なこととなるだろう。

⁷ くりこみ変換を課していきそのときの coupling constant の flow が同じ Renormalized trajectory にのということ。その概要は第4章で説明する

第2章 アーベリアンドミナンス

まずはこの章において、monopole のシナリオのアーベリアンドミナンスについて説明する。

2.1 abelian projection

2.1.1 連続理論における abelian projection[2]

QCD において、その相互作用 (強い相互作用) を伝達するベクトル場はカラーの自由度から $SU(2)$ 、 $SU(3)$ の非可換な対称性を持つ。monopole のシナリオを考える上での monopole の場自体を、QED のように明確に定義することができない。そこで非可換なゲージ場による理論を部分的にゲージ固定をし、可換な場 ($U(1)$ 、 $U(1) \otimes U(1)$ 対称な場) の理論に帰着させる操作を行う。これによって QED と同様にトポロジカルな量として monopole を定義することができる。

具体的には、次のような操作である¹。

ある適当なゲージ依存量 $X(x)$ を用意し、これを

$$\begin{aligned} X(x) \longrightarrow X'(x) &= V(x)X(x)V^\dagger(x) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.1)$$

のように随伴変換によって対角化するようなゲージ変換行列 $V(x)$ を与える。この変換行列 $V(x)$ には、 $d(x) \in U(1) \subset SU(2)$ とするような

$$d(x) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha(x)} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha(x)} \end{pmatrix}, \quad \det[d(x)] = 1 \quad (2.2)$$

による不定性 $V(x) \rightarrow V'(x) = d(x)V(x)$ が含まれる²。すなわちこの変換をされた $X'(x)$ は $d(x)$ による不定性、 $U(1)$ の自由度を持つことになる。

一方、ゲージ固定とは「適当なゲージ場の系において、ある特定のゲージ変換性を一意に選ぶ」ということであり、ゲージ固定した系とはある特定のゲージ変換行列 $G(x)$ によって

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu = G(x)A_\mu G^\dagger(x) - \frac{i}{g}(\partial_\mu G(x))G^\dagger(x) \quad (2.3)$$

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = G(x)\psi(x) \quad (2.4)$$

と変換されたゲージ場 $A'_\mu(x)$ と物質場 $\psi'(x)$ の系のことである。

つまり任意のゲージ依存量 $X(x)$ を対角化させるようなゲージ変換行列 $V(x)$ を課すということは、ゲージ変換行列 $V(x)$ によって $X(x)$ をゲージ固定するということである。

一般に完全にゲージ固定された系では、その後の任意のゲージ変換によるゲージ不変性は存在

¹ 以降すべての議論は、実際の数値計算で用いた $SU(2)$ 対称なゲージ場上で行う

² この時 $V'(x)$ が $SU(2)$ の元であることより $\det[d(x)] = 1$ という条件が存在する

しない³。しかし $V(x)$ による変換では $U(1)$ の自由度が残っている ($U(1)$ 変換に対して不変) ので、これは部分的なゲージ固定ということになる。そのため残された自由度に対して、さらに任意のゲージ変換を考えることができる。そこでこの系について、任意の $SU(2)$ の変換行列 $W(x)$ によってゲージ変換をすると、 $d_W(x)$ という (2.2) 式の $d(x)$ と同様の形をした対角行列によって

$$A'_\mu(x) \xrightarrow{W} A'^W_\mu(x) = d_W(x) A'_\mu(x) d_W^\dagger(x) - \frac{i}{g} (\partial_\mu d_W(x)) d_W^\dagger(x) \quad (2.5)$$

$$\psi'(x) \xrightarrow{W} \psi'^W(x) = d_W(x) \psi'(x) \quad (2.6)$$

という変換性が与えられる。

すなわち変換行列 $V(x)$ によって部分的にゲージ固定された系は、任意の $SU(2)$ 変換によって $U(1)$ 対称な変換が行われる系になる⁴。

この随伴変換行列による、部分的なゲージ固定の操作を **abelian projection** という。

abelian projection という名前は、部分的なゲージ固定によってその対称性が $SU(2)$ から $U(1)$ に **projection** されることからきている。またゲージ場について (2.5) の変換を行列成分をあらわにした形で書くと

$$A'^W_\mu(x) = \begin{pmatrix} A'_{\mu 11}(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^W(x) & A'_{\mu 12}(x) e^{2i\theta^W(x)} \\ A'_{\mu 21}(x) e^{-2i\theta^W(x)} & A'_{\mu 22}(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^W(x) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

となる。これを見ると対角成分は $U(1)$ 対称なゲージ場としての変換性を持っているが、非対角成分は物質場としての変換性を持つようになっていることが分かる。

この系について、 $A'(x)$ を用いて **field strength** をとり、これについて **Bianchi identity** を考えるとその破れとして **monopole カレント** を定義できる。

2.1.2 lattice 上の理論におけるゲージ場定義と abelian projection

QCD は強い相互作用を扱う理論であり、相互作用を含んだ系を **Action** に書き下したとき、相互作用項の **coupling constant** が大きくなり、素朴には摂動論を用いることができなくなる。特に赤外領域ではそれが顕著に表れており、このことが有効理論構築の必要性を促す理由の一つでもある。そして様々な非摂動的な手法が物理の研究とともに研究されている。

この非摂動的な手法として非常に強力なものの一つが「**lattice 化の手法**」である。これは考えている領域を **lattice** 状に区切り、その **lattice** の上に変数をのせ計算をする手法である。領域を **lattice** 状に区切ることで系の並進不変性や回転対称性は失われるが、経路積分法により統計力学との対応が取れ、系の物理的理解を容易にすることが可能である。また演算子などの全ての変数を数として扱えるので、コンピュータによる数値計算を行うことができるようになる。しかしこの系は、あくまでも現実の系ではないのでその結果の取り扱いには注意が必要である。

ここではゲージ場を **lattice** 上にのせ、定式化された **lattice gauge theory** を用いる。その理論の基本的な部分に関しては十分な知識があるものとして、詳細については省略し定義と概要、そして式のみを書き下していく⁵。

連続な場におけるゲージ理論では、理論をゲージ不変に保つために微分 ∂_μ を共変微分 D_μ に置

³ 特定のゲージ変換によるゲージ不変性を系に対して課したために、それ以外の変換ではゲージ不変性を破っているため

⁴ $SU(N)$ への拡張では、対角成分それぞれが $U(1)$ の自由度を持ち、系全体としては $\det[d_W(x)] = 1$ より $U(1)^{N-1}$ の対称性を持つ

⁵ **lattice gauge theory** について学ぶ時の入門書としては [5] がお勧めである

き換えるようなゲージ場を導入した。lattice gauge theory ではこれに対応して、場を有限移動させる平行移動子 $U_C(x, y)$ を lattice の link 上にのせた link 変数 $U_\mu(s)$ として導入する。平行移動子自体は連続理論上でも定義でき、それは場 $\psi(x)$ を点 x から点 y まで経路 C にそって移動させた時にゲージをどれだけ調整すればよいかを示すものとして与えられる。link 変数としてはあるサイト上の場 $\psi(s)$ を μ 方向に向かって一つだけ隣のサイトに移動させた時にゲージをどれだけ調整すればよいかということに対応する⁶。ここで lattice 間隔は1ととる⁷。ゲージ場 $A_\mu(x)$ とおくと、平行移動子は連続理論では

$$U_C(x, y) = \exp \left[ig \int_C A_\mu(x) dx_\mu \right] \quad (2.8)$$

とおいてやればよいことがゲージ不変性から分かるので、link 変数は lattice 上の変数への置き換えを考えてやると、

$$U_\mu(s) = \exp [ig A_\mu(s)] = \exp \left[ig A_\mu^a(s) \frac{\sigma_a}{2} \right] \quad (2.9)$$

となる。これはゲージ場を生成子とする $SU(2)$ の群の元であり、Pauli 行列 σ_a を用いて書きあらわすことができる。

この link 変数は平行移動子としての定義から、ゲージ変換に対して随伴変換の形で

$$U_\mu(s) \longrightarrow U'_\mu(s) = W(s) U_\mu(s) W^\dagger(s + \hat{\mu}) \quad (2.10)$$

という変換性を持つ。ここで $W(s)$ は $SU(2)$ の元である。ここで連続の場合と同様に、適当なゲージ依存量 $X(s)$ (この場合は link 変数) を対角化するような変換行列 $V(s)$ によって、link 変数の部分ゲージ固定、すなわち abelian projection を行うことができる。実際に abelian projection を行った系では、任意の $SU(2)$ の変換行列 $W(s)$ によってゲージ変換をすると、連続理論と同様に $d_W(s)$ という対角行列によって

$$U'_\mu(s) \xrightarrow{W} U_\mu^{W'}(s) = d_W(s) U'_\mu(s) d_W^\dagger(s + \hat{\mu}) \quad (2.11)$$

という変換性が与えられる事がわかる。

2.1.3 ゲージ場の対角、非対角成分の分離

lattice 上において、link 変数は $SU(2)$ の元であることから、その生成子について対角行列からなる部分 $u_\mu(s)$ とそれ以外からなる部分 $C_\mu(s)$ で

$$U_\mu(s) = C_\mu(s) u_\mu(s) \quad (2.12)$$

のように分離することができる。この時その変換性は

$$C_\mu(s) \longrightarrow C'_\mu(s) = d(s) C_\mu(s) d^\dagger(s) \quad (2.13)$$

$$u_\mu(s) \longrightarrow u'_\mu(s) = d(s) u_\mu(s) d^\dagger(s + \hat{\mu}) \quad (2.14)$$

⁶ 経路 C を四元ベクトルの方向成分と一致するようにとる

⁷ 以降、特に但し書きがない限り lattice 間隔は1とする。この値は無次元量でもあり、実際の物理量を測定する時には lattice 間隔を次元を持つ量 a においてやる

を示す。

この分離の仕方は対角行列 A による $e^{iA}e^{-iA}$ を挿入するだけの自由度を持ち、決して一意ではない。そこで、ここでは link 変数の元を (2.9) 式のように Pauli 行列を用いて書き下したものを用いて、この Pauli 行列の対角行列と非対角行列を分けるように

$$U_\mu(s) = \exp[i\omega_\mu^1(s)\sigma_1 + i\omega_\mu^2(s)\sigma_2] \exp[i\theta_\mu(s)\sigma_3] \quad (2.15)$$

と分離することにする。ここで $\omega_\mu^1(s)$ 、 $\omega_\mu^2(s)$ 、 $\theta_\mu(s)$ はそれぞれ非対角、対角行列にかかるパラメーターである。このように分離すると定めると、これらのパラメーターとゲージ場 $A_\mu^a(s)$ との関係は次のように一意的に決めることができる。

まず $C_\mu(s)$ 相当する部分について具体的に書き下すと

$$\begin{aligned} C_\mu(s) &= \exp[i\omega_\mu^1(s)\sigma_1 + i\omega_\mu^2(s)\sigma_2] \\ &= \begin{pmatrix} \cos \omega_\mu(s) & i\frac{\sin \omega_\mu(s)}{\omega_\mu(s)} (\omega_\mu^1(s) - i\omega_\mu^2(s)) \\ i\frac{\sin \omega_\mu(s)}{\omega_\mu(s)} (\omega_\mu^1(s) + i\omega_\mu^2(s)) & \cos \omega_\mu(s) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.16)$$

となる。ただし $\omega_\mu(s) \equiv \sqrt{(\omega_\mu^1(s))^2 + (\omega_\mu^2(s))^2}$ である。次に $u_\mu(s)$ については

$$\begin{aligned} u_\mu(s) &= \exp[i\theta_\mu(s)\sigma_3] \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\theta_\mu(s)} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_\mu(s)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.17)$$

である。この時 $C_\mu(s)$ の非対角成分について

$$c_\mu(s) \equiv c_\mu^1(s) + ic_\mu^2(s) \equiv i\frac{\sin \omega_\mu(s)}{\omega_\mu(s)} (\omega_\mu^1(s) - i\omega_\mu^2(s)) \quad (2.18)$$

と定義すると、link 変数は

$$U_\mu(s) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - |c_\mu(s)|^2} & -c_\mu^*(s) \\ c_\mu(s) & \sqrt{1 - |c_\mu(s)|^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta_\mu(s)} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_\mu(s)} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

と書くことができる。

一方、link 変数自体が $SU(2)$ 対称であることより、Pauli 行列 σ_j とパラメーターを用いて

$$U_\mu(s) = U_\mu^0(s)I + iU_\mu^j(s)\sigma_j \quad (2.20)$$

と書き直すことができる。(2.19) 式と (2.20) 式との比較

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \sqrt{1 - |c_\mu(s)|^2} e^{i\theta_\mu(s)} & -c_\mu^*(s)e^{-i\theta_\mu(s)} \\ c_\mu(s)e^{i\theta_\mu(s)} & \sqrt{1 - |c_\mu(s)|^2} e^{-i\theta_\mu(s)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U_\mu^0(s) + iU_\mu^3(s) & iU_\mu^1(s) + U_\mu^2(s) \\ iU_\mu^1(s) - U_\mu^2(s) & U_\mu^0(s) - iU_\mu^3(s) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.21)$$

により $c_\mu(s)$ 、 $\theta_\mu(s)$ を $U_\mu^0(s)$ 、 $U_\mu^j(s)$ を用いて

$$c_\mu(s) = i(U_\mu^1(s) + iU_\mu^2(s)) \quad (2.22)$$

$$\theta_\mu(s) = \tan^{-1} \left(\frac{U_\mu^3(s)}{U_\mu^0(s)} \right) \quad (2.23)$$

というように link 変数から一意的に決めることができた。

この分離は abelian projection をするしないにかかわらず行える操作である。

2.1.4 いくつかのゲージ固定の仕方について

abelian projection によって系は部分的にゲージ固定される。それはあるゲージ依存量 $X(s)$ を対角化するような変換行列 $V(s)$ によって行われた。この変換行列 $V(s)$ はどのような $X(s)$ を対角化するかによって、そのとり方が変わることは容易に理解できる。

一方、ゲージの取り方に対して普遍的な系を考える。ゲージの取り方に対して普遍であるということは、どのようなゲージ変換を取ることもできると言うことであり、逆に変換によって与えられるゲージの移動する方向が一意に決まらず、Action を計算できないということも意味している。そこで2.1.1節でも述べたが、系がゲージに対して普遍であるならば、その中から適当な変換を一つ選んで、その変換に対して不変な系を作ってもよいであろうと考えるのがゲージ固定である。これによって系の計算を可能にするのである⁸ 従って abelian projection された系について物理をよく見るためには、まずは任意のゲージ固定条件によってゲージ固定された系を考え、その系において改めて abelian projection による部分ゲージ固定を課するのがよいであろう。

これから「ゲージ固定」という場合には、abelian projection による部分ゲージ固定ではなく、それを課す前の段階の任意のゲージ場の系について課したものを言う。ただしこの時のゲージ固定の仕方は abelian projection において対角化する任意のゲージ依存量 $X(s)$ をゲージ変換に対して不変にするように取る事で行われる。そのためいかなの議論では表面的には $X(s)$ いかにかに選ぶかということにしかみえない。しかし $X(s)$ を選んだ段階で、その系では選んだ $X(s)$ を不変にするようねゲージ固定条件が既に課されているのである。

以下、その中で代表的なゲージ固定の取り方について説明する。

MA ゲージ (Maximally Abelian Gauge)

ゲージ依存量 $X(s)$ を

$$X(s) = \sum_{\mu} \left[U_{\mu}(s) \sigma^3 U_{\mu}^{\dagger}(s) + U_{\mu}^{\dagger}(s - \hat{\mu}) \sigma^3 U_{\mu}(s - \hat{\mu}) \right] \quad (2.24)$$

ととり、これを不変にするようなゲージ固定のこと。これは

$$R(s) \equiv \sum_{\mu} \text{Tr} \left[\sigma_3 U_{\mu}(s) \sigma_3 U_{\mu}^{\dagger}(s) \right] \quad (2.25)$$

と定義された $R(s)$ を最大するような条件と等しい。この $R(s)$ は Pauli 行列によってパラメトライズした link 変数によって展開すると、

$$R(s) = 2 \sum_{\mu} \left[(U_0(s))^2 - (U_1(s))^2 - (U_2(s))^2 + (U_3(s))^2 \right] \quad (2.26)$$

となり、 $R(s)$ を最大化するような条件とは link 変数の対称性である $SU(2)$ の条件

$$\begin{aligned} \det [U_{\mu}(s)] &= 1 \\ \Leftrightarrow (U_0(s))^2 + (U_1(s))^2 + (U_2(s))^2 + (U_3(s))^2 &= 1 \end{aligned} \quad (2.27)$$

と合わせてると、対角成分をできるだけ大きくし、逆に非対角成分を小さくするようなものである。このことからこのゲージを Maximally Abelian Gauge という。

⁸ 分配関数の計算で考えるのであれば、ゲージ固定項として適当な δ 関数を式中に挿入し積分を計算してしまうということ

実際に、 $X(s)$ の対角化と $R(s)$ の最大化が等しいということは次の操作から分かる。

$R(s)$ は link 変数によって与えられる量であり、ゲージ変換によってのみ link 変数の値を変えられるとする。ここで $R(s)$ について微小なゲージ変換 $W(s) = I + i\vec{\alpha}(s) \cdot \vec{\sigma}$ を行うと

$$R(s) \xrightarrow{W} R^W(s) = \sum_{\mu} \text{Tr} \left[\sigma_3 W(s) U_{\mu}(s) W(s + \hat{\mu}) \sigma_3 W(s + \hat{\mu}) U_{\mu}^{\dagger}(s) W(s) \right] \quad (2.28)$$

となる。これを $R^W(s) = R(s) + \delta R(s)$ とおいて、 $\delta R(s)$ を書き出すと

$$\begin{aligned} \delta R(s) &= \sum_{s, \mu} \left(i\vec{\alpha}(s) \cdot \vec{\sigma} \left[U_{\mu}(s) \sigma^3 U_{\mu}^{\dagger}(s) + U_{\mu}^{\dagger}(s - \hat{\mu}) \sigma^3 U_{\mu}(s - \hat{\mu}), \sigma^3 \right] \right) \\ &= \sum_s \left(i\vec{\alpha}(s) \cdot \vec{\sigma} \left[X_{\mu}(s), \sigma^3 \right] \right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

と書ける。この時、 $X(s)$ が対角化されるとこの $\delta R(s)$ 内の交換子は 0 となり、 $R(s)$ は微小変換 $W(s)$ に対して極値をえることがわかる。逆にいえば $R(s)$ を最大にするような link 変数は $X(s)$ を対角化するということである。

問題はこのゲージ依存量 $X(s)$ は随伴変換をしないということである。そのため素朴には $V(s)$ を決定することができない。そこでこのゲージ固定された系において abelian projection をとるときは、コンピューターシミュレーションによって link 変数の微小ゲージ変換を逐次行っていき、 $R(s)$ が最大になったところで abelian projection されたとする。

ユニタリーゲージ ; F_{12} ゲージ、Polyakov ゲージ

ある系を考えるに当たって不定計量がでないようにゲージ固定をしたものをユニタリーゲージという。ここでは代表的なユニタリーゲージ、 F_{12} ゲージと Polyakov ゲージについて述べる⁹。

F_{12} ゲージは、その名のとおりゲージ場の field strength のテンソルにおける 1-2 成分 $F_{12}(s)$ 、すなわち 1×1 の 1-2 方向の Wilson loop¹⁰

$$X_{F_{12}}(s) = U_1(s) U_2(s + \hat{1}) U_1^{\dagger}(s + \hat{2}) U_2^{\dagger}(s) \quad (2.30)$$

を $X(s)$ ととり、これを不変にするような固定した系である。Polyakov ゲージは、Polyakov line と呼ばれる時間方向の link 変数について積を取った

$$X_{\text{Po}}(s) = \prod_{i=1}^{N_4} U_4(s + (i-1)\hat{4}) \quad (2.31)$$

を $X(s)$ ととり、これを不変にするような固定した系である。ここで N_4 は時間方向の lattice size であり、周期境界条件

$$U_4(s + \hat{4}) = U_4(s + N_4\hat{4}) \quad (2.32)$$

を課すことによって閉じた loop となる。

⁹ これらのゲージに用いる $X(s)$ は随伴変換をするので、求めた $V(s)$ で link 変数を随伴変換すればゲージ固定できる

¹⁰ lattice 上においてゲージ変換に対して不変な量は、閉じた経路上の link 変数の積のトレースをとったもので、空間 $R \times$ 時間 T の矩形形状の経路 C に沿って link 変数の積のトレースをとったものを Wilson loop という。これは対生成により時空上に作られた quark、反 quark のペアが距離 R だけ離れたまま、時間 T だけ走り、再び対消滅したものと解釈される

2.2 赤外領域における $U(1)$ 有効理論とアーベリアンドミナンス

第1章で書いたように QCD における赤外領域、すなわちゲージ場が強結合をするような領域をより効果的に理解することが可能になるような理論の構築が「monopole のシナリオ」に従って、これまでの研究で進められてきた¹¹。

この monopole シナリオの第一段階が abelian projection を行った系による赤外領域における $U(1)$ 有効理論の構築である。

一般に有効理論の構築は、物理を理解する上で効果的であるが故に行われるものである。つまり何らかの理論があり、その理論下で起こりうる現象を元の理論では完全に理解することができない時、それをより効果的に理解するために行われるのである。それは理論に対して何らかの操作を課すことによって行われる。この際この操作そのものが解析的に厳密に解けなくとも、近似操作や別の方法(数値計算)を行うことによって構築でき、それによって構築されたものが、元の理論を十分に再現するのであればそれをもって有効理論とする。従って、有効理論は元の理論と何の関係もなしに、どこからか湧いてくるようなものでは、まずなく、その構築に際しては元の理論と構築したい有効理論との間の関係を示し、その関係から理論を導く必要がある。そして構築された有効理論が元の理論を十分に示しうるのであればそれによしとする。

このことを念頭に置き、abelian projection を考える。

abelian projection によって考えているゲージ場の系を非可換な $SU(2)$ 対称な理論から、可換な $U(1)$ 対称な理論に射影することができることは説明した。また abelian projection を課した系の link 変数については、 $U_{\mu}(s) = C_{\mu}(s)u_{\mu}(s)$ と分離できることも説明の通りである。これらより abelian projection された系はその対称性が $U(1)$ になることから、link 変数のうち $C_{\mu}(s)$ のみがゲージ固定された系と考えることができる。ゲージ固定された系というのは、その系内のラグランジアンに不定な係数を持たないから原理的に積分が可能になる。従って、赤外領域における分配関数を例に形式的に書き下すと

$$\begin{aligned}
 Z_{SU(2)} &= \int DU e^{-S[U_{\mu}]} \delta(f(U)) \Delta_{FP} \\
 &\Downarrow \text{abelian projection} \\
 Z_{U(1)} &= \int DCDu e^{-S[C_{\mu}u_{\mu}]} \delta(f(Cu)) \Delta_{FP} \\
 &= \int Du \left\{ \int DC e^{-S[C_{\mu}u_{\mu}]} \delta(f(Cu)) \Delta_{FP} \right\} \\
 &= \int Du e^{-S_{eff}[u_{\mu}]} \tag{2.33}
 \end{aligned}$$

というように書くことができる。これは abelian projection をした系において $C_{\mu}(s)$ についての積分をしてしまうということで、考えている系を $U(1)$ 対称性を持った変数 $u_{\mu}(s)$ のみのからなる理論として記述できることを示唆している。

つまりこの段階で、abelian projection を課した系の赤外領域について link 変数から抜き出した $u_{\mu}(s)$ によって記述される $U(1)$ 対称性を持つ理論は有効理論として扱える可能性を示している¹²。

ここで実際に、MA ゲージによるゲージ固定をした系について、abelian projection を課し、系の link 変数から抜き出した $u_{\mu}(s)$ によって string tension を算出したものは、もとの link 変数 $U_{\mu}(s)$

¹¹ 以降の理論は特別の表示がない限り lattice 上の理論 (lattice gauge theory) として進める

¹² 射影され積分されてしまった $C_{\mu}(s)$ についての議論に関しては現在も幾人かの研究者によって研究されている

で計算したそれと等しいふるまいを示すことがコンピュータシミュレーションによって確かめられている (図 2.1 参照)。これは一例ではあるがこれら物理量やその振る舞いの算出結果より、赤

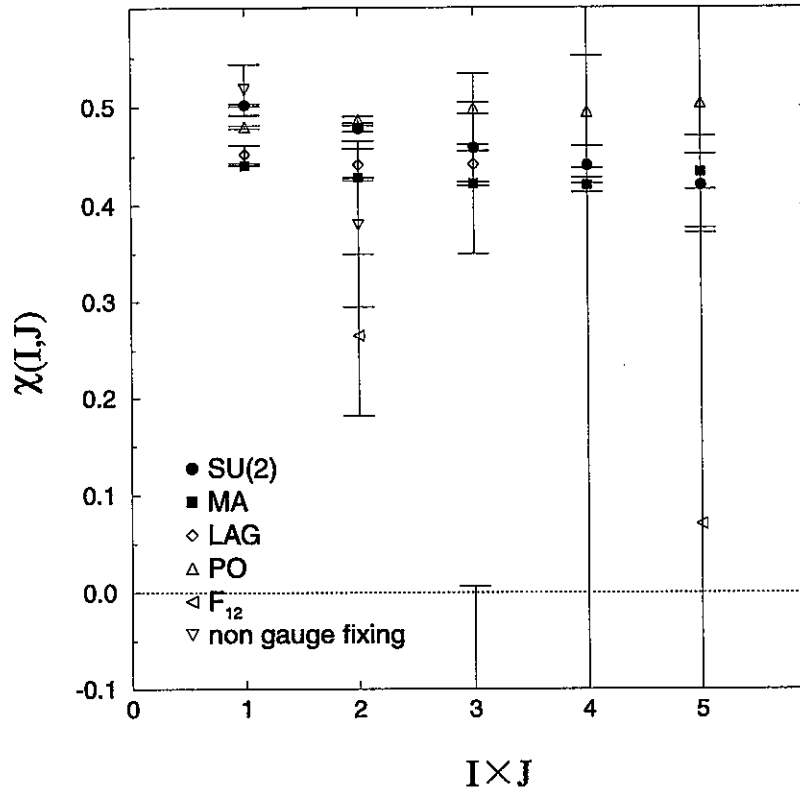


図 2.1: string tension の振る舞い

外領域では $u_\mu(s)$ によって記述される理論が十分に元の理論を示しうることが分かった。そしてこの理論は計算を容易にする¹³ ということの効果的であることも十分理解できる。

つまりこれによって赤外領域における $U(1)$ 有効理論が構築されたということになる。

ここで元の $SU(2)$ 対称性を持つ系が、abelian projection を課すことによって、残された $U(1)$ 対称性を司る $u_\mu(s)$ によって十分記述することができる性質を「アーベリアンドミナンス」という。これまでの議論より分かるように、考えている abelian projection を課した系で、このアーベリアンドミナンスが十分にいえることが $U(1)$ 有効理論が構築されたということと等価になる。またこの時の (2.33) 式中のように $u_\mu(s)$ で記述された $ActionS_{eff}[u]$ を Effective Action という。

2.3 アーベリアンドミナンスの問題点

このアーベリアンドミナンスに基づいて構築された赤外領域における $U(1)$ 有効理論が、MA ゲージでゲージ固定された系について abelian projection を課した場合には十分成立することはこれまでの研究で示されている¹⁴ [6]。しかし他のゲージ、2.1.4 節で説明したユニタリーゲージなどゲージ固定された系では赤外領域での物理量の算出において妥当な値を算出することができ

¹³ $U(1)$ 対称な $u_\mu(s)$ で Wilson loopwp 計算する時は exponential の肩に乗った $\theta_\mu(s)$ を足し合わせるだけでよい

¹⁴ 主にコンピュータシミュレーションを用いた物理量の計算によっている

ず、 $U(1)$ 有効理論の構築が十分に行えないこともまた示されている。

実際に $U(1)$ 有効理論が赤外領域で有効理論として機能するならば、どのようなゲージ固定を取った系についても有効理論を構築すれば、それは物理を記述する理論として成り立つことが求められる。つまり有効理論は、どんなゲージ固定を課した系に適用したものであっても、普遍に成り立つべきであるものなのに、これまでの結果からはこの理論は系のゲージ固定に依存しているように見えるのだ。

ではこの理論は系のゲージ固定に依存するような、有効理論とはなり得ないものなのだろうか。

我々はそうではなく、この $u_\mu(s)$ で記述される $U(1)$ 対称性を持つ理論が赤外領域で有効理論として機能するものであるということを次の点から信じている。

まずは、いくつかのゲージ固定をし、abelian projection を課した系について、link 変数から抜き出した $u_\mu(s)$ によって算出した Wilson loop の値をプロットしたグラフ (図 2.2) を見てみる¹⁵。このグラフを見ると、MA ゲージでゲージ固定した系から抜き出した $u_\mu(s)$ によって算出した値

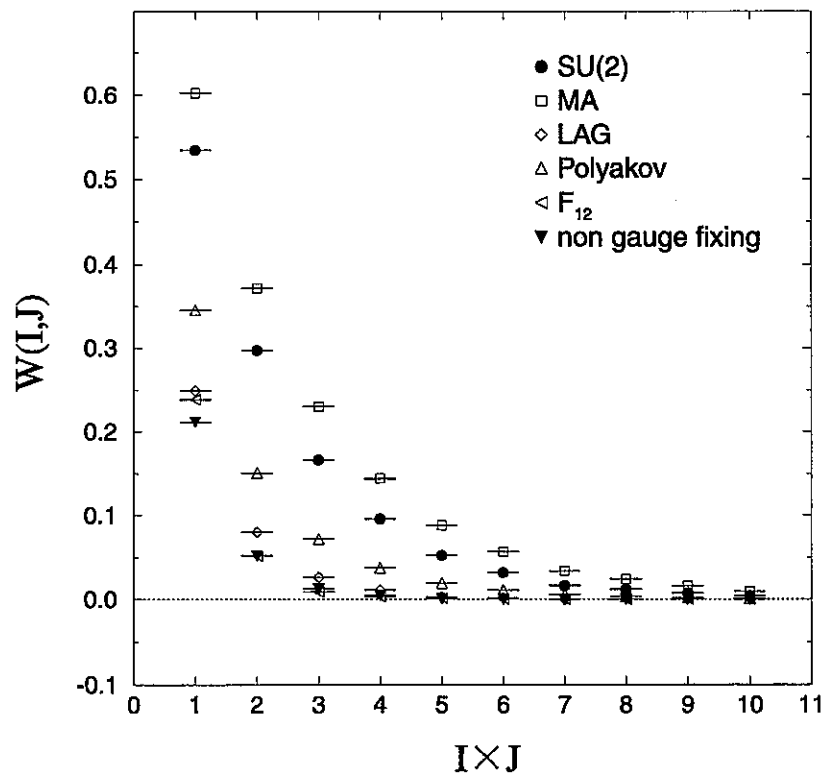


図 2.2: Wilson loop の振る舞い

は、元の link 変数 $U_\mu(s)$ で算出したものよりも大きな値を持っている。Wilson loop は様々な物理量や Action を算出するための基本的な量となるので、その値が大きければ物理量などを誤差の影響をあまりうけず、うまく算出することができる。これが MA ゲージのもとで有効理論がうまく構築できることの原因である。

しかし他のゲージ固定をした系の下では抜き出した $u_\mu(s)$ による Wilson loop の値が非常に小さくなってしまい、物理量などを算出しようとしても、Wilson loop 算出の際の系統誤差などに算出した値自体が埋もれてしまい、うまく算出することができないと考えられる。このことから

¹⁵ コンピューターによるモンテカルロシミュレーションによって算出した

他のゲージ固定をした系のもとでは $U(1)$ 有効理論を構築できないのではなく、構築しにくいだけであろうと予測できる。それはゲージ固定を課さなかった系については、キャラクター展開 (次章で解説) という解析的手法を用いることによって、赤外領域におけるアーベリアンドミナンスを厳密に示すことができるということがあげられる。Wilson loop の値に関しては、最も小さな値を取るゲージ固定を課さなかった系についてアーベリアンドミナンスが成立するのであれば、それよりも大きな値を持つ他のゲージ固定条件でもアーベリアンドミナンスは十分に成り立っていると考えられるだろう。

このもとで今回の研究では、abelian projection を課した系の Effective Action をコンピューターシミュレーションによって算出して、それがゲージ固定した系に対して普遍的な形になっているかどうかを調査する。いかに行うかについては第5章で解説する。

第3章 キャラクター展開

link 変数 $U_\mu(s)$ から抜き出した対角成分 $u_\mu(s)$ によって赤外領域の有効理論を構築しうることアーベリアンドミナンスということは前章で述べた。これは赤外領域における QCD の物理の振る舞いが対角成分 (abelian 部分) に従うことを意味している。しかしコンピューターによる数値シミュレーションでは MA ゲージによるゲージ固定を課した系のもとでしか、それをうまく示せていない。

では、アーベリアンドミナンスはゲージ固定に依存するものなのだろうか。

我々は、そうではないということ信じている。その根拠としてキャラクター展開による解析的手法がある。この手法によって、ゲージ固定条件を課さない場合の赤外領域におけるアーベリアンドミナンスを解析的に示すことができる。

3.1 キャラクターと展開

ここではキャラクター展開を考える上で基礎的なことについて説明する [7]。

3.1.1 群の表現とキャラクター

あるコンパクト Lie 群 G の各元 g について、適当な一次写像による変換 $g \rightarrow D(g)$ を考えた時、

$$D(g)D(h) = D(gh), \quad g, h \in G \quad (3.1)$$

が成り立つのであれば、この変換 D を群 G の表現¹ という。物理ではたいていの場合、 D は $SU(N)$ の群における n 次元ベクトル空間の一次変換で与えられるものを考え、このときの表現を「 n 次元の表現」、ベクトル空間を「表現空間」、変換群 D を表現行列という。

このコンパクト Lie 群 G の表現行列 $D^{(j)}$ に対して、そのトレースをとったものの値

$$\chi^{(j)}(g) = \text{Tr} [D^{(j)}(g)] \quad (3.2)$$

における各元 g の集合を「表現 $D^{(j)}(g)$ のキャラクター (指標)」という。このキャラクターによって表現を指定することは、キャラクターが相似変換に対して不変であるという長所を持つ²。

このことは物理のゲージ変換を考えた時、キャラクターはゲージ変換に対し不変ということになる。よって物理を知るためには既約表現におけるキャラクターを考えることが重要である。

以下の議論では、既約表現についてのみ考える。

¹ 表現とは、表現されるべき群に類型となるべき行列群のこと

² 適当な行列 V によって表現行列が $D(g) \rightarrow D'(g) = VD(g)V^{-1}$ と相似変換する時、 $D(g)$ と $D'(g)$ のトレースは同値になる

3.1.2 直交性と完全性

ここから表現行列 D を既約表現の表現行列ということにし、既約表現の組ごとに肩に (r) 、 (s) という添え字をのせることにする。既約表現は、表現の組ごとに

$$\int dD D_{ij}^{(r)} D_{kl}^{(s)-1} = \frac{\delta_{rs}}{d_r \delta_{il} \delta_{jk}} \quad (3.3)$$

$$\sum_{r,i,j} D_{ij}^{(r)} D_{ij}^{(r)-1} = \delta(D, D') \quad (3.4)$$

直交性 (式 (3.3)) と完全性 (式 (3.4)) をもつ。これより既約表現のキャラクターについても、式 (3.3) において $i = j$ 、 $k = l$ とおき、 i 、 k について和をとることで

$$\begin{aligned} \text{(式 (3.3) 左辺)} &= \sum_{i,k} \int dD D_{ii}^{(r)} D_{kk}^{(s)-1} \\ &= \sum \int dD \chi_{(r)}(D) \chi_{(s)-1}(D') \\ \text{(式 (3.3) 右辺)} &= \sum_{i,k} \frac{\delta_{rs}}{d_r} \delta_{ik} \\ &= \sum_i \frac{\delta_{rs}}{d_r} \delta_{ii} \\ &= \delta_{rs} \end{aligned}$$

より直交性を、式 (3.4) においては δ_{ij} を両辺にかけることで

$$\begin{aligned} \text{(式 (3.4) 左辺)} &= \sum_{r,i,j} D_{ij}^{(r)} D_{ij}^{(r)-1} \delta_{ij} \\ &= \sum_{r,i} D_{ii}^{(r)} D_{ii}^{(r)-1} \\ &= \sum_r \chi_{(r)}(D) \overline{\chi_{(r)-1}(D')} \\ \text{(式 (3.4) 右辺)} &= \delta(D, D') \delta_{ij} \\ &= \delta(DD'^{-1}) \end{aligned}$$

より完全性をそれぞれえる。

3.1.3 キャラクター展開

既約表現の重要さは、どんな表現も一義的な方法によって既約表現に分解するという事実にある。すなわち、どのような表現も適当に選ばれた行列を用いて相似変換することによって、既約表現の直和の形に分解することができるということである。これを規格化されたキャラクターによって考えると、前小節の直交性、完全性と合わせて、既約表現のキャラクターは群上の系で規格化直交規定をはるということになる。つまり任意の表現によって表される群上の系は、これを class function $f(D)$ とおくとキャラクターによって

$$f(D) = \sum_r d_r a_r \chi_{(r)}(D) \quad (3.5)$$

と展開することができる。これをキャラクター展開という。

このときの両辺に $\bar{\chi}_{(s)}(D)$ をかけて D で積分してやると、 D の直交性より

$$\begin{aligned} \int dD f(D) \bar{\chi}_{(s)}(D) &= \sum_r d_r a_r \int dD \chi_{(r)}(D) \bar{\chi}_{(s)}(D) \\ &= \sum_r d_r a_r \delta_{rs} \\ &= d_s a_s \end{aligned}$$

となるから、 a_r は一義的に

$$a_s = \frac{1}{d_s} \int dD f(D) \bar{\chi}_{(s)}(D) \quad (3.6)$$

と書くことができる。

3.2 Elitzur の定理

[8] ある適当なゲージ場において演算子 \mathcal{O} を考える。この系においてある特定のゲージ固定を課さない時、局所ゲージ不変性が破れていないことから演算子 \mathcal{O} の期待値はゲージ変換に対して不変な部分 \mathcal{O}^{inv} だけが寄与する。これを Elitzur の定理という。

これは演算子 \mathcal{O} の期待値の式

$$\langle \mathcal{O}[U] \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U e^{-S[U]} \mathcal{O}[U] \quad (3.7)$$

についてゲージ変換を課すと、期待値 $\langle \mathcal{O}[U] \rangle$ 、Harr 測度 \mathcal{D} 、Action $e^{-S[U]}$ は不変だから、

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}[U] \rangle &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}g e^{-S[U]} \mathcal{O}[g(s)U_\mu(s)g^\dagger(s+\hat{\mu})] \\ &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}e^{-S[U]} \left(\int \mathcal{D}g \mathcal{O}[g(s)U_\mu(s)g^\dagger(s+\hat{\mu})] \right) \end{aligned}$$

となり、よって式を満たすために

$$\mathcal{O}^{inv}[U] \equiv \mathcal{O}[g(s)U_\mu(s)g^\dagger(s+\hat{\mu})] \quad (3.8)$$

となることから求められる。

もし考えたい演算子 \mathcal{O} が、系の持つ対称性を持っていない場合、演算子は表現を持たないからキャラクター展開をすることができない。しかし $\mathcal{O} = \mathcal{O}^{inv} + \mathcal{O}^{var}$ という形で系の持つ対称性に対して不変な部分を抜き出すことができるのならば、その期待値 $\langle \mathcal{O}[U] \rangle$ は Elitzur の定理によって \mathcal{O}^{inv} のみで書くことができるので、この不変部分 \mathcal{O}^{inv} に対してキャラクター展開を適用できる。このことは考えたい演算子の期待値を系の持つ対称性に従う既約表現の表現ごとの和として書くことができることを意味している。

3.3 Wilson loop におけるキャラクター展開とアーベリアンドミナンス

ここではキャラクター展開によるアーベリアンドミナンスの解析の例として、Wilson loop のアーベリアンドミナンスについて見てみる³。

³ 他にも polyakov loop や グルーボールの質量についても計算できる

まず lattice 上にのせた $SU(2)$ 対称なゲージ場を考える。この系について abelian projection を行い、その後 link 変数 $U_\mu(s)$ から抜き出した abelian 部分 $u_\mu(s)$ を閉じた経路 C に沿ってかけあわせ、トレースをとったもの

$$W_A[C] \equiv \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\prod_{s, \mu \in C} u_\mu(s) \right] \quad (3.9)$$

を abelian の Wilson loop 演算子と定義する。この演算子は abelian projection を課した後のものなので $SU(2)$ 対称性に対して不変ではない。このため素朴には $SU(2)$ 対称な既約表現のキャラクターによる展開ができない。そこで $W_A[C] = W_A^{inv}[C] + W_A^{var}[C]$ として $SU(2)$ 不変な部分を抜き出すと、不変な部分 $W_A^{inv}[C]$ は

$$W_A^{inv}[C] = \frac{1}{2} \int \mathcal{D}g \text{Tr} \left[\prod_{s, \mu \in C} g(s) u_\mu(s) g(s + \hat{\mu}) \right] \quad (3.10)$$

とかける。この不変な部分 $W_A^{inv}[C]$ は $SU(2)$ 対称なのでキャラクター展開が行えるので、これを行うと

$$\sum_j a_j \chi_j(W_{Full}(C, s)) = \frac{1}{2} \int \mathcal{D}g \text{Tr} \left[\prod_{s, \mu \in C} g(s) u_\mu(s) g(s + \hat{\mu}) \right]$$

であり、この両辺に $\chi_k(W_{Full}(C, s))$ をかけ、 U で積分するとキャラクターの直交性から

$$\sum_j a_j \delta_{jk} = \frac{1}{2} \int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}g \text{Tr} \left[\prod_{s, \mu \in C} g(s) u_\mu(s) g(s + \hat{\mu}) \right] \chi_k(W_{Full}(C, s)) \quad (3.11)$$

トレースの巡回性から変換行列 g が落ちて

$$a_k = \frac{1}{2} \int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}g \text{Tr} \left[\prod_{s, \mu \in C} u_\mu(s) \right] \chi_k(W_{Full}(C, s)) \quad (3.12)$$

を導ける。

ここで特に $k = \frac{1}{2}$ の時について考える。link 変数を

$$U_\mu(s) = \sqrt{1 - r_\mu(s)^2} \begin{pmatrix} e^{i\theta_\mu(s)} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_\mu(s)} \end{pmatrix} + ir_\mu(s) \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi_\mu(s)} \\ e^{i\phi_\mu(s)} & 0 \end{pmatrix}$$

ととると⁴、Wilson loop の値は

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[\prod_{s, \mu \in C} U_\mu(s) \right] \\ &= \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} \prod_{s, \mu \in C} \sqrt{1 - r_\mu(s)^2} e^{i\theta_\mu(s)} & 0 \\ 0 & \prod_{s, \mu \in C} \sqrt{1 - r_\mu(s)^2} e^{-i\theta_\mu(s)} \end{pmatrix} + (\phi \text{ を含む項}) \right] \end{aligned}$$

⁴ link 変数から abelian 部分 (対角部分) を抜き出した時の $u_\mu(s)$ は

$$u_\mu(s) = \begin{pmatrix} e^{i\theta_\mu(s)} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_\mu(s)} \end{pmatrix}$$

となる

と書ける。この時 Harr 測度は

$$\int \mathcal{D}U = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 r_\mu(s) dr_\mu(s) \int_0^{2\pi} d\theta_\mu(s) \int_0^{2\pi} d\phi_\mu(s)$$

だから、loop C の長さを $P(C)$ とおくと

$$\begin{aligned} a_{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left(\prod_{s,\mu \in C} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 r_\mu(s) dr_\mu(s) \int_0^{2\pi} d\theta_\mu(s) \int_0^{2\pi} d\phi_\mu(s) \right) \times 2 \cos \left(\sum_{s,\mu \in C} \theta_\mu(s) \right) \\ &\times \left(\prod_{s,\mu \in C} \sqrt{1-r_\mu(s)^2} \right) \cdot 2 \cos \left(\sum_{s,\mu \in C} \theta_\mu(s) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi^2} \right)^{P(C)} \cdot 2 \cdot (2\pi^2)^{P(C)} \left\{ \prod_{s,\mu \in C} \int_0^1 r_\mu(s) \sqrt{1-r_\mu(s)^2} dr_\mu(s) \right\} \cdot \left\{ \int_0^{2\pi} d\theta_\mu(s) \cos^2 \left(\sum_{s,\mu \in C} \theta_\mu(s) \right) \right\} \\ &= \left(\frac{2}{3} \right)^{P(C)} \end{aligned} \quad (3.13)$$

と $a_{\frac{1}{2}}$ を算出できる。

これらを踏まえて Elitzur の定理より、ゲージ固定しない時の abelian Wilson loop の期待値 $\langle W_A(s) \rangle$ は

$$\begin{aligned} \langle W_A(C) \rangle &= \frac{1}{z} \int \mathcal{D}U e^{-S[U]} W_A^{inv}(s) \\ &= \frac{1}{z} \int \mathcal{D}U e^{-S[U]} \sum_j a_j \chi_{(j)}(W_{Full}(C, s)) \\ &= \frac{1}{z} \sum_j a_j \int \mathcal{D}U e^{-S[U]} \chi_{(j)}(W_{Full}(C, s)) \\ &= \sum_j a_j \langle W_{Full}(C) \rangle_j \\ &= \left(\frac{2}{3} \right)^{P(C)} \langle W_{Full}(C) \rangle_{\frac{1}{2}} + (\text{他の高次表現}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

と書ける。

長距離、強結合領域において、式 (3.14) の左辺について $\left(\frac{2}{3} \right)^{P(C)} \langle W_{Full}(C) \rangle_{\frac{1}{2}}$ でくくると高次表現の項が落ちることが分かる。そこで abelian Wilson loop によって、この領域の Creutz Ratio を計算することを考えると

$$\begin{aligned} \sigma_A(C) &= -\ln \frac{\langle W_A(C(I, J)) \rangle \langle W_A(C(I+1, J+1)) \rangle}{\langle W_A(C(I+1, J)) \rangle \langle W_A(C(I, J+1)) \rangle} \\ &= -\ln \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^{P(C(I, J))} \langle W_{Full}(C(I, J)) \rangle_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3} \right)^{P(C(I+1, J+1))} \langle W_{Full}(C(I+1, J+1)) \rangle_{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{2}{3} \right)^{P(C(I+1, J))} \langle W_{Full}(C(I+1, J)) \rangle_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3} \right)^{P(C(I, J+1))} \langle W_{Full}(C(I, J+1)) \rangle_{\frac{1}{2}}} \\ &= -\ln \frac{\langle W_{Full}(C(I, J)) \rangle_{\frac{1}{2}} \langle W_{Full}(C(I+1, J+1)) \rangle_{\frac{1}{2}}}{\langle W_{Full}(C(I+1, J)) \rangle_{\frac{1}{2}} \langle W_{Full}(C(I, J+1)) \rangle_{\frac{1}{2}}} \\ &= \sigma_{Full, \frac{1}{2}}(C) \end{aligned} \quad (3.15)$$

を導くことができる。

これより $SU(2)$ 対称な系の物理量 (この場合は string tension) とその系の link 変数から抜き出した $u_\mu(s)$ によって算出した物理量が解析的に厳密に一致することが示せることが分かる。

第4章 lattice上のWilson流くりこみ群とblock spin変換についての概要^[9]

lattice化の手法はこれまでの章でも触れたが、場の理論において摂動論をつかえない領域を理解するための非摂動論的手法の一つであった。そもそも場の理論では、場が無限大の自由度を持っているため素朴には数学的に定義できない、そこで coupling constant が小さいような領域 (電磁相互作用や弱い相互作用) では、摂動論による解析とくりこみという処方によって有限な理論として記述を可能した。しかし、QCDのような強い相互作用の領域では、coupling constant が大きいため素朴には摂動展開が行えず、全ての物理を理解することはできない。

そこで coupling による展開以外の方法、非摂動論的な方法によって場の理論を理解するための方法として lattice化の手法が考案された。これは場の理論の問題が、結局のところ非可算無限個の点が空間上にあるために数学的に定義できない¹ ということから、まず空間を有限に区切り、その中でさらに連続な並進対称性や回転不変性を犠牲にして空間を lattice 状に区切ることで、理論そのものを有限の自由度で記述できるようにしたものである。この lattice 上に様々な物理的な場をのせてやると、単位体積あたりの自由度が有限になるために、系の経路積分が単なる多重積分になり原理的に積分を行うことができるようになる。すなわち、ある lattice 間隔を持った統計系として様々な物理量の計算が可能になったということである。

ただし、系を lattice 状に区切ったため、この系には離散的な並進対称性と 90 度の回転不変性しか残っていない。つまり現実の系そのものを表す場の理論にはなっていないのだ。そのため今度は逆に、lattice 上の理論からいかにして連続理論をつくるか、つまり lattice 上で算出した物理量をいかにして連続な領域、現実の系に持っていくかということが問題になった。

これを解決する方法が Wilson によって提唱されたくりこみ群の方法である。これによって我々は lattice 上で行った計算を連続な系に適用することができるのである。

この章では lattice 上におけるくりこみ群の方法についての概要とその処方について説明する。

4.1 連続極限と実空間くりこみ群の概要

4.1.1 連続極限

lattice 間隔 a 、lattice size n の lattice 空間における lattice 上の理論を考えると、 $a \rightarrow 0$ 、 $n \rightarrow \infty$ の極限を取った時に連続理論になることは見て取れる。しかしそれを素朴に行くと発散が発生し理論が作れない。そこで Wilson は、この統計系が臨界点を持ち、そこで相関距離が発散していれば連続理論を取るということを主張した。ここで相関距離とは、lattice 上の理論における場 $\phi(s)$ 、coupling constant の組を $\{g\}$ とした時の 2 点間の相関関数において、2 点の間隔を ∞ に取った時の

$$\langle \phi(s)\phi(0) \rangle_{\text{corr}} \equiv \langle \phi(s)\phi(0) \rangle - \langle \phi(s) \rangle \langle \phi(0) \rangle \xrightarrow{|s| \rightarrow \infty} e^{-m_{\text{Lat}}(g)|s|} \quad (4.1)$$

¹ 無限自由度の積分ができてしまう

における非物理的な次元を持たない量 m_{Lat} の逆数

$$\xi \equiv \frac{1}{m_{Lat}} \quad (4.2)$$

のこと。この m_{Lat} は場の理論の言葉でいえば、 ϕ によって励起された粒子の質量に相当する。物理的な距離は2点間の lattice 数 $|s|$ に lattice 間隔 a をかけたものなので、同様の相関関数を連続理論で取った時

$$\langle \phi(x)\phi(0) \rangle_{corr} \equiv \langle \phi(x)\phi(0) \rangle - \langle \phi(x) \rangle \langle \phi(0) \rangle \xrightarrow{|x| \rightarrow 0} e^{-m_{Phy}(g)|x|} \quad (4.3)$$

と書けることから、この時の m_{Phy} を物理的な質量として

$$m_{Phy} \equiv \frac{m_{Lat}}{a} \quad (4.4)$$

と定義すると、 m_{Phy} を正しく (距離)⁻¹ の次元を持った、現実の系で伝播する粒子の質量とすることができる。

この式 (4.4) から、臨界点 ($\xi \rightarrow \infty$) では m_{Phy} が有限を保つために $a \rightarrow 0$ の連続極限を取ることが分かる。すなわち連続理論は、 m_{Phy} を有限の値に保つように $a \rightarrow 0$ の極限を取ることを要求する。

またこの時の coupling constant $\{g\}$ を $\{g\}_c$ とおく。

4.1.2 実空間のくりこみ群

前小節で考えた lattice 空間上の場 $\phi(s)$ において、この場が内部対称性 G を持つ時、その系の Action が対称性 G を満たす operator \mathcal{O}_j の完全系によって

$$S = \sum_j g_j \mathcal{O}_j(\phi), \quad (4.5)$$

$$\mathcal{O}_j(\phi) = \mathcal{O}_j(G\phi)$$

と書かれるとする。すると、この Action のそれぞれの operator の係数が一般化された coupling constant になる。つまり coupling constant $\{g_j\}$ が決まれば、Action が決まり、Action が決まれば分配関数が決まる。分配関数が決まれば任意の関数の期待値を求めることができるので、2点間の相関関数を求めることができ、従って相関距離を決めることができるようになる。これより相関距離 $\xi(g_j)$ は coupling constant $\{g_j\}$ の空間で定義された写像だという事がわかる。

lattice 上の理論において一般に考えられるくりこみ群によるくりこみ変換とは、この $\{g_j\}$ という coupling constant で張られた無限次元空間内での操作のことを言う²。これは g 空間 $\{g_j\}$ から g 空間 $\{g'_j\}$ への連続写像として、

$$\begin{pmatrix} \text{coupling constant} \\ \text{相関距離} \\ \text{lattice 間隔} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \{g_j\} \\ \xi \\ a \end{pmatrix} \xrightarrow{R^{(b)}} \begin{pmatrix} \{g'_j\} \\ \xi' \\ la \end{pmatrix} \xrightarrow{R^{(b)}} \dots \quad (4.6)$$

と変換される。この時の $R^{(b)}$ をスケール b のくりこみ変換といい、

$$g_j \rightarrow g'_j = R^{(b)} g_j, \quad \xi(g') = \frac{\xi(g)}{b} \quad (4.7)$$

² coupling constant がこの空間内で動いている間は、系の対称性 G は満たされている

と定義される。この変換はスケールをかえるだけの変換であり、変換後の新しいスケール (lattice 間隔 la) 以上の領域では物理を変えない。このくりこみ変換を順々に繰り返し行っていき、そのときの coupling constant $\{g_j\}$ の変化について追っていったものをくりこみ群の flow という。

4.2 block spin 変換と lattice 上の理論の長距離極限

4.2.1 block spin 変換の概要

前節のくりこみ変換 $R^{(b)}$ について、具体的にどうつくるかを考える。

一般に最もよく使われるのが実空間における block spin 変換 (カダノフ変換) と呼ばれるものである。ここでは簡単のためスカラー場 $\phi(s)$ について考える。

d 次元空間における、スケールが 2 のくりこみ変換では、図 (4.1) で示されているように、最

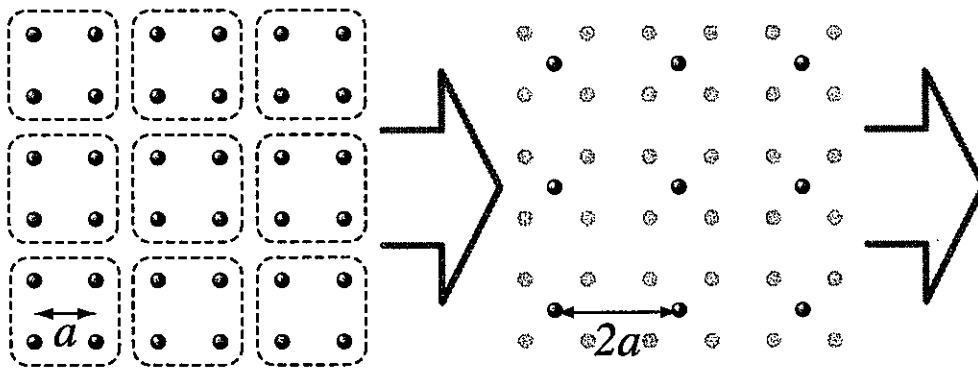


図 4.1: スカラー場の block spin 変換

も近い位置にある 2^d 個のスカラー場 ϕ を一まとめにして、新しい場 ϕ' をもともとのスカラー場の関数として定義する。最も簡単な例としては、 2^d 個のスカラー場の平均値

$$\phi' = F(\phi_i) = \frac{1}{c} \sum_{i \in B} \phi_i, \quad c; \text{規格化因子} \quad (4.8)$$

を取ってしまうというもので、線形 block 変換と呼ばれている。これによって図 (4.1) のように、これまで lattice 間隔 a スカラー場の configuration が lattice 間隔 $2a$ のものになる。この時に $\{g'_j\}$ はくりこまれた Action S' によって

$$S'[\phi'] = \sum_j g_j \mathcal{O}_j(\phi') \quad (4.9)$$

$$e^{-S'[\phi']} = \int \prod_s d\phi(s) \prod_B \delta(\phi' - F(\phi)) e^{-S[\phi]} \quad (4.10)$$

と決めることができる。これは元の Action の短いスケール、すなわち高い運動量成分を積分してしまい、低い運動量成分に対する Effective Action を書いていることになる。しかし解析的にこれを解こうとしても無限個の coupling constant を考えることは実際にはできないし、有限個に区切っても解けるのは非常に限られた場合だけである。そこで有限個の組に区切った coupling constant $\{g_a\}$ を元に、書き下した Action から数値シミュレーション (Monte-Carlo 法) によって

configuration を発生させる。それに対してくりこみ変換を行い、今度はその configuration から逆 Monte-Carlo 法と呼ばれる手法によって Action の coupling constant $\{g'_a\}$ を決めるという手法を用いる³。

4.2.2 lattice 上の理論の長距離極限

coupling constant $\{g_j\}$ で張られた空間 (coupling space) 内をくりこみ変換やその一つの例である block spin 変換によって、 $\{g_j\}$ のとる値が具体的にどのような flow を描くのか知ることが、連続理論を知るために重要である。

coupling space でまずポイントになるのは、相関距離が発散する時の coupling constant $\{g_j\}_c$

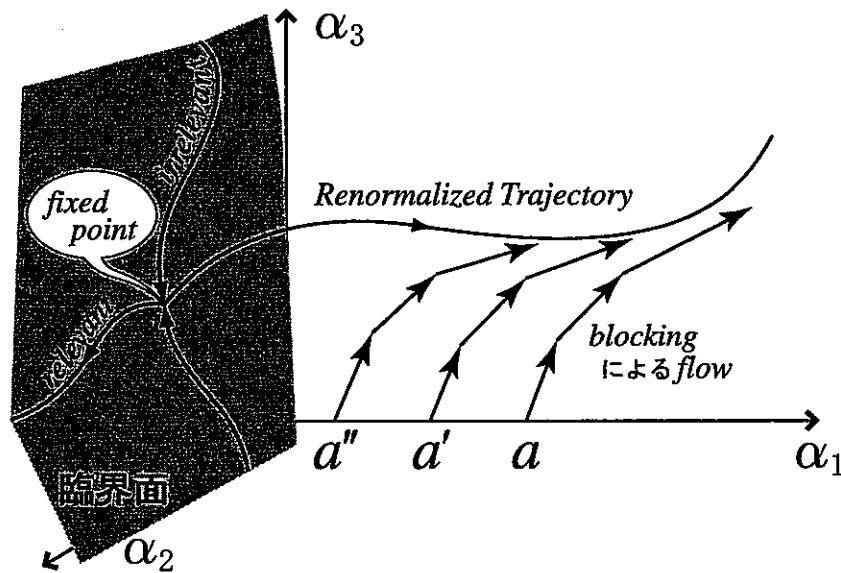


図 4.2: coupling space 上の flow

が張る空間である。これはモデルによって異なる多様体を作り、これを臨界面とよぶ。Wilson はこの臨界面がさらにいくつかのユニヴァーサルティークラスに分解できることを主張した。つまり臨界面上でくりこみ変換を行った場合、その変換を無限回作用させると臨界面上の固定点に収束し、しかもその固定点の一つである必要はなく、臨界面上の領域ごとに異なる固定点に収束するようになっているということを主張した。

くりこみ変換によって変換されるのはスケールだけなので、変換の前後で物理は変わらない。つまり、くりこみ変換で結びつくような coupling space 上の 2 点⁴ は、その後のくりこみ変換によって、その flow が同一の固定点に収束する臨界面上の領域に到達するということである。逆にいえば同じ固定点に収束する理論は、たとえ lattice 上での初期条件が異なっても⁵ 連続理論では同じ物理をえるということである。

ここで同じ領域に入ることを同じユニヴァーサルティークラスに属するという。

これより理論の時空と対称性が与えられた時、どのような連続理論ができるかを調べるには臨

³ 具体的とった方法については後の第 5 章で述べる

⁴ スケールは異なるが同一の物理をあらわす 2 種類の Effective Action 間のこと

⁵ 例えば異なるゲージ固定条件を課すなど

界面を解析すればよい⁶。

もう一つ重要な点は、くりこみ変換の仕方は一意ではなく、一般にくりこみ変換を変えると固定点の値が変わる⁷が、その時の臨界面上のユニヴァーサルティークラスの領域の境界の形は変わらないということである。これ自体は仮定であるが、連続理論の数は数値シミュレーションなどによって観測できる量であり、それが観測の仕方によって値が変わってしまつては困るということから妥当な仮定であることが分かる。

ここで固定点近傍の flow についてその性質を調べるために、固定点 $\{g_j^{\text{FP}}\}$ からのずれ δg_j をとって

$$g_j = g_j^{\text{FP}} + \delta g_j \quad (4.11)$$

として摂動的⁸に取り扱おうと、固定点を中心に coupling constant の flow はくりこみ変換によって、図 (4.2) にあるような三つの性質を持つ。

relevant coupling くりこみ変換を行っていくと固定点から離れていく性質を持つ。

irrelevant coupling くりこみ変換を行っていくと固定点に近づいていく性質を持つ。

marginal coupling くりこみ変換によって動かないという性質を持つ。

このうち適当な relevant coupling の軌跡を Renormalized trajectory (RT) という⁹。この Renormalized trajectory を知ることが連続理論を作るためには非常に重要である。

前小節で示したとおり block spin 変換などによるくりこみ変換は、lattice 上の理論における系において lattice 間隔を大きくしていく変換である。これは lattice 上の理論における系の長距離極限を取っていることに他ならない。しかし連続理論を作るためにはくりこみ変換とは逆に、相関距離を大きくしていかなくてはならない。この時のくりこみ変換による flow が、Renormalized trajectory に乗るのであれば、その後の変換によって余計な irrelevant 方向に変換されることがなくなるため、くりこみ群の方程式を一つのパラメーターで書くことができるようになる。これによって連続理論における Action の coupling constant $\{g_j\}_c$ を容易に導くことができる。

実際にコンピューターシミュレーションによる測定では、予想する連続理論の Action の形ということで Renormalized trajectory を想定できるが、そのとおりの軌跡を得るかどうかは分からない。そこで、逆に適当な初期条件を課した lattice 上の Action をくりこみ変換していき、その長距離極限で flow がのるような線を見つけ出し、これを Renormalized trajectory ととる。この時の Renormalized trajectory によって連続理論を導出する。

⁶ 摂動論では作用が与えられればそれで物理が分かったということになるが、非摂動的に場の理論を構成しようと思えば、Action を与えただけでは駄目で、その後に臨界面の性質を調べなければどのような物理なのかは理解できない

⁷ これより固定点の値そのものには物理的な意味はない

⁸ くりこみ変換をした $\{g_j\}$ について、固定点を中心に δg_j で展開する

⁹ Renormalized trajectory に沿って臨界面の外から臨界面に近づいていったときに連続理論がえられることから、くりこみ変換を行っていくと固定点から離れていく性質をもつ coupling に relevant (有意な) という名がついた

第5章 方法と結果

第2章において、QCDにおける赤外領域、すなわちゲージ場が強結合をするような領域をより効果的に理解するための有効理論構築に関する「monopoleのシナリオ」の第一の操作、abelian projectionとそれを課した系が従うアーベリアンドミナンスと、赤外領域での $U(1)$ 有効理論の構築について述べた。

構築された $U(1)$ 有効理論は、赤外領域では十分妥当であることが、これまでの研究における物理量の測定によって示されたが、それらはいくまでもMAゲージによるゲージ固定を課した系においてabelian projectionを行った場合である[6]。つまり、この有効理論にはゲージ固定した系に対する依存性の問題が存在する。物理をより効果的に理解するための理論であるには、それはゲージ変換に対して普遍であるべしと考えるのならば、この $U(1)$ 有効理論は理論として不十分であるといえる。

しかし構築した理論そのものにゲージ固定に依存するような要素は入っていないので、原理的には普遍であろうことが予想できる。また第3章で示したキャラクター展開による手法によって、ゲージ固定を課さない場合はアーベリアンドミナンスが解析的に厳密にいえることから $U(1)$ 有効理論が十分に示されていることから普遍性は予測できる。これらのことから、MAゲージによるゲージ固定以外のゲージ固定の元ではアーベリアンドミナンスを示すような結果が原理的にえられないのはなく、単に数値シミュレーションでは見えにくいだけであるといえる。

そこでこの研究では、代表的なゲージ固定を課した系について、lattice gauge theoryを用い数値シミュレーションによって、その連続極限(連続な現実の系)においてアーベリアンドミナンスが十分に成り立っているか、すなわちゲージ固定に依らず $U(1)$ 有効理論が構築できるかを調べる。また同時にこれらがゲージ固定に対して普遍であることもあわせて調査する。

この章では、その具体的方法と結果について記す。

5.1 アーベリアンドミナンス調査についての概要とシミュレーションの流れ

まず、第2章2.2節で示したように、 $U(1)$ 有効理論の構築は、扱っているabelian projectionを課した系でアーベリアンドミナンスが十分に成り立っているかどうかによる。

また、我々にとって最も大切なのが現実の系での物理を知ることである。そのための道具としてlattice化の手法は導入されたにすぎず、我々はたとえlattice空間上でうまく物理が見えていなくても連続極限においてそれが見えていれば良いという立場をとるべきである。

これらの事をふまえて、系のアーベリアンドミナンスを調べるためにabelian projectionを課した系のEffective Actionとして

$$S_{eff} = g_a(S_{abelian}) + g_{na}(S_{non-abelian}) \quad (5.1)$$

という形を持つようなものを仮定し、これを数値シミュレーション (Monte-Carlo 法) によって発生させた系の configuration について、くりこみ変換を行うごとに、逆 Monte-Carlo 法¹ によってその Effective Action の coupling constant を決定する。この時の Effective Action の coupling constant を coupling space 上にプロットしていけばくりこみ変換による Action の flow と有効理論の連続極限を知ることができる。事前の予想としては図 5.1 のようになるところが望ましいと考えている。この flow が図 5.1 のように coupling space 上で $g_a > g_{na}$ の領域にいるのであれば、それをアーベリアンドミナンスと呼ぶことにする。これは何度かくりこみ変換を行った系において、 $g_{na} \neq 0$ であっても lattice 上において $g_a > g_{na}$ の傾向をもち、長距離極限では $g_{na} = 0$ か $g_{na} \simeq 0$ のような Renormalized trajectory にのるのであればその Renormalized trajectory こそが連続理論における $U(1)$ 有効理論の Effective Action であり、アーベリアンドミナンスが成り立っているとすると、ということである。このため lattice 空間では、式 (2.33) から期待される $u_\mu(s)$ の

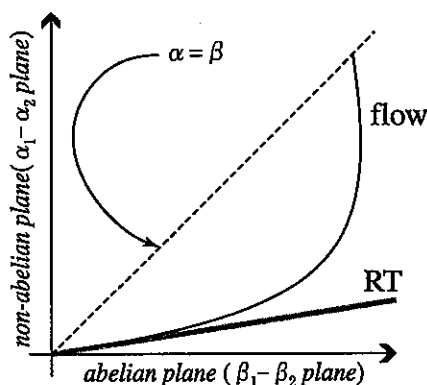


図 5.1: Effective Action の flow の予想図

みによって書かれた Effective Action をえられなくても良いという立場をとる。

さらにこの flow を系のゲージ固定ごとにとることによって、それぞれの系でのアーベリアンドミナンスについて知ることができる。そしてこの flow が全て同じ Renormalized trajectory にのるのであれば、それはアーベリアンドミナンスのゲージ普遍性、あるいは連続な $U(1)$ 有効理論のゲージ普遍性を示せたことになる。

5.2 Effective Action の設定

ここでは、前節において式 (5.1) のように仮定することとした Effective Action についてその詳細な形を定める。

式 (2.33) より、素朴に Effective Action を考えるなら

$$e^{-S_{eff}[u_\mu]} = \int \mathcal{D}C e^{-S[C_\mu u_\mu]} \delta(f(Cu)) \Delta_{FP} \quad (5.2)$$

を満たすものとなる。これは元の Action $S[C_\mu u_\mu]$ が Wilson Action でかかれていたとしても、Effective Action に様々な種類の大きさの Wilson loop からなる項が出てきてしまう。そのため解析的な手法によってこれを定めることは難しい。

¹ 逆 Monte-Carlo 法についての詳細は付録 A を参照のこと

このことから、Effective Action の形を仮定する時には、本来ならば全ての Wilson loop などの項の和として与えねばならない。しかし式 (4.10) を見れば分かるように、変換によって与えられるはずの Action が素朴には同じような結果をえるくりこみ変換による変換では²、数値シミュレーションによって、 1×1 、 2×1 の Wilson loop からなる項を考えるだけで十分であるという研究結果が報告されている [10]。また、Wilson Action に対してそれを改良した improved Action として 1×1 、 2×1 の Wilson loop からなる項をもつ Iwasaki Action が知られていて、これを用いると Wilson Action からくりこみ変換をはじめのよりも、一回 block spin 変換 (くりこみ変換) の操作を行った後の coupling space からの flow を得る事ができる。これらより、Effective Action として、Wilson loop が 1×1 、 2×1 のみからなるものを

$$S_{eff}(s) = \underbrace{\alpha_1(S_{SU(2),1 \times 1}(s) - S_{U(1),1 \times 1}(s)) + \alpha_2(S_{SU(2),2 \times 1}(s) - S_{U(1),2 \times 1}(s))}_{non-Abelian part} + \underbrace{\beta_1 S_{U(1),1 \times 1}(s) + \beta_2 S_{U(1),2 \times 1}(s)}_{Abelian part} \quad (5.3)$$

という形で与える。ここで

$$\begin{aligned} S_{SU(2),1 \times 1}(s) &= \frac{1}{2} \text{ReTr} \left[\sum_s \sum_{\mu \neq \nu} (U_{\square,1 \times 1}(s) + U_{\square,1 \times 1}^\dagger(s)) \right] \\ &= \frac{1}{4} \text{ReTr} \left[\sum_s \sum_{\mu \neq \nu} U_{\square,1 \times 1}(s) \right] \\ S_{SU(2),2 \times 1}(s) &= \frac{1}{4} \text{ReTr} \left[\sum_s \sum_{\mu \neq \nu} U_{\square,2 \times 1}(s) \right] \\ S_{U(1),1 \times 1}(s) &= \frac{1}{4} \text{ReTr} \left[\sum_s \sum_{\mu \neq \nu} u_{\square,1 \times 1}(s) \right] \\ S_{U(1),2 \times 1}(s) &= \frac{1}{4} \text{ReTr} \left[\sum_s \sum_{\mu \neq \nu} u_{\square,2 \times 1}(s) \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

であり、 $U_{\square,1 \times 1}$ 、 $U_{\square,2 \times 1}$ はそれぞれ $SU(2)$ 対称性を持つ lattice 上の link 変数 $U_\mu(s)$ によって作られる 1×1 、 2×1 の Wilson loop、 $u_{\square,1 \times 1}$ 、 $u_{\square,2 \times 1}$ はそれぞれ $SU(2)$ 対称性を持つ lattice 上の link 変数から抜き出した対角成分 $u_\mu(s)$ によって作られる 1×1 、 2×1 の Wilson loop である。

このように与えた Effective Action について、Wilson Action を元に Monte-Carlo 法によって発生させた configuration から、逆 Monte-Carlo 法によって coupling constant α_1 、 α_2 、 β_1 、 β_2 を決めてやるば系の Effective Action を得ることができる。

5.3 実際の blocking 変換①～ Swendsen 流 blocking ～

5.1 節で示したとおり、我々が知りたいのは連続理論であり lattice 上の理論は連続理論を求めるための道具でしかない。lattice 上の理論から連続極限を求める方法の概要は第4章で示したと

² 式 (4.10) における $S'[\phi]$ を ϕ で記述することを考えると同様に様々な種類の大きさの Wilson loop からなる項がでてくる

おりである。

ここでは第4章4.2節で示した block spin 変換の一般論を具体的にどのように行ったかを示す。

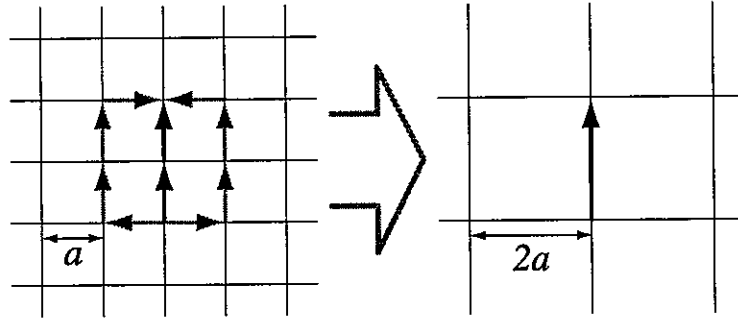


図 5.2: Swendsen 流 blocking における blocking

$$\uparrow = \frac{1}{N} \left(\uparrow + c_0 \sum_{\mu \neq \nu} \begin{array}{c} \leftarrow \uparrow \\ \uparrow \rightarrow \end{array} \right)$$

図 5.3: Swendsen 流 blocking による新しい link 変数の定義

考えている系は $SU(2)$ 対称性を持ったゲージ場のみの系³ なので、block spin 変換はこのゲージ場についてのみ行われる。くりこみ変換は変換の仕方によって固定点の取りうる値が違うので、最も一般的な block spin 変換の方法、Swendsen 流 blocking を行う。

これは図 5.2 のように、abelian projection を課した系の link 変数 $U_\mu(s)$ について、隣り合う 2 本の link 変数 $U_\mu(s)$ と $U_\mu(s + \hat{\mu})$ をそのままかけあわせたものと、ゲージ場としての変換性を失わないように周囲を迂回したものを図 5.3 のようにウェイト C_0^4 を乗じて足したもの。 N は規格化因子である。これによって、そのゲージ対称性を失わないように lattice 間隔 a の link 変数から、lattice 間隔 $2a$ の新しい lattice 上の link 変数を作ることができる。

5.4 Swendsen 流 blocking のもとでの結果

$SU(2)$ 対称性を持つ pure QCD の場についてシミュレーションを行った。その結果が図 5.4 と図 5.5 である。

図 5.4 は、lattice size ; 32^4 の lattice において、 $\beta = 2.3$ の Wilson Action を元に Monte-Carlo 法によって 50 個の configuration を発生させた系に、異なるゲージ固定をした系に対して abelian projection を課した時の、また図 5.5 は、lattice size ; 32^4 の lattice において、 $\beta = 2.1$ 、 $\beta = 2.3$ 、 $\beta = 2.5$ の異なる Wilson Action を元にそれぞれ Monte-Carlo 法によって 50 個の configuration を発生させた系に、MA ゲージによるゲージ固定をした系に abelian projection を課した時の、

³ 一般に pure QCD と呼ばれている gluon のみからなる系

⁴ このウェイトの値がとりうる値に関する理論的背景はないので、ここでは一般的に用いられている $C_0 = 0.5$ を代入した



Lattice size : 32^4 、Wilson Action's coupling constant $\beta : 2.3$ 、

Effective Action : $S_{eff} = \alpha_1 (\square - \square) + \alpha_2 (\square\square - \square\square) + \beta_1 \square + \beta_2 \square\square$

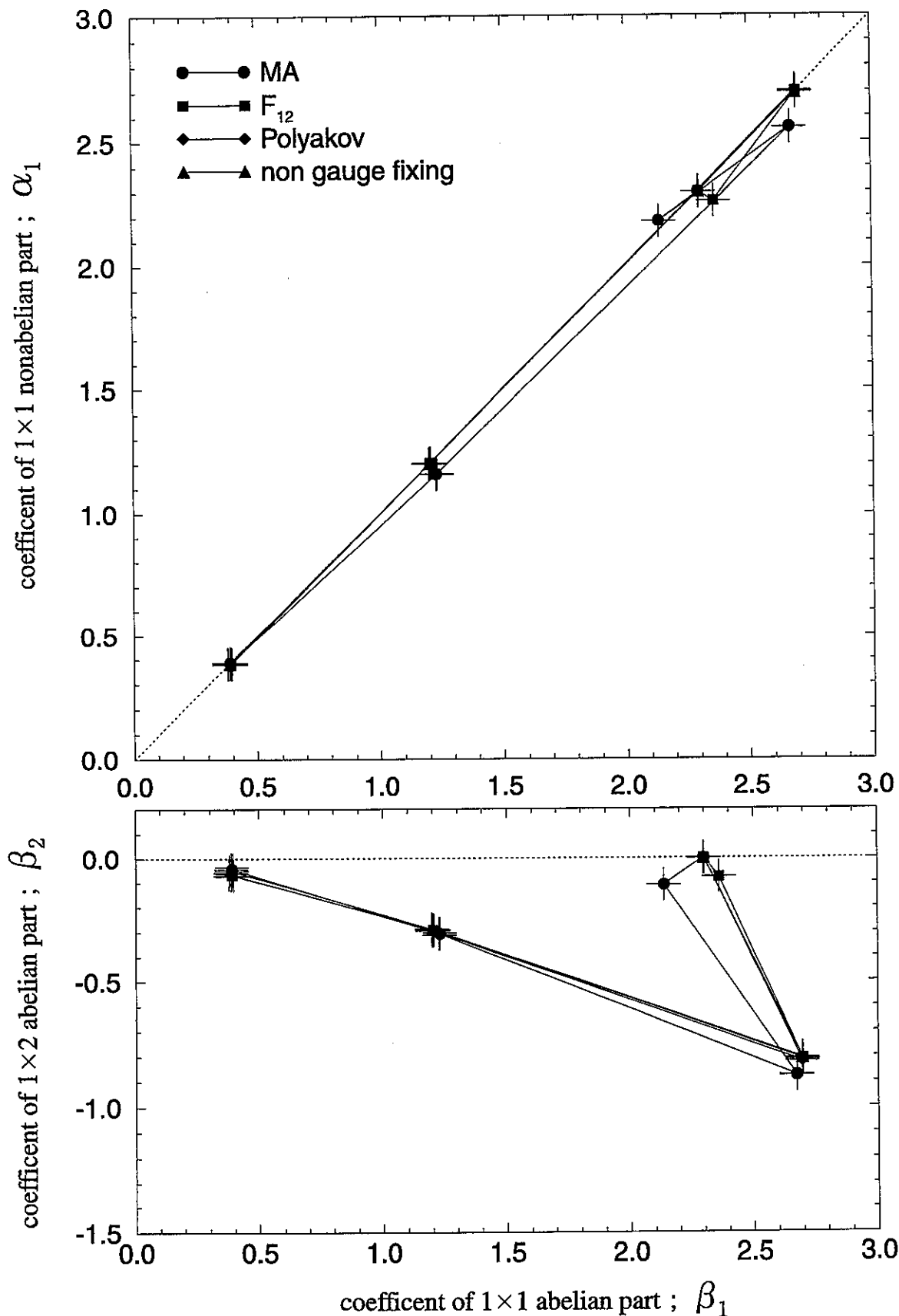


図 5.4: 代表的なゲージ固定をした系のもとでの Swendsen 流 blocking による flow

Lattice size : 32^4 , MA gauge fixing

Effective Action : $S_{eff} = \alpha_1 (\square - \square) + \alpha_2 (\square\square - \square\square) + \beta_1 \square + \beta_2 \square\square$

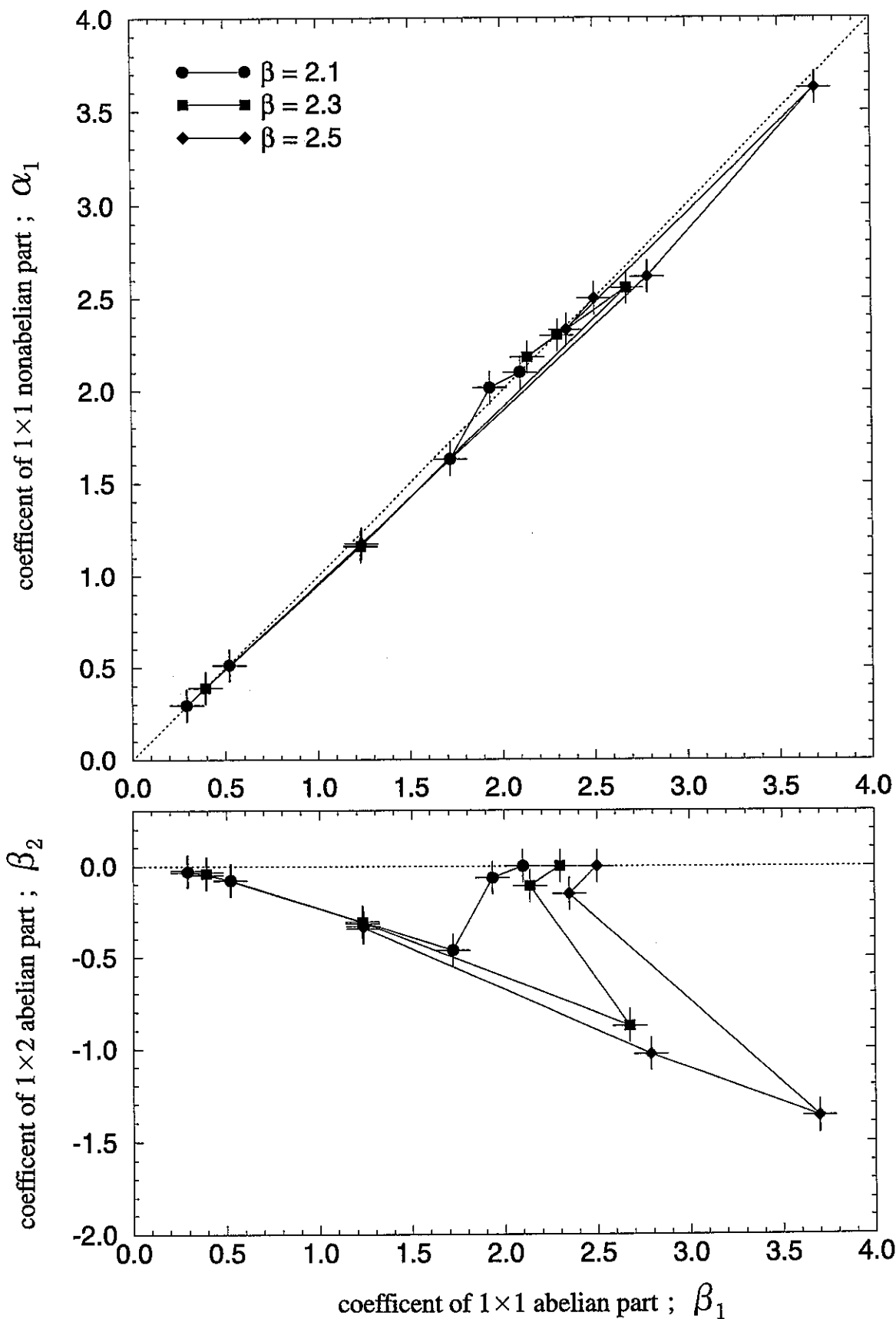


図 5.5: 異なる β の値のもとでの Swendsen 流 blocking による flow

Swendsen 流 blocking による Effective Action の coupling の flow である。

ただし、4 個の coupling constant からなる四次元の coupling space のグラフなどはかけないの
で、flow の性質を最も見やすい 1×1 の Wilson loop からなる $(\beta_1; \text{abelian part}) - (\alpha_1; \text{non-abelian part})$ 平面 (図上部) と、abelian part からなる $(\beta_1; 1 \times 1 \text{ の Wilson loop}) - (\beta_2; 2 \times 1 \text{ の Wilson loop})$ 平面 (図下部) の二つに、それぞれ四次元の flow を projection したものを記載した。

図上部のグラフ中の点線は $\alpha_1 = \beta_1$ の線である。flow の出発点を、一番最初に configuration を発生させた Action、すなわち Wilson Action だとすると、link 変数 $U_\mu(s)$ によって書かれた 1×1 の Wilson loop のみからなる Action であることから、その coupling constant を $\beta = 2.3$ とれば coupling space 上での位置は $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = (2.3, 0.0, 2.3, 0.0)$ となり、図中では点線の上にプロットされる。最初の flow は abelian projection によるもので、その後の flow は block spin 変換によるものである。

図 5.4 の上部 $(\beta_1; \text{abelian part}) - (\alpha_1; \text{non-abelian part})$ 平面の flow を見ると残念ながら、5.1 節の図 5.1 で予想したアーベリアンドミナンスは見えていない。しかし、図の下部を見ると分かるように、全ての flow が Effective Action から abelian part をなくす線上でほぼ一致している。これははじめに課されていた系のゲージ固定が Swendsen 流 blocking を課すことによって薄まっていくことを意味するように見える。実際、abelian projection を課した系の二つの link 変数を素朴に乗ずると、適当なゲージ固定を課すことで、一定の約束の下でせつかく $U_\mu(s) = C_\mu(s)u_\mu(s)$ と分離した link 変数を再び交わらしてしまうことになる。つまり全ての flow はゲージ固定を課さなかったものと一致すると考えられる。

とはいえ、これによって flow がほぼ同一の Renormalized trajectory にのるという傾向を示すことができたので、どのようなゲージ固定を系に課しても連続極限においては、同じ物理に従うであろうことが示せた。

一方、第 3 章で示したキャラクター展開の手法によって、ゲージ固定を課さない時には、赤外領域ではアーベリアンドミナンスが解析的に厳密に成り立っているということを考えると、Swendsen 流 blocking によって全ての flow がゲージ固定を課さない系と一致し、物理が等しくなるのであれば、それは間接的にはあるがアーベリアンドミナンスが全てのゲージについて普遍であるということの示唆になるであろう。

また、図 5.5 より Wilson Action の coupling constant β に関する普遍性も見ることができた。

5.5 実際の blocking 変換②～ U(1)blocking ～

ここでもう一度、Swendsen 流 blocking による flow のグラフについて考える。

lattice gauge theory 上において、ゲージ場は lattice の link 上に置かれている。これを

$$U_\mu(s) = C_\mu(s)u_\mu(s)$$

のように対角成分と非対角成分に分解することを考えた。abelian projection とは、この分解した link 変数について非対角部分 $C_\mu(s)$ をいかに分離してゲージ固定するかの操作に相当するとみなすことができる。しかし前節で述べたように、Swendsen 流 blocking のように素朴に二つの link 変数を掛け合わせると、せつかく分離したものが混ざり合ってしまう、そもそもどのように分離したかが分からなくなってしまう。

その結果が図 5.4 であり、図 5.5 であった。

ところで、くりこみ変換の説明において、変換の仕方が一意ではないことは述べた。そこで今度は別の変換による block spin 変換を考えてみる。

ポイントは最初に課しているゲージ固定をできるだけ維持するような変換をするということである。 $SU(2)$ 対称性を持った連続な系において abelian projection を課した後、任意の変換を行ったものを考え、ゲージ場についてその行列成分を顕わに書くと式 (2.7) のようになり、対角成分は $U(1)$ 対称なゲージ場のような変換性を持ち、非対角成分は charged 2 の物質場のような変換性を持つことが分かる。一方、lattice 上の理論においては、このゲージ場を exponential の肩に乗せたものを link 変数とし、これが $SU(2)$ 対称な群の元であることから、Pauli 行列をもとに対角行列と非対角行列に分解できることを 2.1.3 節で示した。すなわち $C_\mu(s)$ とは $SU(2)$ ゲージ場の非対角成分に対応し、 $u_\mu(s)$ とは $SU(2)$ ゲージ場の対角成分に対応する。これより、 $C_\mu(s)$ は charged 2 の物質場のような変換性を、 $u_\mu(s)$ は $U(1)$ ゲージ場のような変換性をえるということが分かる。

ゲージ固定とはこの $C_\mu(s)$ と $u_\mu(s)$ をどのように分けるか⁵ ということを与えているようなものなので、分離するために課したゲージ固定を維持するために、 $C_\mu(s)$ を物質場として、 $u_\mu(s)$ をゲージ場としてそれぞれ別々に block spin 変換を行うことにする。これを $U(1)$ blocking と名付ける。

具体的にはこうである。

lattice 間隔 a から lattice 間隔 $2a$ の系までの block spin 変換を考えると、まず link 変数 $U_\mu(s)$ を $C_\mu(s)$ と $u_\mu(s)$ に分解する。この分解は link 変数がもともと $SU(2)$ の元であるということから

$$U_\mu(s) = X_0(s)I + iX_1(s)\sigma_1 + iX_2(s)\sigma_2 + iX_3(s)\sigma_3$$

$I = \text{単位行列}, \quad \sigma_j = \text{Pauli 行列}$

と書け、非対角行列から $C_\mu(s)$ を、対角行列から $u_\mu(s)$ を導出分解したことから、

$$C_\mu(s) = C_0(s)I + iC_1(s)\sigma_1 + iC_2(s)\sigma_2 \tag{5.5}$$

$$u_\mu(s) = u_0(s)I + iu_3(s)\sigma_3 \tag{5.6}$$

と書けることがわかる。

次に $u_\mu(s)$ を $U(1)$ ゲージ場として、Swendsen 流 blocking の時と同様の block spin 変換 (図 5.3)⁶ によって新しい lattice 間隔 $2a$ の lattice 上の $u'_\mu(s')$ をつくる。 $C_\mu(s)$ は物質場として、図

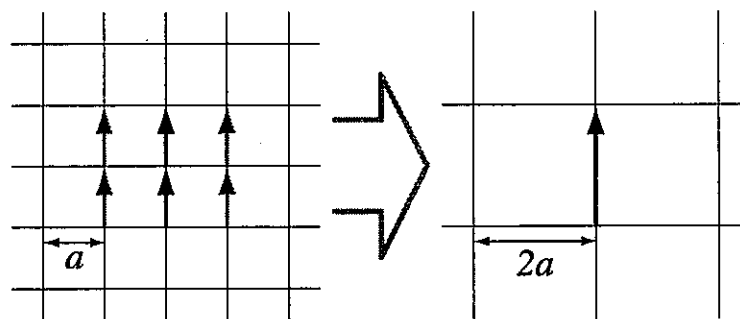


図 5.6: $U(1)$ blocking における blocking

5.6 のように同じ方向を向いた隣り合う $C_\mu(s)$ と $C_\mu(s + \hat{\mu})$ を乗じたものと、これの周囲で最も近

⁵ MA ゲージならば $C_\mu(s)$ をできるだけ小さく、かつ $u_\mu(s)$ をできるだけ大きくする、といったもの

⁶ ウェイト C_0 の値は次節の結果を最も効果的にするような値として $C_0 = C_1 = 1.0$ を選んだ。これは flow のグラフを算出した結果から導いた値である

$$\uparrow = \frac{1}{N} \left(\uparrow + c_1 \sum_{\mu \neq \nu} \boxed{\uparrow} \right)$$

図 5.7: $U(1)$ blocking による新しい link 変数の定義

い位置にあるものを図 5.3 のようにウェイト C_1 で足し合わせたものにとる。 N は規格化因子である。ただしここで注意しなくてはならないのは $C_\mu(s)$ が式 (5.5) で書ける時、これを乗ずると

$$\begin{aligned} C'_\mu(s') &= C_\mu(s)C_\mu(s + \hat{\mu}) \\ &= (C_0(s)I + iC_1(s)\sigma_1 + iC_2(s)\sigma_2)(C_0(s + \hat{\mu})I + iC_1(s + \hat{\mu})\sigma_1 + iC_2(s + \hat{\mu})\sigma_2) \\ &= (C_0(s)C_0(s + \hat{\mu}) - C_1(s)C_1(s + \hat{\mu}) - C_2(s)C_2(s + \hat{\mu}))I \\ &\quad + i(C_0(s)C_1(s + \hat{\mu}) + C_1(s)C_0(s + \hat{\mu}))\sigma_1 \\ &\quad + i(C_0(s)C_2(s + \hat{\mu}) + C_2(s)C_0(s + \hat{\mu}))\sigma_2 \\ &\quad + i(C_2(s)C_1(s + \hat{\mu}) - C_1(s)C_2(s + \hat{\mu}))\sigma_3 \\ &= C'_0(s')I + iC'_1(s')\sigma_1 + iC'_2(s')\sigma_2 + iC'_3(s')\sigma_3 \end{aligned} \quad (5.7)$$

より対角成分 σ_3 の項が出てきてしまう。link 変数の分解の仕方から $C'_\mu(s')$ はあくまでも非対角成分からなるものではなくてはならない。そこで abelian projection を課した系に残っている $U(1)$ 対称性と、 $C_\mu(s)$ が物質場としての変換性を持っていることを利用して、Pauli 行列の σ_3 による $U(1)$ 変換を

$$C''_\mu(s') = e^{-a\sigma_3} C'_\mu(s')$$

のように課す。このときのパラメーター a を σ_3 の項をうまく消すように定めてやればよい。これを計算すると

$$\begin{aligned} C''_\mu(s') &= ((\cos a)I + i(\sin a)\sigma_3)(C'_0(s')I + iC'_1(s')\sigma_1 + iC'_2(s')\sigma_2 + iC'_3(s')\sigma_3) \\ &= ((\cos a)C'_0(s') - (\sin a)C'_3(s'))I \\ &\quad + i((\cos a)C'_1(s') + (\sin a)C'_2(s'))\sigma_1 \\ &\quad + i((\cos a)C'_0(s') - (\sin a)C'_1(s'))\sigma_2 \\ &\quad + i((\cos a)C'_3(s') + (\sin a)C'_0(s'))\sigma_3 \end{aligned} \quad (5.8)$$

で、 σ_3 の項 $((\cos a)C'_3(s') + (\sin a)C'_0(s')) = 0$ となるような a は

$$a = \tan^{-1} \left(-\frac{C'_3(s')}{C'_0(s')} \right) \quad (5.9)$$

となる。この a を式 (5.8) に代入した $C''_\mu(s')$ が、 $C_\mu(s)$ に対してくりこみ変換を行った新しい lattice 上の変数である。

よって $U(1)$ blocking によって作られる新しい lattice 上の link 変数 $U'_\mu(s')$ は

$$U'_\mu(s') = C''_\mu(s')u_\mu(s') \quad (5.10)$$

で与えられる。これが $U(1)$ blocking の具体的計算である。

5.6 U(1)blocking における結果

Swendsen 流 blocking の場合と同様の初期設定でシミュレーションを行った。その結果が図 5.8 と図 5.9 である。

図 5.8 は、lattice size ; 32^4 の lattice において、 $\beta = 2.3$ の Wilson Action を元に Monte-Carlo 法によって 50 個の configuration を発生させた系に、異なるゲージ固定をした系に対して abelian projection を課した時の、また図 5.9 は、lattice size ; 32^4 の lattice において、 $\beta = 2.1$ 、 $\beta = 2.3$ 、 $\beta = 2.5$ の異なる Wilson Action を元にそれぞれ Monte-Carlo 法によって 50 個の configuration を発生させた系に、MA ゲージによるゲージ固定をした系に abelian projection を課した時の、Swendsen 流 blocking による Effective Action の coupling の flow である。

この結果でまず目を引くのが、図 5.8 や図 5.9 の上部において MA ゲージによるゲージ固定をした系では、Swendsen 流 blocking では見えなかった 5.1 節の図 5.1 で予想したアーベリアンドミナンスが非常に顕著に見えているということである。これを見る限り、異なる β においても同じ Renormalized trajectory のついているように見えるので、U(1)blocking は非常にうまく連続理論を作りうるくりこみ変換のように思える。しかし他のゲージ固定を課した系ではアーベリアンドミナンスを MA ゲージほど顕著には見ることはできない。それでも coupling constant の値を見る限りは $\alpha_1 < \beta_1$ を満たしておりアーベリアンドミナンスは十分見えているといえる⁷。問題は図 5.8 の下部を見れば分かるように、異なるゲージ固定を取った系における flow が、同一の Renormalized trajectory にのっているようには見えないということにある。ではゲージ固定に対する普遍性はないのかというと、そう言い切ることはできない。それは、MA ゲージによるゲージ固定をした系以外ではたった一回の blocking によって coupling constant の値が初期値に比べてずっと小さい値に flow してしまうため、系の誤差の影響を大きくうけてしまいその振る舞いをうまく知ることができないのではないかと予測できるからである。

⁷ 実際図中でも全ての flow は $\alpha_1 = \beta_1$ の線よりも下にきている

Lattice size : 32^4 、Wilson Action's coupling constant $\beta : 2.3$ 、

Effective Action : $S_{eff} = \alpha_1 (\square - \square) + \alpha_2 (\square\square - \square\square) + \beta_1 \square + \beta_2 \square\square$

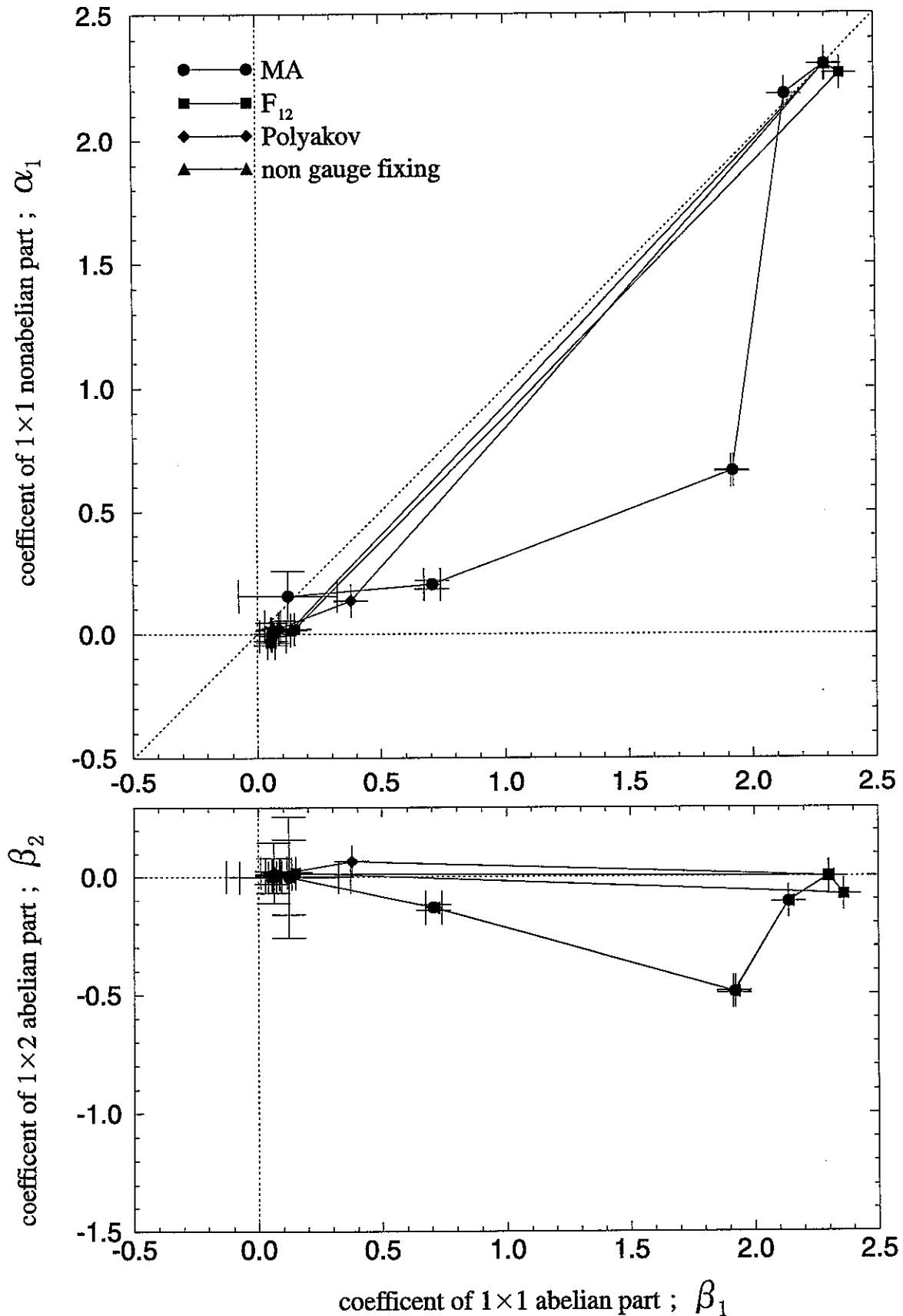


図 5.8: 代表的なゲージ固定をした系のもとでの $U(1)$ blocking による flow

Lattice size : 32^4 , MA gauge fixing

Effective Action : $S_{\text{eff}} = \alpha_1 (\square - \square) + \alpha_2 (\square - \square) + \beta_1 \square + \beta_2 \square$

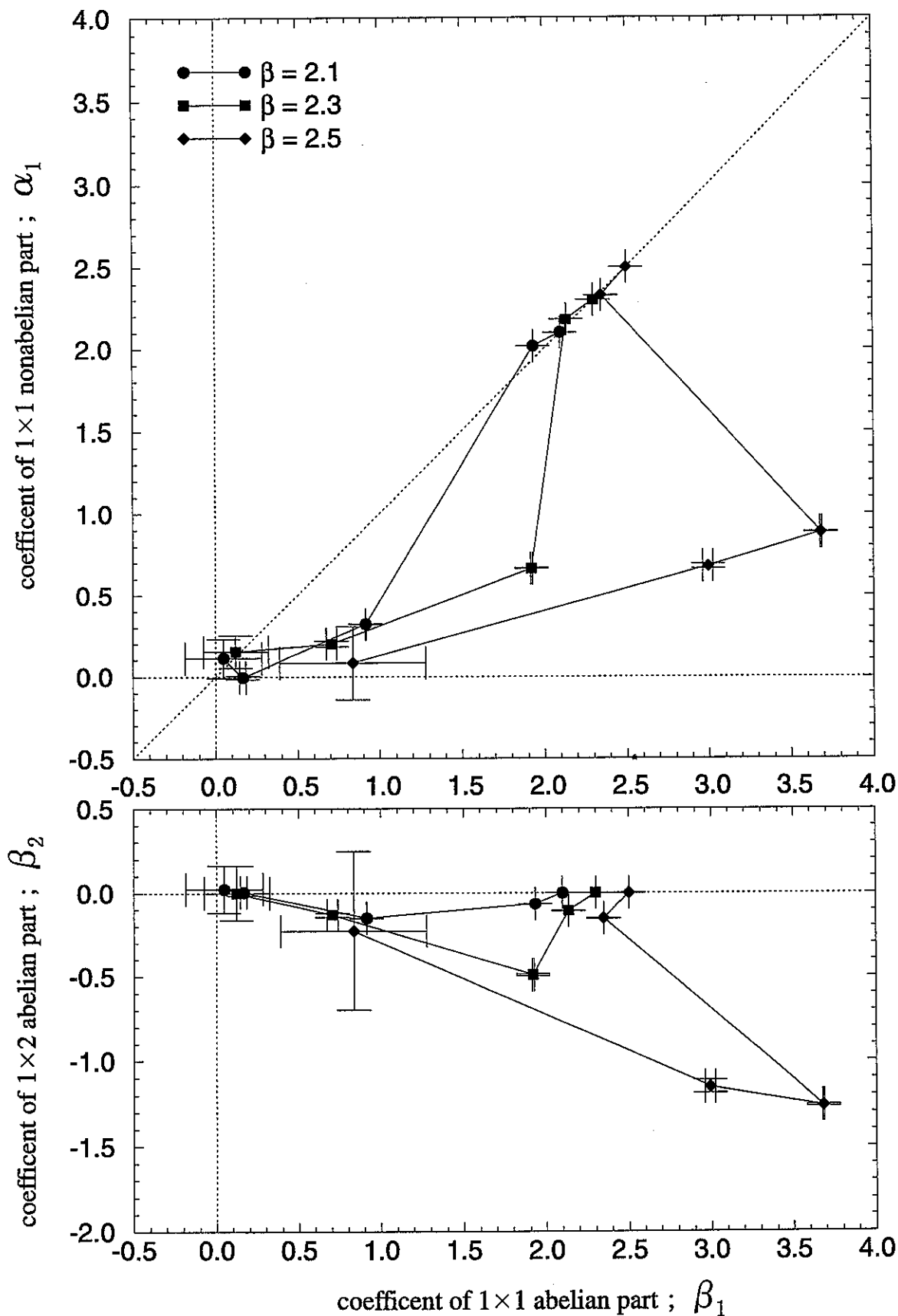


図 5.9: 異なる β の値のもとでの $U(1)$ blocking による flow

第6章 まとめと今後の展望

今回の研究では、QCDにおける閉じ込めをより効果的に理解するための「monopoleのシナリオ」においてその骨子の一つとなるアーベリアンドミナンスについて、 $U(1)$ 有効理論の構築ということをおまえて、abelian projectionを課した系のEffective Actionがabelianに支配的になるかどうかlattice gauge theoryを用いて、数値シミュレーションによって測定した。

ただし我々が知りたいのは連続理論だったので、数値シミュレーションによって導出した系にくりこみ変換(block spin変換)を作用させ、そこから算出したEffective Actionのcoupling constantのcoupling spaceにおけるflowを調べた。

くりこみ変換が決して一意に決まるものではないことから、二種類のくりこみ変換によるflowを調べた。

まずは最も一般的なSwendsen流blockingについて調べた。その結果Effective Action自体がアーベリアンドミナンスとなることはなかったものの、全てのflowがゲージ固定を課さなかった場合のものとはほぼ一致した。ゲージ固定を課さない系においてはキャラクター展開の手法によって、赤外領域では解析的に厳密にアーベリアンドミナンスが示されているため、どんなゲージ固定を取った系であってもそのflowと一致するということ、間接的にはあるがアーベリアンドミナンスがゲージ固定に対し普遍であることを示唆しているように見える。

次に $U(1)$ blockingという系の対角成分と非対角成分を別々にくりこんでいくような変換について調べた。するとMAゲージによるゲージ固定をした系のEffective Actionのflowでは非常に顕著にアーベリアンドミナンスが見えた。また他のゲージ固定を取った系でも少なくともそのEffective Actionはabelianが支配的であろうことがわかった。しかしゲージ固定に対する普遍性については残念ながら見ることはできなかった。その理由はデータの統計性の少なさによるものではないかと推測される。

このことより今後は、見えにくかった $U(1)$ blockingによるcoupling constantのflowを見るために、より大きなlattice size(64⁴?)から測定を開始したり、データの統計性をより多くしたり、あるいはIwasaki ActionなどのImproved ActionによってMonte-Carlo simulationを行う必要があるだろう。

今回の研究によってSwendsen流blockingにおいては、間接的にはあるがアーベリアンドミナンスのゲージ普遍性がいえたことによって、monopoleのシナリオの問題の一つを補完したといえるだろう。そこで次は、アーベリアンドミナンスと同じような問題を持つ、系のabelian部分から抜き出したmonopoleによる有効理論、およびモノポールドミナンスのゲージ普遍性について同様の手法によって調査することが有用だろう。

付録A 逆Monte-Carlo法

～Schwinger-Dyson方程式～

A.1 逆Monte-Carlo法の概要

Monte-Carlo法とは、数値シミュレーションとしてきわめて有効な手法の一つである。

これは、ある物理状態を満たすActionを決めた時、そのActionに従う「系の配位(configuration)」をつくりだすsimulationで、つくりだされたconfigurationから様々な物理量を計算することができるというもの。系の変数(link変数など)をconfigurationとして算出し統計的に扱えるので、lattice上の理論では最も一般的に使用される。

これとは逆方向の操作を行うのがSchwinger-Dyson方程式などの逆Monte-Carlo法と呼ばれるものである。Actionとは系の状態を端的に表現しているものであることから、統計的にActionを満たす系のconfigurationを再現するのがMonte-Carlo法ならば、統計的に存在する適当な系のconfigurationから、そのconfigurationを再現しうるEffectiveなActionを求めるのが逆Monte-Carlo法である。

ここではその中の一つSchwinger-Dyson方程式による方法について説明する¹。

A.2 初期設定

Schwinger-Dyson方程式とは、ある量を測定するために適当なoperatorを設定したとき、その期待値がlink変数の対角成分(abelian部分)による全微分によって恒等的に0になるということから導かれる連立方程式のこと。これによってconfigurationからあらかじめ決めておいたEffective Action形を満たすようなcoupling constantを算出できる。

そのためにEffective Actionの形と、適当なoperatorを設定しなくてはならない。Effective Actionに関しては前節で設定したものを、loopの形ごとに

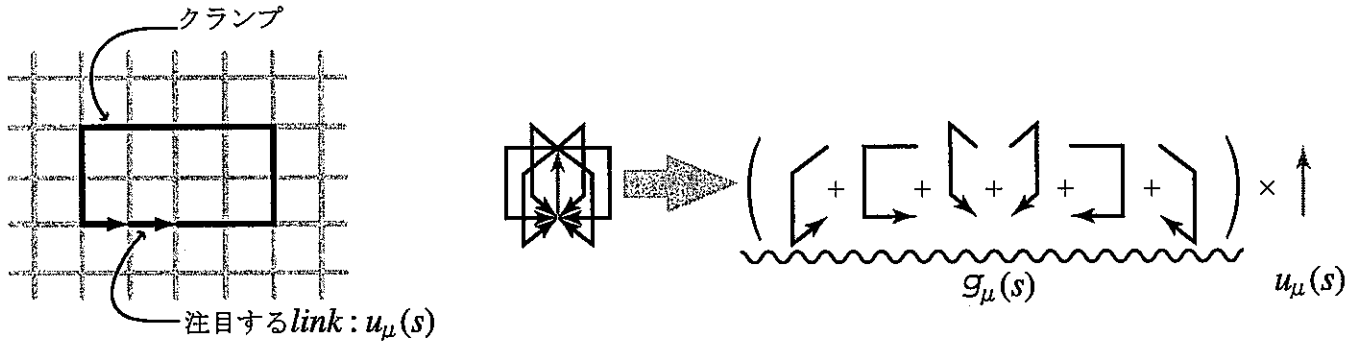
$$\begin{aligned}
 S_{eff}(s) &= a_1 S_{SU(2),1 \times 1}(s) + a_2 S_{SU(2),2 \times 1}(s) + a_3 S_{U(1),1 \times 1}(s) + a_4 S_{U(1),2 \times 1}(s) \\
 &\equiv \sum_{\gamma} a^{(\gamma)} S^{(\gamma)}(s) \\
 a_1 &\equiv \alpha_1, \quad a_2 \equiv \beta_1 - \alpha_1, \quad a_3 \equiv \beta_1, \quad a_4 \equiv \beta_2 - \alpha_2
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

と書き換えたものを用い、operatorに関しては次のように設定したものを用いる。

まず、適当なゲージ固定条件のもとabelian projectionを課した系について、あるsiteにおけるlink変数の対角成分 $u_{\mu}(s)$ に注目する。そのlink変数の周りを回る $N_a \times N_b$ のクランプ²を考え、注目しているlink変数の方向に対し垂直な方向について足しあげたものを g_l とおく。loopループ

¹ 本来ならばこういった手法に関する詳細は巻末の付録に書くべきなのだろうが、Effective Action算出のための肝とも言うべき点なので本文中にのせることにする

² Wilson loopから注目しているlinkを除いたもの



を作るようにこれらをかけあわせたものに σ_3 をかけたもの

$$O(u_\mu(s))^{(\gamma)} = \frac{1}{2} \frac{1}{n} \text{ImTr} [g_l^{(\gamma)} u_\mu(s) \sigma_3] \quad (\text{A.2})$$

これを operator として設定することにする。ただし、注目する link 変数が full の場合には、 $u_\mu(s)$ はそこからさらに abelian 部分を抜き出したものとし、 g_l に abelian 部分を抜き出した後の成分をかけたものとする。

また、 n は operator を 1plaquet あたりの変数にするための規格化因子で、 g_l を導出する際に複数のクランプの和を取ることからくる³。

operator の loop の形は、Effective Action 内で使用している loop と同じ形のものを使用することにし、そのときの loop の形は Effective Action の足 γ と対応させる⁴

A.3 Schwinger-Dyson 方程式の導出

loop の形における operator の期待値は、

$$\langle O(u_\mu(s))^{(\gamma)} \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U O(u_\mu(s))^{(\gamma)} e^{S_{\text{eff}}(U)} \quad (\text{A.3})$$

$$= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U O(u_\mu(s))^{(\gamma)} \exp \left[\sum_{\gamma'} \alpha^{(\gamma')} S(U)^{(\gamma')} \right] \quad (\text{A.4})$$

$$(\text{A.5})$$

と書ける。

ここで、operator の期待値の式を operator で注目した link 変数 $u_\mu(s)$ について

$$u_\mu(s) \longrightarrow u_\mu(s)(1 + i\epsilon\sigma_3)$$

という微小変換を課す。

この時、この微小変換に対して変換される operator の期待値の積分領域は、 $u_\mu(s)$ が abelian の link 変数であることより

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \longrightarrow \int_{-\pi+i\epsilon}^{+\pi+i\epsilon} = \int_{-\pi}^{+\pi} + \int_{+\pi}^{+\pi+i\epsilon} - \int_{-\pi}^{-\pi+i\epsilon} = \int_{-\pi}^{+\pi} + \int_{+\pi}^{+\pi+i\epsilon} - \int_{+\pi}^{+\pi+i\epsilon} = \int_{-\pi}^{+\pi}$$

³ 1×1 の loop の時には、リンクの方向に対して、垂直に交わる 3 方向について正方向の loop と負方向の loop の二つがあることから、 $n=6$

⁴ このように選ばないと実際の算出の時に妥当な値が算出されない

となり不変。また DU はハールメジャーより不変。

そして operator は、

$$\begin{aligned} O(u_\mu(s)) \longrightarrow O'(u_\mu(s)) &= \frac{1}{2} \frac{1}{n} \text{ImTr} \left[g_l^{(\gamma)} u_\mu(s) (1 + i\epsilon\sigma_3)\sigma_3 \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{n} \text{ImTr} \left[g_l^{(\gamma)} u_\mu(s)\sigma_3 \right] + \frac{1}{2} \frac{1}{n} \epsilon \text{ReTr} \left[g_l^{(\gamma)} u_\mu(s) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

と変換される。同様に Effective Action は、

$$\begin{aligned} S_{eff}(U) &= \sum_\gamma \alpha^{(\gamma)} S(U)^{(\gamma)} \\ &= \sum_{(\gamma)} \alpha^{(\gamma)} \text{ReTr} \left[\sum_{\text{site}} \sum_{\mu \neq \nu} U_{\square}^{(\gamma)} \right] \\ &= \sum_{(\gamma)} \alpha^{(\gamma)} \frac{1}{n} \text{ReTr} \left[\sum_{\text{site}} \sum_{\mu} g_l^{(\gamma)} u_\mu(\text{site}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

と書き直すことができ、link 変数 $u_\mu(s)$ について微小変換を行うと、

$$\begin{aligned} S_{eff}(U) \longrightarrow S'_{eff}(U) &= \sum_{(\gamma)} \alpha^{(\gamma)} \left(\frac{1}{n} \text{ReTr} \left[\sum_{\text{site}} \sum_{\mu} g_l^{(\gamma)} u_\mu(\text{site}) \right] + \frac{1}{n} \epsilon \text{ImTr} \left[g_l^{(\gamma)} u_\mu(s)\sigma_3 \right] \right) \\ &= \sum_{\gamma} \alpha^{(\gamma)} S(U)^{(\gamma)} + \sum_{\gamma} \alpha^{(\gamma)} \frac{1}{n} \epsilon \text{ImTr} \left[g_l^{(\gamma)} u_\mu(s)\sigma_3 \right] \\ &= S_{eff}(U) + \frac{1}{n} \epsilon \sum_{\gamma} \alpha^{(\gamma)} \text{ImTr} \left[g_l^{(\gamma)} u_\mu(s)\sigma_3 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

となる。この Action は exponential の肩に乗っており、 ϵ が微小であることから、

$$\begin{aligned} e^{-S_{eff}(U)} \longrightarrow e^{-S'_{eff}(U)} &= e^{-S_{eff}(U) - \frac{1}{n} \epsilon \sum_{\gamma} \alpha^{(\gamma)} \text{ImTr} \left[g_l^{(\gamma)} u_\mu(s)\sigma_3 \right]} \\ &= e^{-S_{eff}(U)} e^{-\frac{1}{n} \epsilon \sum_{\gamma} \alpha^{(\gamma)} \text{ImTr} \left[g_l^{(\gamma)} u_\mu(s)\sigma_3 \right]} \\ &= e^{-S_{eff}(U)} \left(1 - \frac{1}{n} \epsilon \sum_{\gamma} \alpha^{(\gamma)} \text{ImTr} \left[g_l^{(\gamma)} u_\mu(s)\sigma_3 \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

となる。

期待値自身は変換に対して不変なので、これらと合わせて期待値の式は、

$$\begin{aligned} \langle O(u_\mu(s))^{(\gamma)} \rangle &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U \left(\frac{1}{2} \frac{1}{n} \text{ImTr} \left[g_l^{(\gamma)} u_\mu(s)\sigma_3 \right] + \frac{1}{2} \frac{1}{n} \epsilon \text{ReTr} \left[g_l^{(\gamma)} u_\mu(s) \right] \right) \\ &\quad \times \left(1 - \frac{1}{n} \epsilon \sum_{\gamma'} \alpha^{(\gamma')} \text{ImTr} \left[g_l^{(\gamma')} u_\mu(s)\sigma_3 \right] \right) e^{-S_{eff}(U)} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

となる。これを展開整理すると、

$$\langle O(u_\mu(s))^{(\gamma)} \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U \frac{1}{2} \frac{1}{n} \text{ImTr} [g_l^{(\gamma)} u_\mu(s) \sigma_3] e^{-S_{eff}(U)} \\
&\quad + \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U \frac{1}{2} \frac{1}{n} \epsilon \text{ReTr} [g_l^{(\gamma)} u_\mu(s)] e^{-S_{eff}(U)} \\
&\quad - \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U \frac{1}{2} \frac{1}{n} \text{ImTr} [g_l^{(\gamma)} u_\mu(s) \sigma_3] \frac{1}{n} \epsilon \sum_{\gamma'} \alpha^{(\gamma')} \text{ImTr} [g_l^{(\gamma')} u_\mu(s) \sigma_3] e^{-S_{eff}(U)} \\
&= \langle O(u_\mu(s))^{(\gamma)} \rangle \\
&\quad + \epsilon \frac{1}{2} \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U \frac{1}{n} \text{ReTr} [g_l^{(\gamma)} u_\mu(s)] e^{-S_{eff}(U)} \\
&\quad - \epsilon \frac{1}{2} \sum_{\gamma'} \alpha^{(\gamma')} \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U \frac{1}{n} \text{ImTr} [g_l^{(\gamma)} u_\mu(s) \sigma_3] \frac{1}{n} \text{ImTr} [g_l^{(\gamma')} u_\mu(s) \sigma_3] e^{-S_{eff}(U)} \quad (\text{A.11})
\end{aligned}$$

となり、この式が成立するためには、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U \frac{1}{n} \text{ReTr} [g_l^{(\gamma)} u_\mu(s)] e^{-S(U)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\gamma'} \alpha^{(\gamma')} \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U \frac{1}{n} \text{ImTr} [g_l^{(\gamma)} u_\mu(s) \sigma_3] \frac{1}{n} \text{ImTr} [g_l^{(\gamma')} u_\mu(s) \sigma_3] e^{-S(U)} \quad (\text{A.12})
\end{aligned}$$

とならなくてはならない。

A.4 SU(2) の元上での Schwinger-Dyson 方程式

式 (A.12) より、Schwinger-Dyson 方程式の両辺は、それぞれ loop の期待値を求める形をしていることが分かる。これを SU(2) 対称性を持つ lattice 上の理論に具体的に適用することを考える。

link 変数が SU(2) 群の元をなすことから、4つ (1×1 の Wilson loop のとき) の link 変数の積である loop もまた SU(2) の元である。これより link 変数を SU(2) の元 of the form で書き下すと

$$U_{link}(s, l, i) = X_{0:link}(s, l, i) I + i X_{j:link}(s, l, i) \sigma_j \quad (\text{A.13})$$

となり、したがって loop もまた

$$\begin{aligned}
U_\square &= U_{link}(s, l, i) U_{link}(s + i\hat{l}, k, j) U_{link}^\dagger(s + i\hat{l} + j\hat{k}, l, i) U_{link}^\dagger(s + j\hat{k}, l, j) \\
&= X_{0:\square} I + i X_{j:\square} \sigma_j
\end{aligned}$$

となる。

ここで loop についてトレースをとると

$$\text{Tr} [X_{0:\square} I + i X_{j:\square} \sigma_j] = 2X_{0:\square} \quad (\text{A.14})$$

$$\text{Tr} [(X_{0:\square} I + i X_{j:\square} \sigma_j) \sigma_3] = 2X_{3:\square} \quad (\text{A.15})$$

となるので、Schwinger-Dyson 方程式は

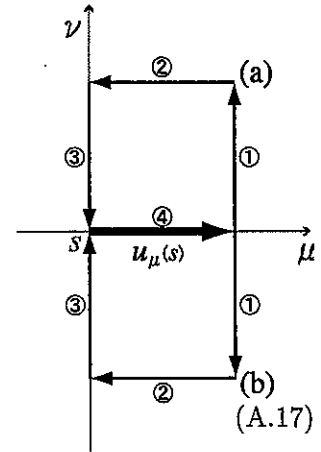
$$\langle X_{0:\square}^{(\gamma)} \rangle = \sum_{\gamma'} \alpha^{(\gamma')} \langle X_{3:\square}^{(\gamma)} X_{3:\square}^{(\gamma')} \rangle \quad (\text{A.16})$$

と書くことができる。

ただし Schwinger-Dyson 方程式の両辺における $g_l^{(\gamma)} u_\mu(s)$ と $g_l^{(\gamma)} u_\mu(s) \sigma_3$ は、 $g_l^{(\gamma)}$ を link 変数 $u_\mu(s)$ に対応するクランプの和と定義したので、例えば 1×1 の loop の場合、右図のように (a) の loop と (b) の loop の和を取り、規格化因子である $\frac{1}{2}$ をかけたものの期待値が $\langle X_{0;\square}^{(\gamma)} \rangle$ や $\langle X_{3;\square}^{(\gamma)} X_{3;\square}^{(\gamma)} \rangle$ になる。

また $g_l^{(\gamma)} u_\mu(s) \sigma_3$ という形で link 変数をつま抜き出して、それに σ 行列をかけているので、特に full の link 変数を考えている場合は link 変数をかける順番に注意しなくてはならない。すなわち

$$X_{0;\square} I + i X_{3;\square} \sigma_j = g_l^{(\gamma)} u_\mu = U_{(1)} U_{(2)} U_{(3)} U_{(4)} \tag{A.17}$$



のようになる。

式 (A.16) は設定したオペレーターの数だけ成り立つ方程式なので、これらに Monte-Carlo 法で算出した configuration の期待値を代入して連立方程式を立てる。これを解けば、Effective Action の coupling constant の値を算出できる。

これを、くりこみ変換を順次行っていった系の configuration に対して行えば、Effective Action の coupling constant の長距離極限への flow を知ることができる。

関連図書

- [1] 久後汰一郎, ゲージ場の量子論 II (培風館) P165
- [2] G.'t Hooft Nucl. Phys. B190 (1981) 455-478
- [3] T.Suzuki and I.Yotsuyanagi, Phys. Rev. D42 (1990) 4257, Nucl. Phys. B (Proc.Suppl.) 20 (1991) 236
- [4] H.Shiba and T.Suzuki Phys. Lett. B333 (1994) 461 ; Phys. Lett. B343 (1995) 315 ; Phys. Lett. B351 (1994) 519
- [5] 岩崎洋一, 物理学最前線 11 格子ゲージ理論 (共立出版) P81
- [6] T.Suzuki, Nucl. Phys. B (Proc.Suppl.) 30 (1993) 176-183
- [7] E.P.Wigner, 群論と量子力学 (吉岡書店)
- [8] S.Elitzur, Phys. Rev. D12 3978-3982 (1975)
- [9] 大川正則, Wilson 流くりこみ群 (夏の学校講義録)
- [10] O.Miyamura et al, Nucl. Phys. B577 (2000) 263-278

謝辞

この論文を書くに当たって、何は無くとも、まずは母に感謝したい。あなたのおかげで私は今この論文を仕上げることができたのです。次に、実家とは遠く離れた地に住んでいるため母の力に余りなれない私に代わって、母を支えてくれた弟たちに（逆に迷惑をかけているような気もしないではないが、何かあった時には私よりはよっぽど役に立つだろう。それにちゃんと就職もしているし……）。また働きに出ている母に代わって家事をしている祖母にも、あなたがいなければ帰る家をごみためになっていたでしょう。米寿、白寿と長生きしてください。

指導教官の鈴木先生には丁寧な指導をいただきました。共同研究者であるD1の伊藤さんには、まさに公私にわたりお世話になりました。あなたがいなければ途方にくれていたでしょう。共同研究者の北原さんや他のスタッフ方々、研究室の方々にもいろいろとお世話になりました。不躰ではありますがここでお礼を述べさせていただきます。

今回、この論文の製作中、操作を誤って数値シミュレーションのデータを消してしまうということがありました。そうこれまでの研究成果の全てをです。途方にくれるしかなかった私を救ってくれたのが研究室の新バックアップ体制です。前日までのデータがバックアップとして残っていたため、何とか事なきをえました。バックアップ体制を作ってくれた出淵さん本当にどうもありがとうございます。そして最後に大学入学後になくなった父に……。私は私なりにできることを、無理をしすぎずにがんばっていこうと思っています。そう再び出会うその日まで……（でも本当に出会うんでしょうかねえ？）

アーベリアンドミノナンスの ゲージ普遍性について

2000年12月2日

金沢大学自然科学研究科 森 祥寛

金沢大学理学部 鈴木 恒雄

金沢大学自然科学研究科 伊藤 祥一

十文字学園 北原 俊一

QCD、クォークモデルと閉じ込め

クォーク

- ハドロンを構成する、現在、最も素といわれる粒子のひとつ。
- 元は、群論によるハドロン分類のための数学的道具として導入。
- パウリの排他律を回避するために導入されたカラーの自由度の対称性より、強い相互作用を媒介するグルオン場が導出された。

⋮

三体のクォークの組 (qqq ; バリオン)、もしくはクォーク・反クォークの対 ($q\bar{q}$; メソン) の形でしか現れない。

閉じ込め問題

QCD (量子色力学)

- 強い相互作用を記述する力学系。
- その相互作用は、カラーの自由度の対称性を元に導出された非可換ゲージ場によってあらわされるグルオンが担う。
- カラーの自由度を運ぶグルオンは、その対称性が非可換であることから自己相互作用を行い、それゆえ漸近自由性を自然に導出する。

⋮

閉じ込め理解へ向けて

大目標

QCD(クォークモデル)における大きな問題のひとつである「クォークの閉じ込め現象」について、その発生のメカニズムをダイナミカルに理解したい。

取り扱いについての問題点

- QCD が扱うのは強い相互作用なので、ラグランジアン中の相互作用項の結合定数の値が大きく、QED などでも大な成功を収めてきた摂動論的手法を用いることができない。

解析的取り扱いが難しい。

← 格子理論を用いた、コンピュータシミュレーションなどによる数値的な解析
非摂動論的手法の導入、開発が必要。

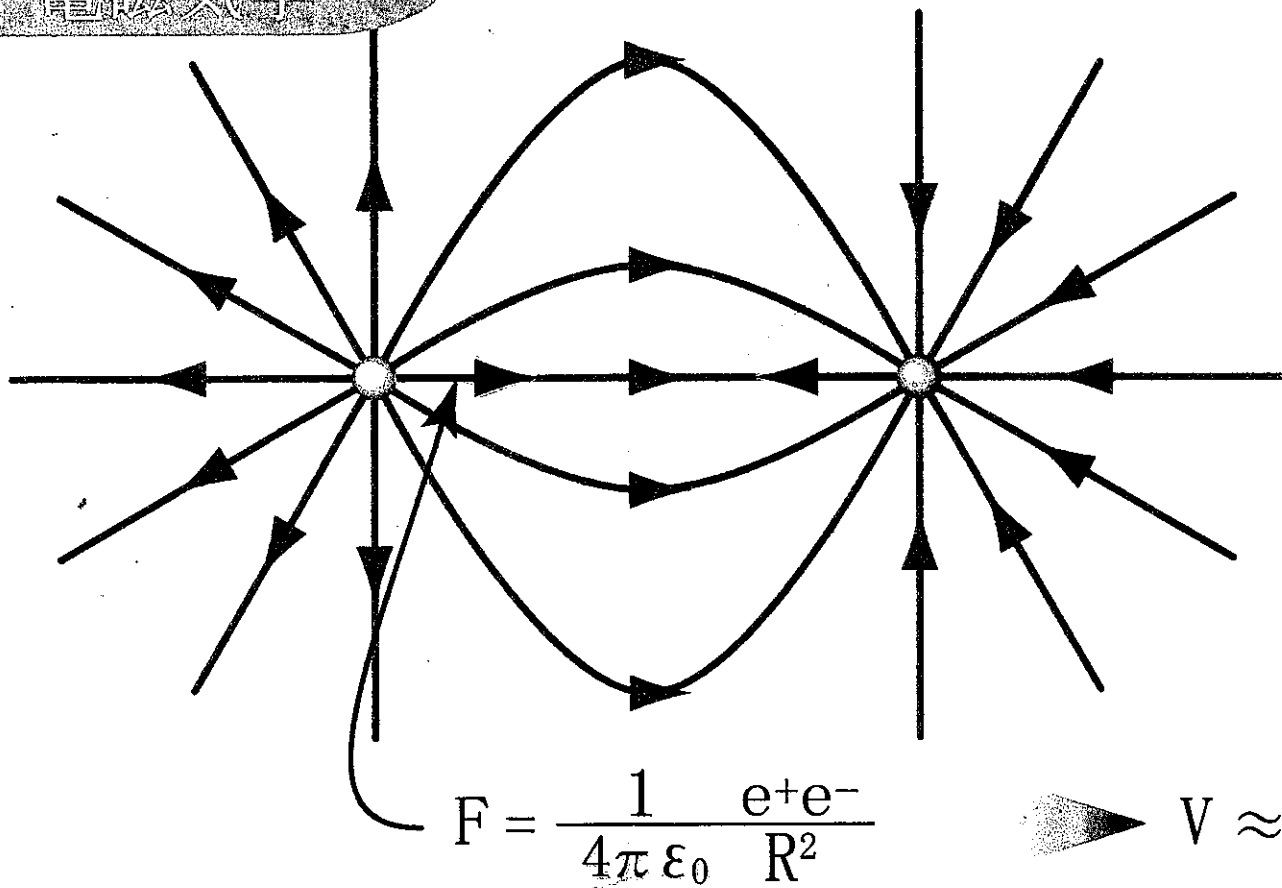
- 非可換ゲージ場からなる理論。

相互作用を媒介する粒子(グルオン)が自己相互作用をもつ。

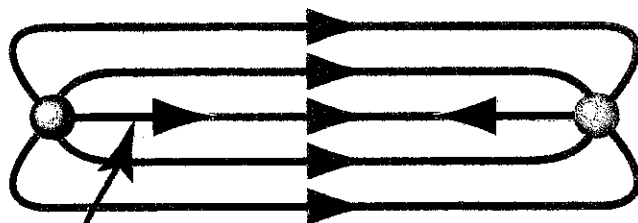
- その他、もろもろ。

閉じ込め理解への描像の構築

電磁気学



QCD



$$F = \alpha R^\delta$$

($\delta \geq 0$)

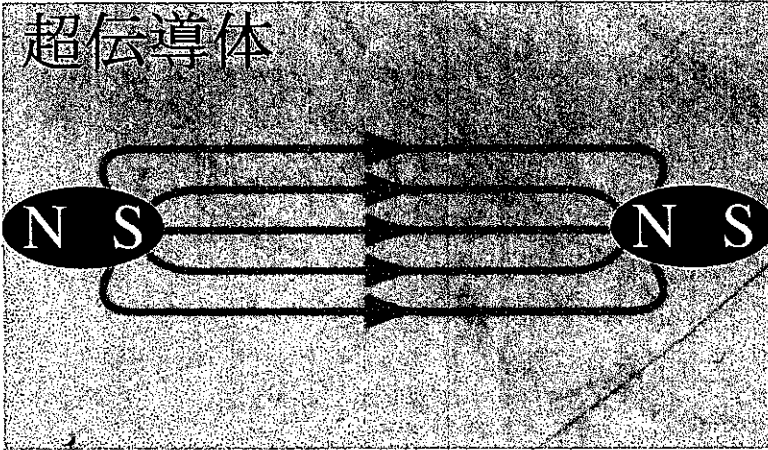
▶ $V \approx R^{\delta+1}$

どのような時に、(カラー)電場は絞られるのか？

閉じ込め理解への描像の構築

超伝導とマイスナー効果

超伝導体



$$B = \mu_0(1 + \chi)H = 0$$

B: 磁場中の超伝導体内の磁束密度

H: 外部磁場

χ : 超伝導体の磁化率

μ_0 : 真空の透磁率

$$\chi = -1$$

超伝導体は反磁性

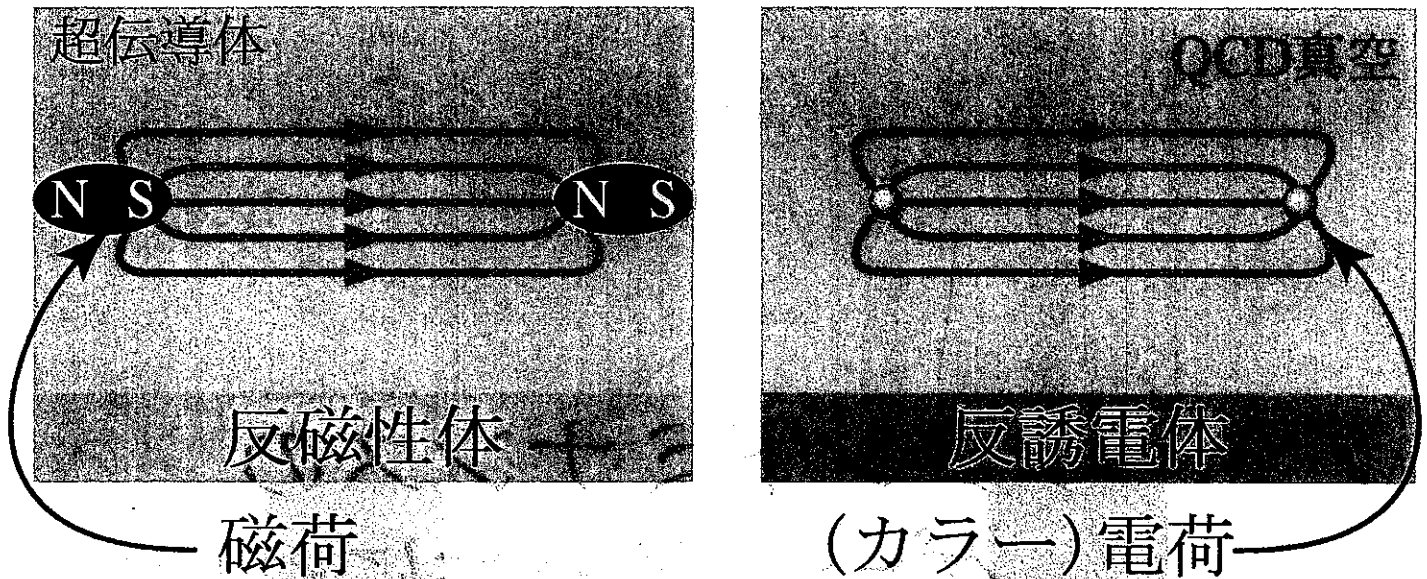
超伝導体内に磁荷を置くと、磁荷間の磁束が絞られる。

もし、QCDで取り扱われる真空（ハドロン内部）が、超伝導体と同等の性質を持つのであれば、QCD真空中に置いたカラー電荷間の電場も絞られると考えられるのではないかな？

また、閉じ込めを起こすような真空の生成についても、常伝導体が超伝導体となるプロセスを考えることで理解できるのではないかな？

閉じ込め理解への描像の構築

マイスナー効果とのアナロジー



電子のクーパー対の凝縮によって生成

モノポール(単磁荷)？の凝縮によって生成？

QCDにおいて、クォークはカラー電荷を持ち、それらの間の電束(電場)が絞られる。

カラー電荷と双対な磁荷を持つもの(モノポール)があり、それが凝縮(縮退)することによって、QCD真空にマイスナー効果のようなものを起こしている。

取り扱いについての問題点

- QCD ゲージ場によって電束があらわされるが、QCD ではゲージ場の対称性が $SU(2)$ や $SU(3)$ の非可換な対称性を持つこと。
- モノポールをいかに定義するか。

Abelian Projection

任意のオペレーター $X(A_\mu)$ を対角化するような $SU(N)$ の群の元を用いて行われるゲージ固定。

$SU(N)$ 対称な系を $U(1)^{N-1}$ な系になるように部分ゲージ固定を行う。

※以降簡単のため、 $SU(2)$ で考える。

$X(A_\mu)$ を対角化する $SU(2)$ の元を G とする。

$$G(x) X(x) G^\dagger(x) = X^G(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) \end{pmatrix}$$

ここで

$$d(x) = \begin{pmatrix} e^{i\theta(x)} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta(x)} \end{pmatrix}$$

を考えると、 $d(x) G(x)$ もまた $SU(2)$ であり $X(x)$ を同様に対角化させる。

$G(x)$ は一意に定まらず、 $d(x)$ の行列成分である $U(1)$ の不定性が残る。

これを用いてゲージ場を変換すると

$$A_\mu(x) \Rightarrow \mathcal{A}_\mu(x) = G(x) A_\mu(x) G^\dagger(x) - \frac{i}{g} \{ \partial G(x) \} G^\dagger(x)$$

この $\mathcal{A}_\mu(x)$ に対して任意の $SU(2)$ 変換による変換性を調べると

$$\mathcal{A}_\mu(x) \Rightarrow \mathcal{A}_\mu^W(x) = d_W(x) \mathcal{A}_\mu(x) d_W^\dagger(x) - \frac{i}{g} \{ \partial d_W(x) \} d_W^\dagger(x)$$

同様にクォーク場（物質場）も

$$\phi^G(x) = G(x) \phi(x) \Rightarrow d_W(x) \phi(x)$$

Monopoleの導出

いかにモノポールを考えるか

電磁気学的に考える。

$$\text{電流 ; } j_\mu = (\rho_e, \vec{j})$$

$$\text{磁流 ; } k_\mu = (\rho_m, \vec{k})$$

マクスウェルの方程式より、

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = j_\nu$$

$$\partial_\mu F^*_{\mu\nu} = k_\nu$$

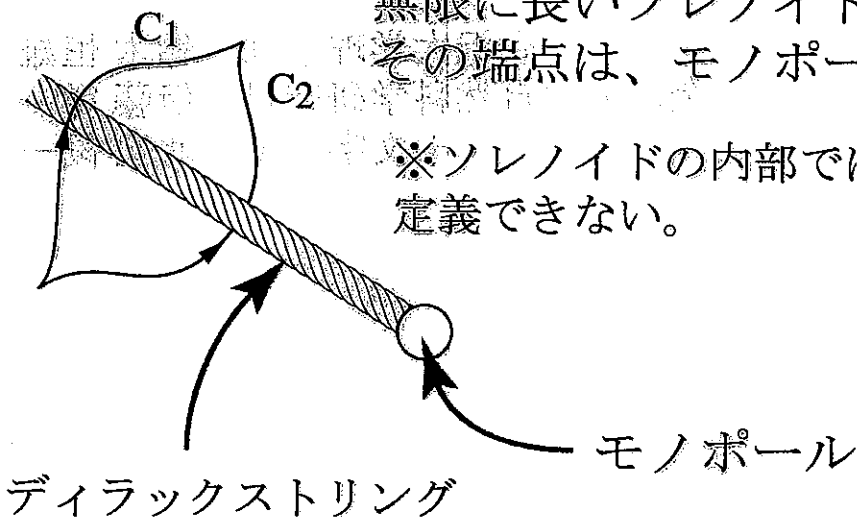
$$F^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

素朴には磁気単極子(モノポール)は存在しない。

▶ 4次元時空中に、特異な点は存在しない。

無限に長いソレノイドを考えたとき、
その端点は、モノポールとみなすことができる。

※ソレノイドの内部では、ベクトルポテンシャルを
定義できない。



Monopoleの導出

QCDでのモノポール

アーベリアンプロジェクションを課したQCD真空中では、ゲージ場 $A_\mu(x)$ に線状の特異な状態が存在する。

まず、 $G(x)$ を $G(x) = e^{(i\alpha_1\sigma_1 + i\alpha_2\sigma_2)}$ とパラメトライズする。

次に、 $Y(x) = G^\dagger(x) \sigma_3 G(x) = Y^a(x) \sigma^a$ を定義する。

$$\begin{aligned} \text{ただし、 } Y^a(\theta, \phi) &= (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta) \\ &= (Y^1(x), Y^2(x), Y^3(x)) \end{aligned}$$

$$\sum_a Y^a(x)^2 = 1$$

ゲージ場の対角成分 $A_\mu^3(x)$ は、任意の $SU(2)$ 変換によって photon のように変換することから field strength を

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^3(x) - \partial_\nu A_\mu^3(x)$$

と定義できる。

このアーベリアンプロジェクション後のゲージ場 $A_\mu^3(x)$ を、元のゲージ場 $A_\mu(x)$ であらわすと、

$$\begin{aligned} A_\mu^3(x) &= \text{Tr}[\sigma^3 A_\mu(x)] \\ &= g_\mu - \frac{1}{g} \frac{1}{1+\gamma^3} \epsilon_{3abc} Y^a \partial_\mu Y^b \\ &\quad (g_\mu = \text{Tr}[Y A_\mu(x)]) \end{aligned}$$

$A_\mu^3(x)$ は field strength $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ と

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{g} \epsilon_{abc} Y^a \partial_\mu Y^b \partial_\nu Y^c$$

$$\therefore k^\nu = \frac{1}{2} \partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho + h_{\rho\sigma})$$

Monopoleの導出

QCDでのモノポール

$A_\mu(x) \Rightarrow$ 特異な点がない.

$$\Rightarrow k^\nu = \frac{1}{2} \partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} h_{\rho\sigma}$$

$\underbrace{\quad}_{Y^a \text{ 依存}}$

$\underbrace{\quad}_{G(x) \text{ で定義}}$

$G_{\alpha\beta}$: X を対角化した行列.

$$XG = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = G(x) X G^\dagger(x)$$

$\rightarrow G$ は-実的=定まらぬ.

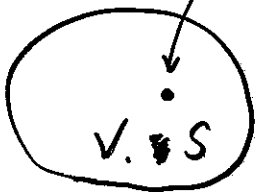
$$XG_1 = 0, XG_2 = 0, XG_3 = 0$$

\Rightarrow 世界線とあわさる (3次元的=点)

磁荷密度 $k_0 = \frac{1}{2e} \partial^i (\epsilon_{ijk} \partial_a c Y^a \partial_j Y^b \partial_k Y^c)$

$a=0$
Singular

Singular



$$g_m = \int_V k_0 d^3x$$

$$= \frac{1}{2e} \int_S Y^a \partial_j Y^b \partial_k Y^c ds_i$$

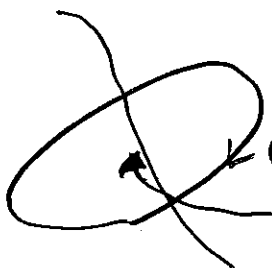
$\alpha = \alpha(\zeta_1, \zeta_2)$ 2 "パラメータ" 33.

\downarrow 対称.

$$Y(\theta, \phi)$$

$$\rightarrow g_m = \frac{1}{e} \int_S \sin\theta d^2\zeta$$

$$= \frac{1}{e} 4\pi m.$$



Singular 内の Y のパラメータ $=(\theta, \phi)$ は.

$2m$ 倍の ~~不定性~~ 自由度.

DGL理論の導出、 およびDAHM構築の流れ

SU(2), SU(3) Gauge Field

Abelian Projection

U(1) Gauge Field

Monopoleの導出

磁荷の流れとしてディラックストリングを捉え、その端点にモノポールを考える。

Monopole カレント

場を統計的に捉え、場の理論と統計力学との関係を用いて、直観的な方法で相対論的な場の理論への書き換えをする。

Monopole場とデュアルなゲージ場

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + |D_\mu + i g B_\mu \phi|^2 - \lambda (|\phi|^2 - \eta^2)^2$$

\uparrow
 > 0 質量
 B_μ は massive

古典論の範囲で見ると、Nielsen-Olsen vortex と呼ばれるソリトン解を持つ。

この解のふるまいを見ると、超伝導体における電子系の波動関数と同様のふるまいをする事がわかる。

Introduction

はじめ

QCDにおける長距離領域での問題

長距離領域での有効理論の確立

- DGL理論
- Dual Abelian Higgs Model

- hep-ph/0011165 : Y. Koma, E.M. Ilgenfritz (Osaka U., Res. Ctr. Nucl. Phys.), T. Suzuki (Kanazawa U.), H. Toki (Osaka U., Res. Ctr. Nucl. Phys.).
- Phys.Rev.D62:054027,2000 : Yoshiaki Koma, Hiroshi Toki (Osaka U., Res. Ctr. Nucl. Phys.).

monopoleのシナリオ

SU(2) 非可換ゲージ場 : $U_\mu = C_\mu \times u_\mu$

abelian projection

部分ゲージ固定

部分ゲージ固定された場 : $C_\mu \times u_\mu$

U(1) abelian部分の抜き出し

アーベリアンドミナンス

abelian部分のゲージ場 : u_μ

abelianの有効作用の決定

monopoleの抜き出し

モノポールドミナンス

monopole場 : $n_{\mu\nu}$

monopoleの有効作用の決定

DGL理論の構築
物理の理解へ

仮定

MA ゲージで固定した非可換ゲージ場 U_μ については、数値計算によって赤外領域の物理量がほぼ90%再現されていることから、A.D. およびM.D. は示されている。

Introduction

アーベリアンドミナンス

$$Z = \int \mathcal{D}U e^{-S[U]} \delta(X^\pm) \Delta_{FP}$$

A.P. \rightarrow

$$Z = \int \mathcal{D}u \left\{ \int \mathcal{D}C e^{-S[C,u]} \delta(X^\pm) \Delta_{FP} \right\}$$
$$U_\mu = C_\mu \times u_\mu$$
$$= \int \mathcal{D}u e^{-S_{eff}[u]}$$

Effective Action

$$S_{eff} \equiv \alpha \text{ (non-abelian)} + \beta \text{ (abelian)}$$

という形のを考えた時、*abelian projection* をした系において、数値 *simulation* によってその係数を算出した際に

$$\beta \gg \alpha$$

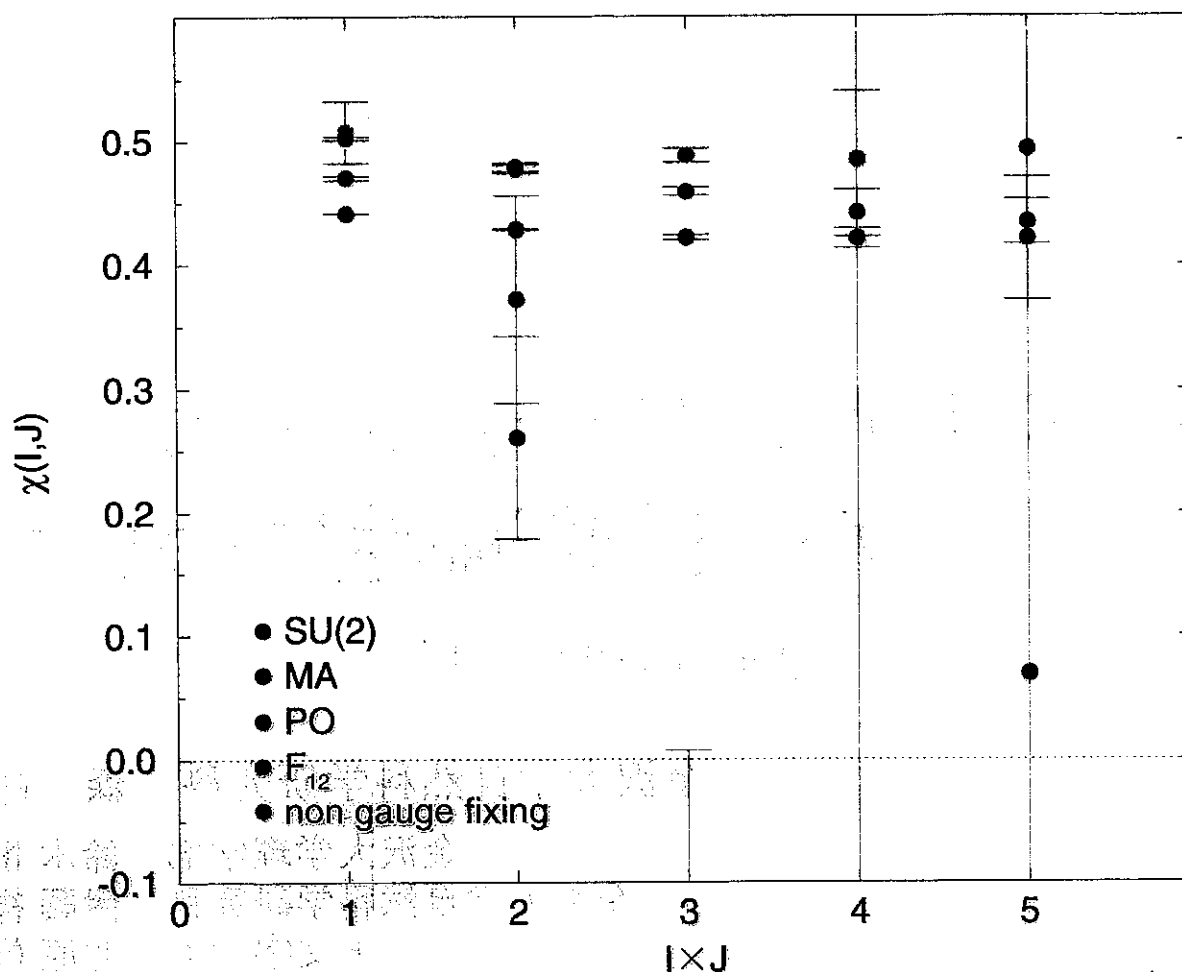
であれば、それを「*Action* レベルでのアーベリアンドミナンスが見えている」ということにする。

この *Effective Action* の算出をいくつかのゲージ固定条件のもとでおこない、アーベリアンドミナンスがあらゆるゲージのもとで普遍に起こりうるかどうかを調べ、連続極限での *Effective Action* のゲージ普遍性について調査する。

Introduction

●アーベリアンドミナンスの例

MAゲージ下における *Croutz Ratio* の振る舞い



lattice size ; 16^4 , $\beta = 2.1$

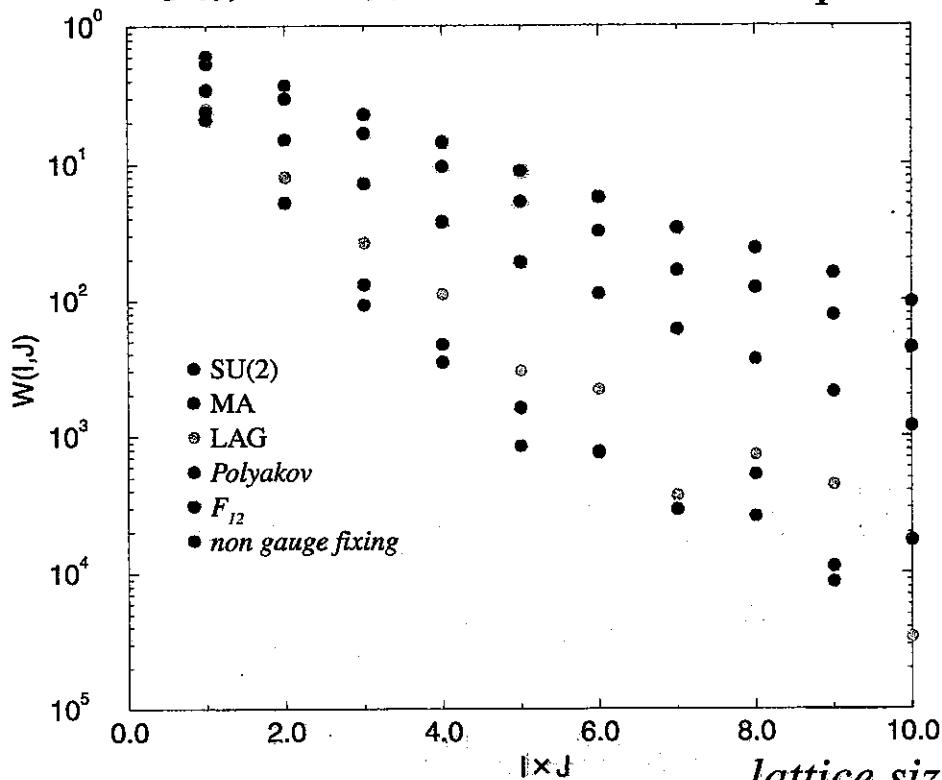
アーベリアンドミナンスの問題点

特定のゲージ条件のもとでしか、物理量の値やその振る舞いなどをキレイに見ることができない。

モノポールのシナリオ自体が、特定のゲージ条件のもとでしか成り立たない、ゲージに依存した理論？

A.D.のゲージ普遍性を信じる根拠

★いくつかのゲージ固定条件のもとで抜き出した *abelian link* 変数から算出した *Wilson loop* の値



lattice size ; 16^4 , $\beta = 2.1$

MA ゲージ以外のゲージ固定条件では、*Wilson loop* の値が小さいためにこの値をもとに算出する物理量は、誤差の中に埋もれてしまい、その値や振る舞いを知ることは難しい。

しかし最も小さい値を持つゲージ固定条件がなしの場合は「キャラクター展開」という手法によって解析的にアーベリアンドミナンスが示されている。

最も小さい値を持つ条件の時にアーベリアンドミナンスが言えているので、それ以上の大きさの *Wilson loop* の値を持つ他のゲージ固定条件でもアーベリアンドミナンスがいえるであろうことがわかる。従って、そのアーベリアンドミナンスの振る舞いを調べれば、ゲージ普遍性についても調べることができるだろう。

キャラクター展開

★ Elitzurの定理 :

ゲージ固定をしない時、ある演算子 O のゲージ不変部分 O^{inv} だけが O の期待値に寄与する。もともとの演算子がゲージ不変でなくともこの定理に基づいて

$$O = O^{inv} + O^{var}$$

としてゲージ不変な部分を抜き出すことができる。

➡ こうして抜き出した演算子は、ゲージ変換の既約表現に対して指標（キャラクター）によって展開できる。

☆ *abelian projection* によって得られる *abelian Wilson loop* について、Elitzurの定理を考える

$$W_A^{inv}[C] = \int \mathcal{D}g \operatorname{Tr} \left[\prod_C g(s) u_\mu(s) g^\dagger(s+\hat{\mu}) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_j a_j \chi_j \left(\prod_C U_\mu(s) \right)$$

abelian Wilson loop : $W_A[C] = \operatorname{Tr} \left[\prod_C u_\mu(s) \right]$

SU(2) Wilson loop : $W_{SU(2)}[C] = \operatorname{Tr} \left[\prod_C U_\mu(s) \right]$

$$\begin{aligned} \langle W_A[C] \rangle &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U e^{-S} W_A^{inv}[C] \\ &= \sum_j a_j \langle W_{SU(2)}[C] \rangle_j \\ &= 2 \left(\frac{2}{3} \right)^{P(C)} \langle W_{SU(2)}[C] \rangle_{1/2} + \langle \text{another rep.} \rangle \end{aligned}$$

※ β が小さく、 $j=1/2$ の時には強結合展開の結果と一致する。

☆ これより *abelian* 部分によってストリングテンションなどを厳密に導くことがわかる。

- ➡ アーベリアンドミナンスが解析的に示すことができた。
- ➡ ゲージ固定条件が課されていると、計算が複雑になり解くことが難しい。

Lattice上のActionと

連続極限(くりこみ群の方法)

QCD

強い相互作用を示す理論であり、相互作用項の *coupling constant* が大きいいため、摂動計算が使えない。

lattice

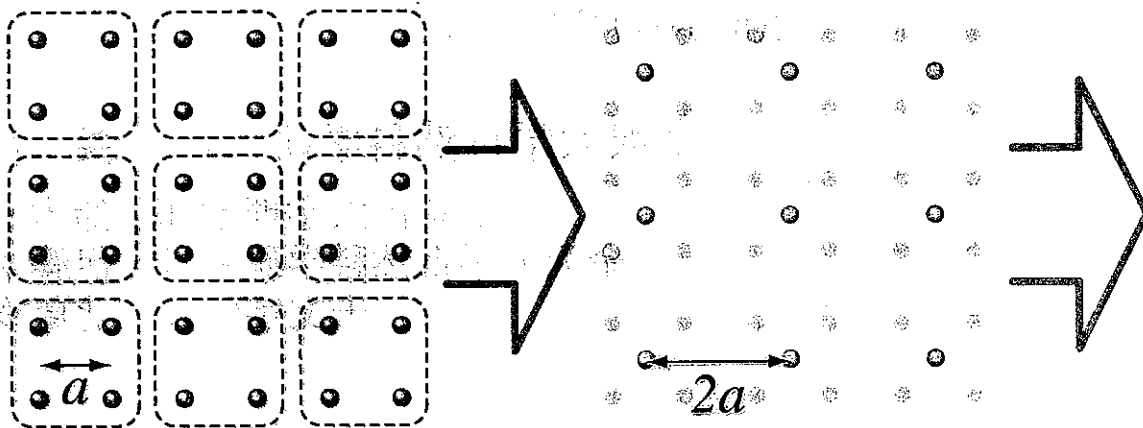
(格子 Gauge 理論)

運動量に紫外の *cut off* を入れる操作であり、これによって統計性との対応がとれ、*operator* を数として扱えるようになる。しかし連続的な回転対称性や並進不変性が失われ、現実の系とは異なったものになる。

実際の物理を知るためには

くりこみ群の方法による極限をとる操作が必要

block spin 変換 *lattice* 上のいくつかの変数を平均化し、新たな変数を新たな *lattice* 上に定義する。



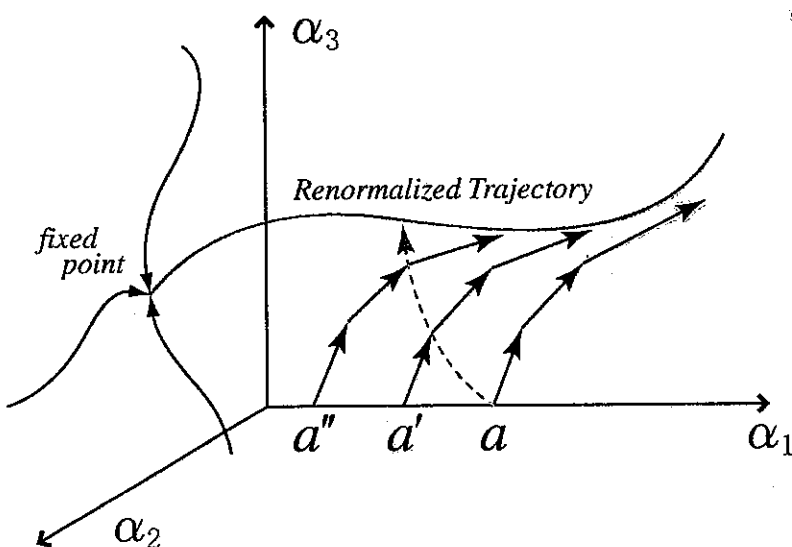
lattice 間隔を a として、ある物理的なスケール

$$b = 2^n a$$

について、これを固定して $n \rightarrow \infty$ を考えると(左図緑線)、

$$a = \frac{b}{2^n} \rightarrow 0$$

という操作を実行できる。



実際の方法

abelian projection をした後の、U(1) 不変な *Effective Action* の形を

$$S_{\text{eff}} = \underbrace{\alpha_1 (\square - \square) + \alpha_2 (\square - \square)}_{\substack{\text{abelian以外の部分が} \\ \text{少しでも入っている項} \\ \equiv \text{"non-abelian part"}}} + \underbrace{\beta_1 \square + \beta_2 \square}_{\substack{\text{abelianの部分のみで} \\ \text{書かれる項} \\ \equiv \text{"abelian part"}}$$

$$\square = \frac{1}{4} \sum_{\mu \neq \nu} \sum_s \text{Tr}[U_{\square} + U_{\square}^{\dagger}]$$

$$\square = \frac{1}{4} \sum_{\mu \neq \nu} \sum_s \text{Tr}[u_{\square} + u_{\square}^{\dagger}]$$

と定め、数値計算によって *coupling constant* を決める。

SU(2) Pure Gauge Field

Wilson Action : $S_W = \frac{1}{4} \beta \sum_{\mu \neq \nu} \sum_s \text{Tr}[U_{\square} + U_{\square}^{\dagger}]$

Monte-Carlo simulation

configuration

abelian projection

- ・MAゲージ
- ・F₁₂ゲージ
- ・Polyakovゲージ
- ・ゲージ固定なし (ラプラシアンゲージ)

configuration {U}

Schwinger-Dyson equation

couplings g₁, g₂

block spin trns.

configuration {U}

Schwinger-Dyson equation

couplings g₁, g₂

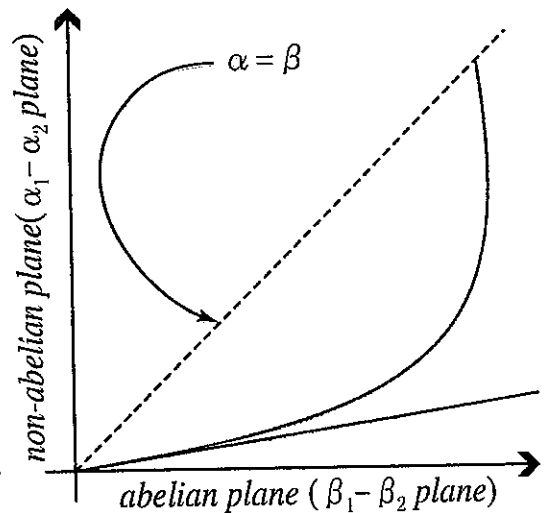
block spin trns.

configuration {U}

Schwinger-Dyson equation

couplings g₁, g₂

block spin trns.

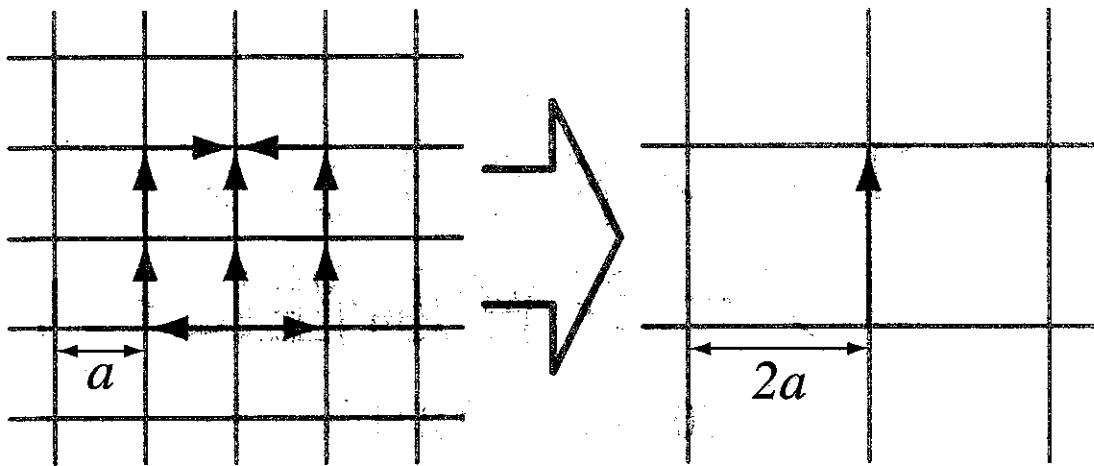


block spin 変換①

(Swendsen 流 blocking)

★ Swendsen 流 blocking

lattice ゲージ理論において最も一般的な *blocking* 方法で隣り合う 2 本の *link* 変数とその周囲を回る *link* 変数を、そのゲージ変換性を変えないように足し合わせ、新しい *link* 変数としたもの。



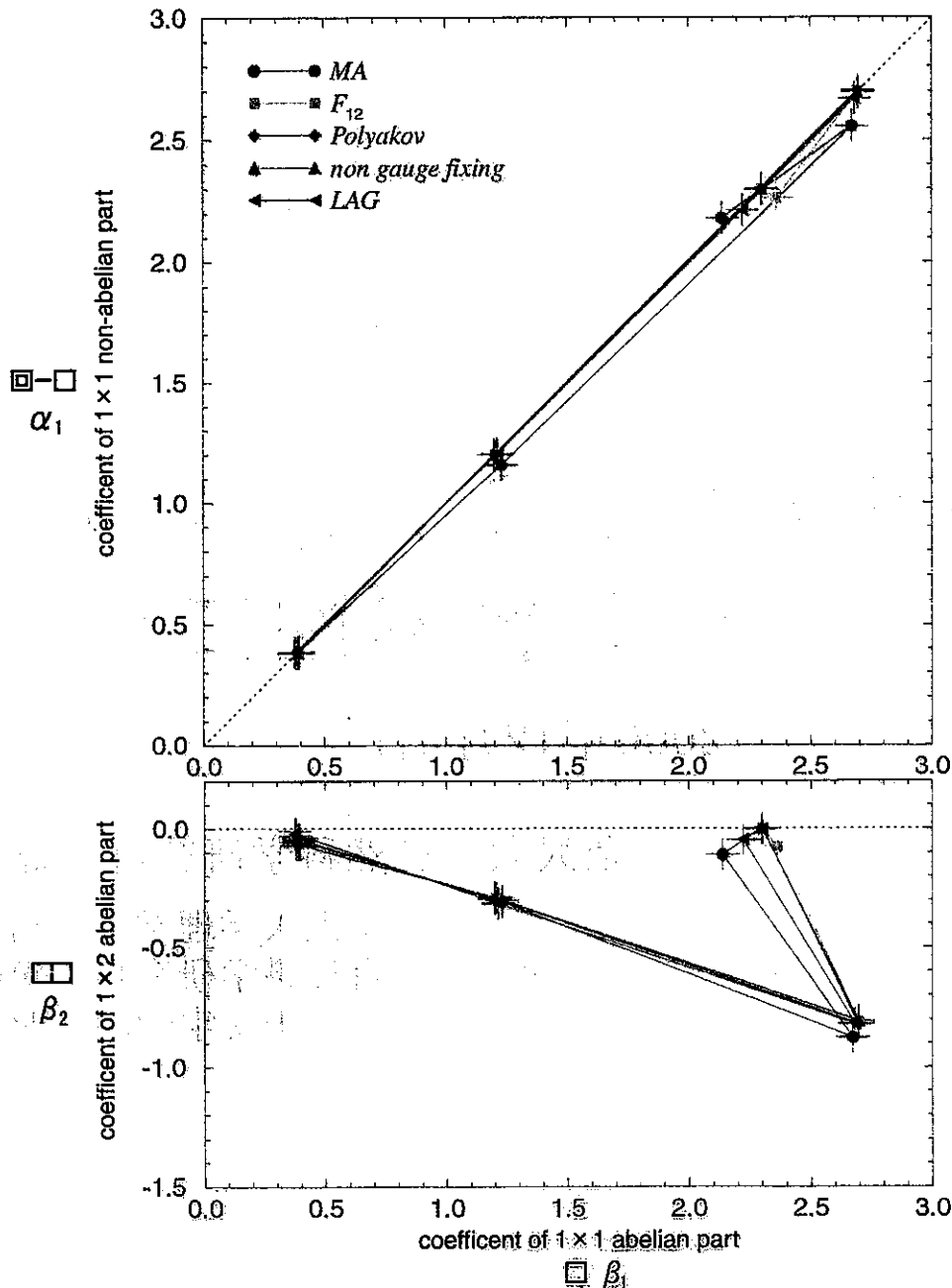
$$\uparrow = \uparrow + c_0 \sum_{\mu \neq \nu} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \uparrow \\ \rightarrow \end{array}$$

※変換の前後で、ゲージ場としての変換性は保たれている。

結果①

Lattice size : 32^4 、Wilson Action's coupling constant $\beta : 2.3$ 、

Effective Action : $S_{eff} = \alpha_1 (\square - \square) + \alpha_2 (\square\square - \square\square) + \beta_1 \square + \beta_2 \square\square$



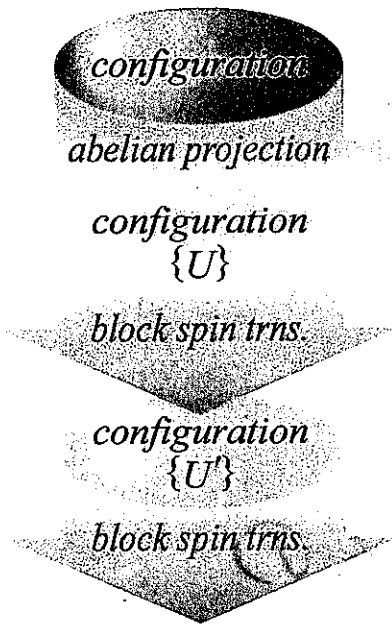
◎Action レベルでのアーベリアンドミナンスを顕わに見ることはできなかった。

◎全てのゲージの flow はゲージ固定をしない場合の flow に一致する。

→ block spin変換において、あらゆるゲージ固定条件が消えていくことを示している。

★キャラクター展開によって、ゲージ固定なしの時にはアーベリアンドミナンスが解析的に示されているので、Swendsen 流の block spin 変換によってどのゲージ固定条件から出発しても、その flow がゲージ固定なしのものと一致するのであれば、それは間接的にはあるがアーベリアンドミナンスが全てのゲージについて普遍であることが示されたといえる。

block spin 変換② (U(1) blocking)



非対角成分からなる
Charged 2 Matter Field

$$U_\mu(s) = C_\mu(s) u_\mu(s)$$

対角成分からなる
Gauge Field (U(1))

※Swendsen 流 blocking

$$U'_\mu(s) \leftarrow U_\mu(s) \times U_\mu(s+\hat{\mu})$$

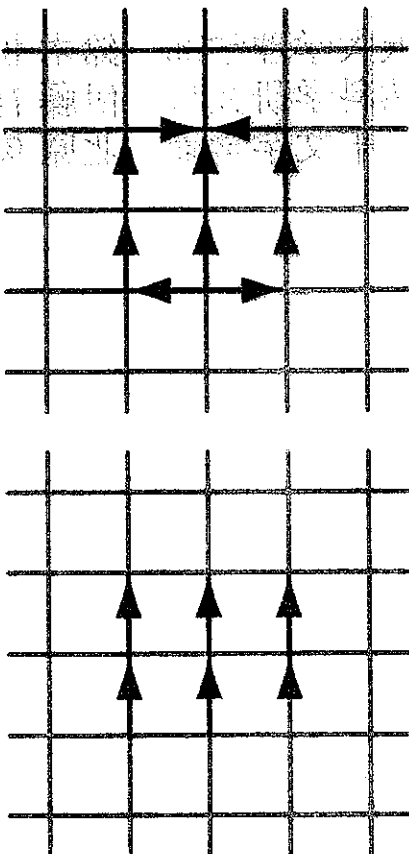
分離した $C_\mu(s)$ (非対角成分) と $u_\mu(s)$ (対角成分) が再び混ざり合ってしまう。

∴ゲージ固定条件そのものが消えてしまう。



abelian 部分をできる限り残したままで
block spin 変換する(くりこんでいく)方法を考える

★ U(1) blocking



Charged Matter 場 $C_\mu(s)$ と
U(1)対称性を持つ Gauge 場 $u_\mu(s)$ を
それぞれ別に blocking する。

●Gauge Field (U(1)) : $u_\mu(s)$

$$\uparrow \equiv \uparrow + c_1 \sum_{\mu \neq \nu} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \uparrow \\ \rightarrow \end{array}$$

●Charged 2 Matter Field : $C(s)$

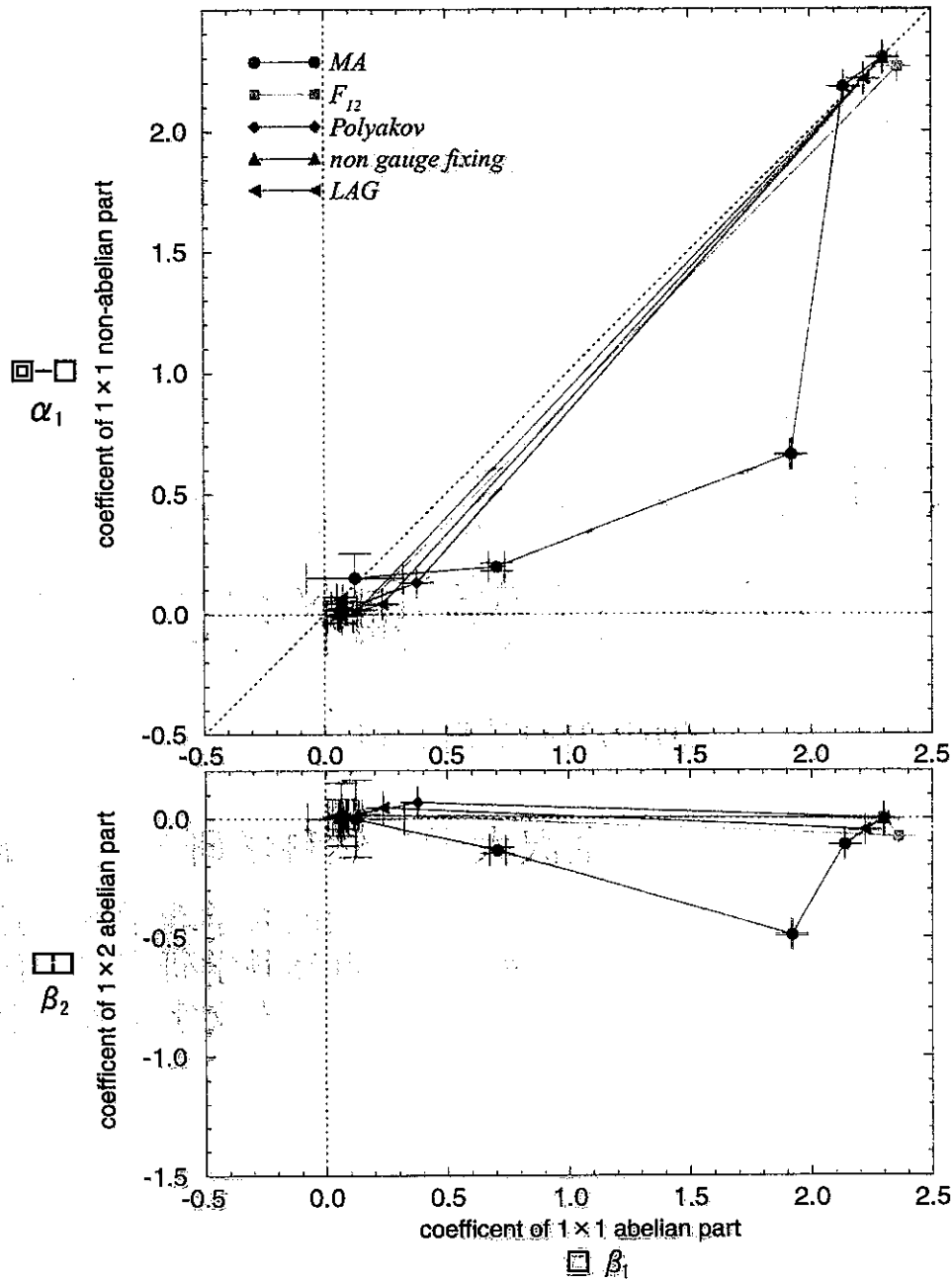
$$\uparrow \equiv \uparrow + c_2 \sum_{\mu \neq \nu} \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array}$$

※ただし、非対角な成分を素朴に計算すると
対角成分が出てくるので、
この対角成分を打ち消すようなU(1)変換を
行う必要がある。

結果②

Lattice size : 32^4 、Wilson Action's coupling constant $\beta : 2.3$ 、

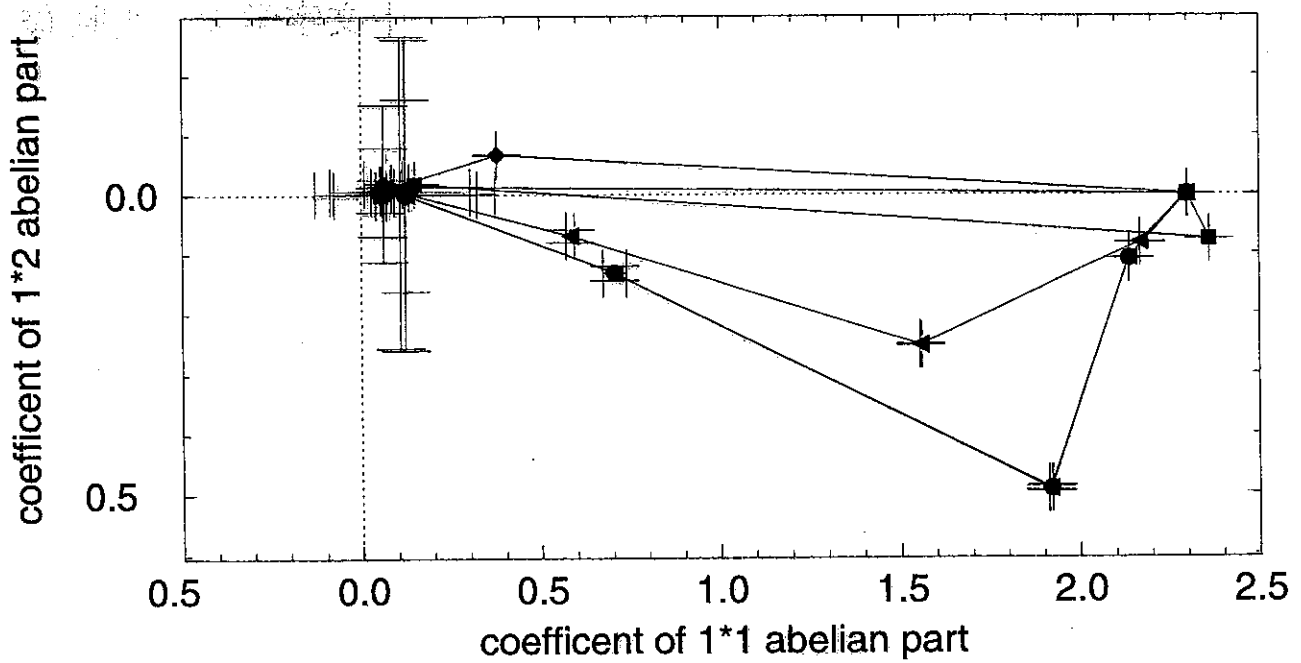
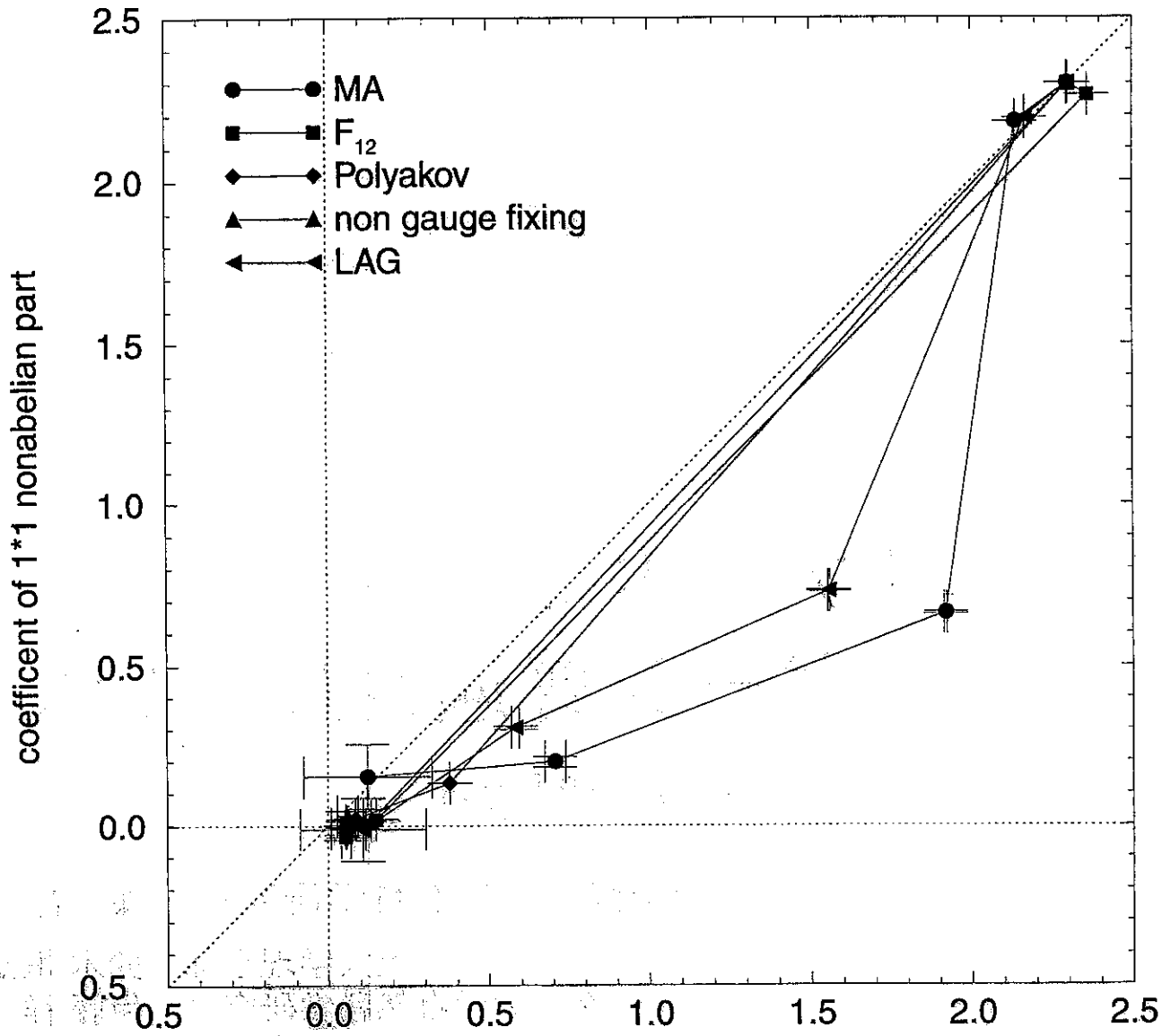
Effective Action : $S_{\text{eff}} = \alpha_1 (\square - \square) + \alpha_2 (\square\square - \square\square) + \beta_1 \square + \beta_2 \square\square$



◎MA gauge については、劇的にアーベリアンドミナンスがみえるが、それ以外のゲージではそれほどでもない。

◎それぞれの Coupling の値を比べてみるとおよそ 5~6 倍程度 α のほうが大きいことが分かり、明らかにアーベリアンドミナンスといえる。

◎しかしこの段階においては、それぞれゲージ固定条件における Effective Action がゲージ普遍であるかどうかは分からない。



まとめ

link 変数から作られる表の世界の *Effective Action* について、そのアーベリアンドミナンス性とゲージ普遍性を調査した。

Swendson 流 blocking

Action レベルではアーベリアンドミナンス性が顕わに見えることはなかった。しかしどのゲージ条件 (*abelian projection*) から出発しようとも、ゲージ固定なしの *flow* と重なることと、キャラクター展開から直接的ではないがアーベリアンドミナンスのゲージ普遍性はいえることが分かった。

U(1) blocking

MA ゲージではアーベリアンドミナンス性を Action レベルで顕わに出し、他のゲージでもアーベリアンドミナンスを見ることができた。

しかしこの段階では、ゲージ普遍性について見ることはできなかった。

またここでは MA ゲージだけが特殊に見えるので、現在 MA ゲージに良く似た性質を持つラプラシアンゲージについて、その *flow* を見るため同様の *simulation* を行っている。

simulation

Monte-Carlo simulation

Lattice size : 32^4 → 64^4 、 72^4

Configuration : 50 個 → よりたくさん

Wilson Action → Improved Action
(Iwasaki Action)

dual な世界へ

今回の研究において用いたのと同様の手法を用いれば、*Monopole Current* から記述される *dual* な世界の Action について、そのゲージ普遍性を知ることができる。

これより *Monopole* のゲージ普遍性についても調査したい。