於：日大理工（2001年4月25日）

無限個のPauli-Villars場を用いたゲージ場の正則化

hep-th/0012043
日塔光一
（千葉大）

イントロダクション

場の理論 ➡ 発散を含む

有限化、最後に→∞

ゲージ場 ➡ ゲージ対称性

正則化でも対称性を保つべき

不変な正則化

次元正則化（現在、最も強力）

○ゲージ不変性、実用性、…

×時空の次元に依存する対称性

$\epsilon_{\mu\nu\rho}$　　SUSY　取り扱いが難しい

無限個の PV 場によるカイラル不変な正則化
（物質場）　[Frolov & Slavnov (1993)]

これをゲージ場に適用できないか？
次元に依存する対称性をも不変に保つ正則化？

non-Abelian　　2-loop 以上は PV だけでは不変性×

ハイブリッドな正則化（HCD+PV）を使う

やること

課題

ハイブリッド正則化法（HCD+ 無限個 PV）を用いて4次元 YM 理論を正則化し、不変な正則化法の可能性を探る

具体的に

- 無限個の PV 場で正しい β 関数が出るか？
- 二次発散は抑えられているか？

- イントロダクション
- ハイブリッド正則化
  - 高階微分
  - Pauli-Villars
- 1-Loop の計算
  - ダイアグラム
  - 無限和の取り方
  - くりこみ
  - ゲージ固定項
- まとめ
- 他の理論への応用

4次元 Yang-Mills 理論

作用 $S = S_{\rm YM} + S_{\rm GF}$

$$S_{\rm YM} = \frac{1}{4}\int d^4x F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}$$

$$S_{\rm GF} = \int d^4x \left[\frac{\xi_0}{2}b^a b^a - b^a(\partial^\mu A_\mu)^a + \bar{c}^a(\partial_\mu D^\mu c)^a\right]$$

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$$

$$D^{ac}_\mu = \delta^{ac}\partial_\mu + gf^{abc}A^b_\mu$$

A^a_μ **ゲージ場**　b^a **補助場**

c^a **ゴースト場**　$\bar{c}^a$ **反ゴースト場**

ξ_0 **ゲージ固定変数**

4次元ユークリッド時空で考える

計量

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

ハイブリッドな正則化法
(HCD+PV)

概略

歴史

オリジナルの方法 [A.A.Slavnov ('70)] → **間違ったβ関数の係数（4次元YM理論）**

改良 ↓ ↓

正しいβ関数

PV場にゲージ固定
[M.Asorey et al. (1996)]
[P.Pronin et al. (1997)]
(HCD+PV)

HCD+次元正則化
[C.P. Martin et al. (1995)]
×目的にそぐわない

・二次発散も現れる

ハイブリッドな正則化法

(HCD+PV)

1-loop
発散のみの
理論

PV

HCD

ログ＆二次発散
（４次元 YM）

ある理論

有限な
理論

オリジナルの方法
[A.A.Slavnov ('70)]

間違ったβ関数の係数
（４次元 YM 理論）

改良

正しいβ関数

PV 場にゲージ固定
[M.Asorey et al. (1996)]

[P.Pronin et al. (1997)]

(HCD+PV)

HCD+ 次元正則化
[C.P. Martin et al. (1995)]

×目的にそぐわない

高階微分による正則化

ゲージ不変な部分

4次元YM理論

HCD作用

$$S_{\mathrm{HCD}} = \frac{1}{4\Lambda^4}\int d^4x (D^2 F_{\mu\nu})^a (D^2 F^{\mu\nu})^a$$

一般的な形：$\frac{1}{4\Lambda^{2n}}\int d^4x (D^n F_{\mu\nu})^a (D^n F^{\mu\nu})^a$

$$\omega = 4 - 2n(L-1) - E_A$$

プロパゲータ：収束性が上がる
バーテックス：収束性が下がる → **1-loopの発散が残る**

$S_{\mathrm{YM}} + S_{\mathrm{GF}} + S_{\mathrm{HCD}}$ から得られるプロパゲータ

$$\frac{\Lambda^4}{p^4(p^4+\Lambda^4)}(p^2\delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) + \xi_0 \frac{p_\mu p_\nu}{p^4}$$

p^{-6} **収束性が上がった**　　p^{-2} **変わらず！**

↓ S_{GF}**を修正**

$$\frac{\Lambda^4}{p^4(p^4+\Lambda^4)}(p^2\delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) + \frac{\xi_0}{H^2(p^2/\Lambda^2)}\frac{p_\mu p_\nu}{p^4}$$

$H^2(p^2/\Lambda^2)$：p **の多項式**　　p^{-6}

高階微分による正則化

ゲージ固定関数

ゲージ固定項 [Slavnov, Martin & Ruiz, etc]

$$S_{\rm GF}^{H} = \int_x \left[\frac{\xi_0}{2H^2} b^2 - b(\partial^\mu A_\mu) + \overline{c}(\partial_\mu D^\mu c) \right]$$

もう一つの取り方（こちらを採用）

$$S_{\rm GF}^{H} = \int_x \left[\frac{\xi_0}{2} b^2 - bH(\partial^\mu A_\mu) + \overline{c}H(\partial_\mu D^\mu c) \right]$$

BRST 不変性からゴーストにも必要

両者は実質的に同じもの

$$\{b, \overline{c}\} \longleftrightarrow \{Hb, H\overline{c}\}$$

入れ替えで交互に移る

しかし、PV 場に違いが出る

⇓

二次発散の相殺に寄与

Pauli-Villars 法

生成汎関数

$$S_{\mathrm{A}} = S_{\mathrm{YM}} + S_{\mathrm{HCD}} + S_{\mathrm{GF}}^{H}$$

$$Z[J,\chi,\eta,\bar{\eta}] = \int \mathscr{D}A_\mu \mathscr{D}b \mathscr{D}\bar{c} \mathscr{D}c \exp[-S - S]$$

ソース

$$\times \prod_{j=1}^{\infty} \left[\det{}^{-\frac{\alpha_j}{2}} \mathbf{A}_j\right] \left[\det{}^{-\frac{\alpha_{-j}}{2}} \mathbf{A}_{-j}\right]$$

ゲージ場に対するPV場

二つの場を一組にする

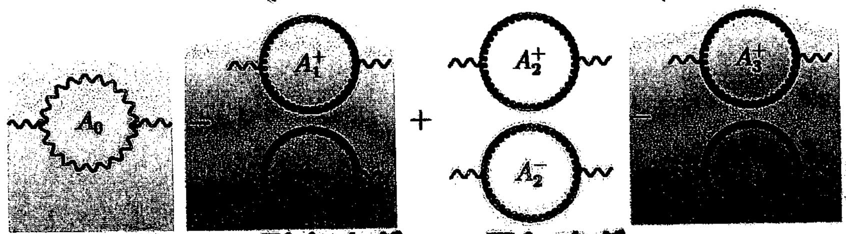
$$\times \prod_{i=1}^{\infty} \left[\det{}^{\gamma_i} \mathbf{C}_i\right] \left[\det{}^{\gamma_{-i}} \mathbf{C}_{-i}\right]$$

ゴースト場に対するPV場

二つの PV 場による正則化のイメージ

ゲージの 1-loop

$\mathscr{L}_{\mathrm{PV1}}$ $\mathscr{L}_{\mathrm{PV3}}$



+⋯ 無限個

途中で切ると正則化されない

オリジナルの発散　引きすぎ　足しすぎ

$\mathscr{L}_{\mathrm{PV2}}$

フェルミオン的なものとボソン的なものを交互に入れる

⇨ PV 条件

$$\alpha_j = (-1)^j$$

$$\gamma_i = (-1)^i$$

PV 場の具体形

PV 場の BRST 変換

$\phi_j \to \phi_j + \theta\left(\delta_{\mathrm{B}}\phi_j\right)$ 積分変数の変換

$$\delta_{\mathrm{B}} A^{\ a}_{j\mu} = g f^{abc} A^{\ b}_{j\mu} c^c, \quad \delta_{\mathrm{B}} b^a_j = g f^{abc} b^b_j c^c,$$
$$\delta_{\mathrm{B}} c^a_i = g f^{abc} c^b_i c^c, \quad \delta_{\mathrm{B}} \overline{c}^a_i = g f^{abc} \overline{c}^b_i c^c.$$

変換のもとで不変になるように作用を構成

ゲージ場に対する PV 場

$$\left[\det{}^{-\frac{\alpha_j}{2}} \mathbf{A}_j\right] = \int \mathscr{D}A_{j\mu}\mathscr{D}b_j \exp[-S_{M_j} - S_{b_j}]$$

$$S_{M_j} = \frac{1}{2}\int d^4x d^4y \; A^{\ a}_{j\mu}(x)\left[\frac{\delta^2 S_\Lambda}{\delta A^a_\mu(x)\delta A^b_\nu(y)} - M_j^2 \delta^{ab} g^{\mu\nu}\delta(x-y)\right] A^{\ b}_{j\nu}(y)$$

PV 場の質量項

$M_j = M|j|$

3次元のパリティ不変性から

ゲージ固定変数

$$S_{b_j} = \int d^4x \left[\frac{\xi}{2} b^a_j b^a_j - b^a_j H'(D^\mu A^{\ a}_{j\mu})\right]$$

補助場

補助場に対する高階微分項

$$H'\left(\frac{D^2}{\Lambda^2}\right) = \left(1 + \frac{D^4}{\Lambda^4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

共変微分の関数

ゴースト場に対する PV 場

$$\left[\det{}^{\gamma_i} \mathbf{C}_i\right] = \int \mathscr{D}\overline{c}_i \mathscr{D}c_i \exp\left[\int d^4x \left[\overline{c}^a_i H'(D_\mu D^\mu c_i)^a - m_i^2 \overline{c}^a_i c^a_i\right]\right]$$

$m_i = m|i|$

オリジナル場との比較

いたるところで $\partial_\mu \to D_\mu$

⇨ バーテックスに違い

1-loop の計算

作用の分解 YM からの寄与と HCD からの寄与とに分ける

$$\int d^4x\Phi(x)(K+V+M^2)\Phi(x)$$ ← 任意の場

K：運動項部分

V：相互作用部分 $V = V_0 + \frac{1}{\Lambda^4}V_\Lambda$

$$K = K_0 + \frac{1}{\Lambda^4}K_\Lambda$$

V_0, K_0：YMからの寄与

V_Λ, K_Λ：HCDからの寄与

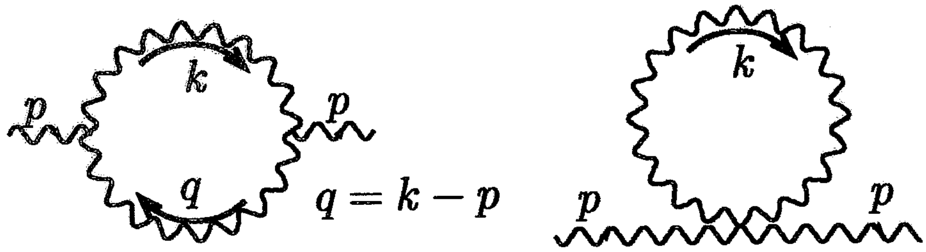
この場合のプロパゲータ

$$\frac{1}{K+M^2} = \frac{1}{K_0+M^2}\left(1 - \frac{K_\Lambda}{K_0+M^2}\Lambda^{-4} + O(\Lambda^{-8})\right)$$

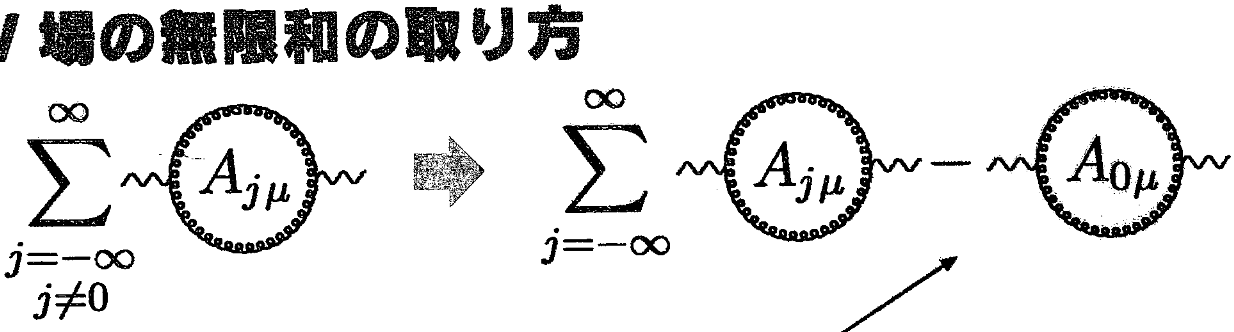
作用の分解によって Λ^{-4} で展開可能　　**Λ^{-4} まで考える**

スケール $\frac{M}{\Lambda}$ = **定数**　　**ファイマン・ゲージ** $\xi_j = 1$

運動量のアサイン 全てのループで同じように取る



PV 場の無限和の取り方

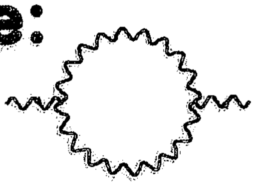


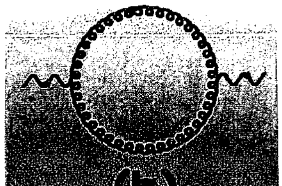
massless ループを無理やり作る

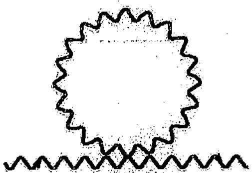
現われるダイアグラム

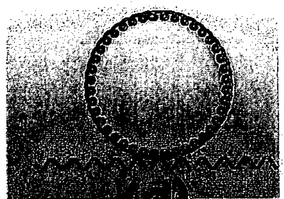
Λ^0、Λ^{-4} の両方に現れるダイアグラム

A-Type:

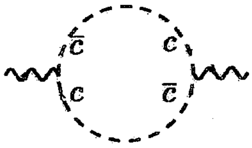

(a)


(b)

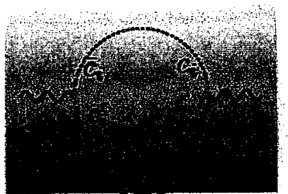

(c)

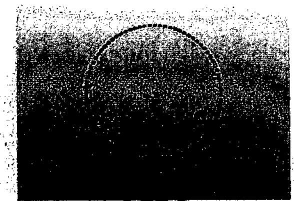

(d)

C-Type:

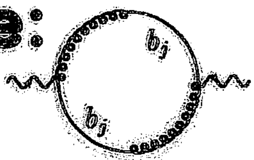


(e)

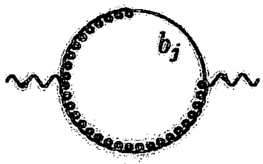

(f)


(g)

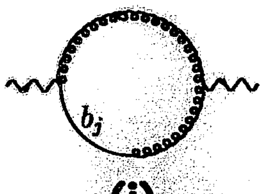
B-Type:



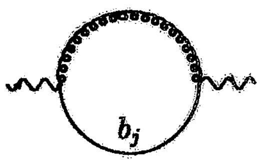
(h)



(i)

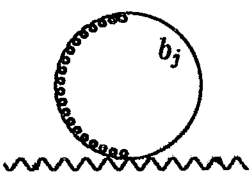


(j)



(k)

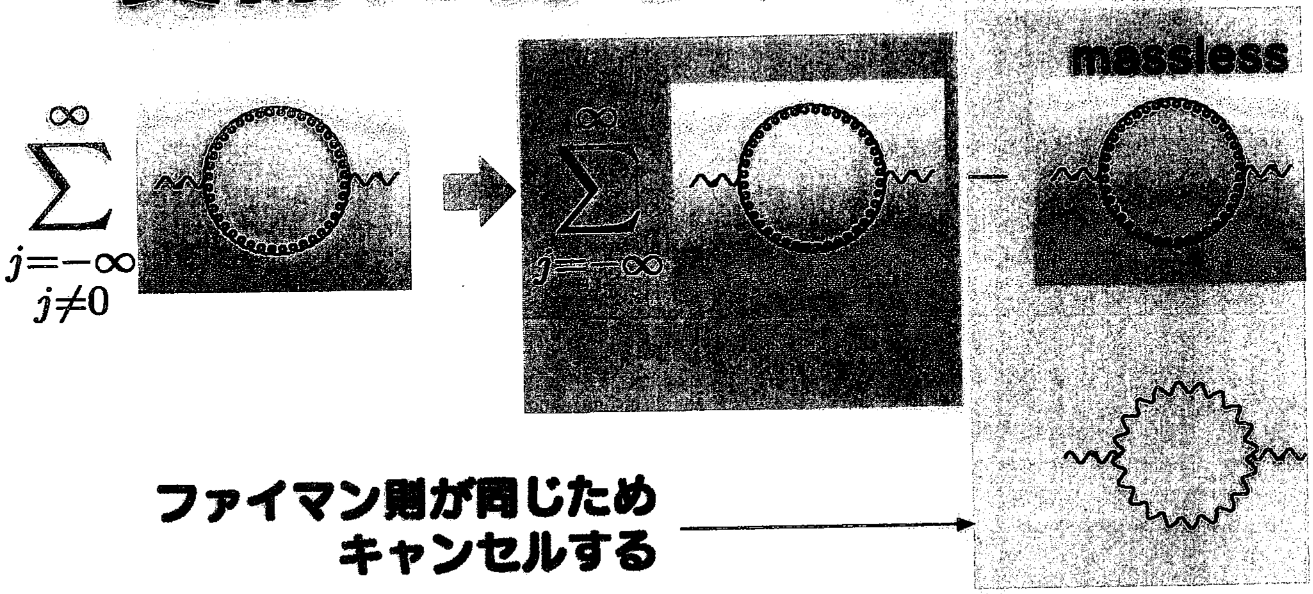
Λ^{-4} のみに現れるダイアグラム



(l)

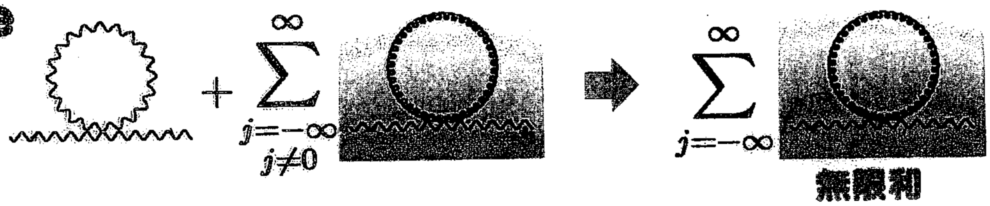
色なし：オリジナル場　1つ
色付き：PV 場　無限個

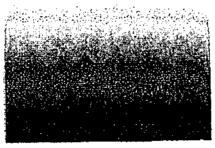
実際に寄与する部分



ゲージ場からの寄与が massless PV 場の役割をする

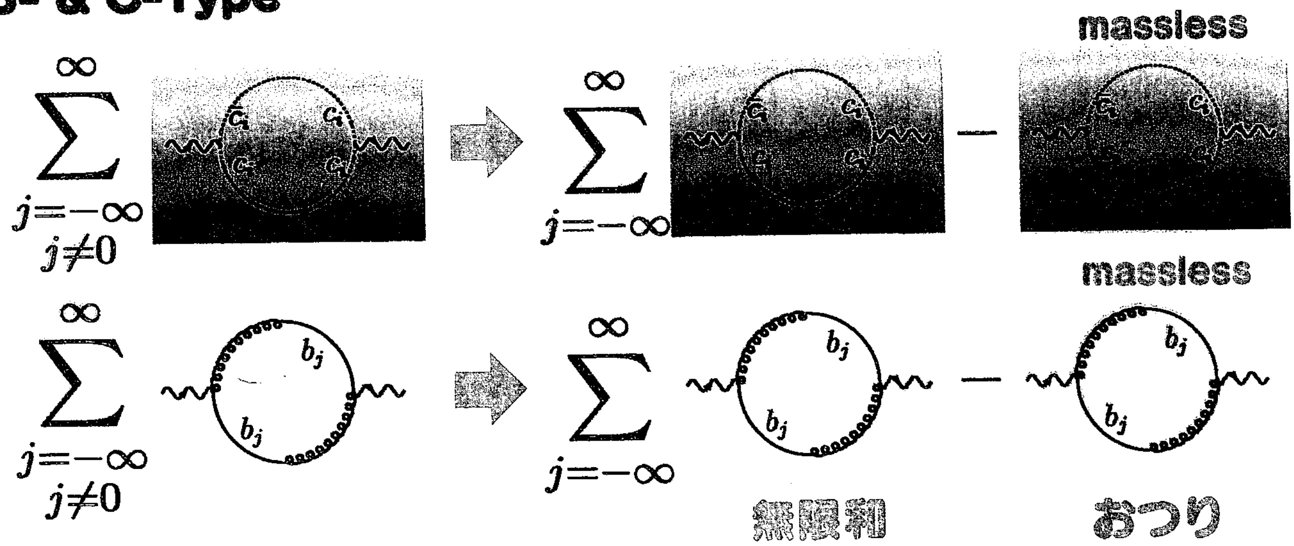
A-Type





この2つのグループには
massless PV 場が必要

B- & C-Type



計算結果 (1)

二次発散

	Λ^0		Λ^{-4}	
	無限和	massless	無限和	massless
A:	+1/10	0	-18/77	0
	M^2	$\mathscr{M}^2$	M^6/Λ^4	$\mathscr{M}^6/\Lambda^4$
B:	-1/10	+5/6	+18/77	-2/105
C:	0	-5/6	0	+2/105

相殺している！

Log 発散

	$p^2\delta_{\mu\nu}$	$p_\mu p_\nu$	$p^2\delta_{\mu\nu}$	$p_\mu p_\nu$
A:	+19/3	-22/3	0	0
	$\ln M$		$\ln \mathscr{M}$	
B:	+21/3	-18/3	-21/3	+18/3
C:	+4/3	-4/3	-3/3	+6/3
	$\ln m$			

$$\frac{g^2 c_v \delta^{ab}}{32\pi^2}\left([redacted] + \frac{4}{3}\ln m - \frac{24}{3}\ln \mathscr{M} \right)(p^2\delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)$$

$$\Pi^{ab}_{\mu\nu}(p)\Big|_{\mathrm{div}} = \frac{g^2 c_v \delta^{ab}}{8\pi^2}\left(\frac{5}{3}\right)\ln M (p^2\delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)$$

計算結果 (1)

二次発散

	Λ^0		Λ^{-4}	
	無限和	massless	無限和	massless
A:	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]
B:	M -1/10	$\mathscr{M}^2$ +5/6	M^6/Λ^4 +18/77	$\mathscr{M}^6/\Lambda^4$ -2/105
	m^2		m^6/Λ^4	

相殺している！

Log 発散

	$p^2\delta_{\mu\nu}$	$p_\mu p_\nu$	$p^2\delta_{\mu\nu}$	$p_\mu p_\nu$
A:	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]
B:	$\ln M$ +21/3	-18/3	$\ln \mathscr{M}$ -21/3	+18/3
	$\ln m$			

$$\frac{g^2 c_v \delta^{ab}}{32\pi^2}\left([redacted] \;-\frac{24}{3}\ln\mathscr{M}\right)(p^2\delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)$$

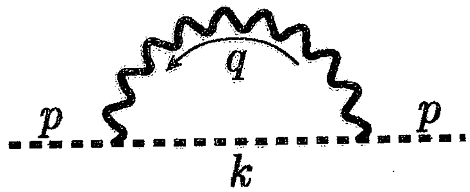
$M = m = \mathscr{M}$ **の下では**

$$\Pi^{ab}_{\mu\nu}(p)\Big|_{\mathrm{div}} = \frac{g^2 c_v \delta^{ab}}{8\pi^2}\left(\frac{5}{3}\right)\ln M(p^2\delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)$$

くりこみ(1)

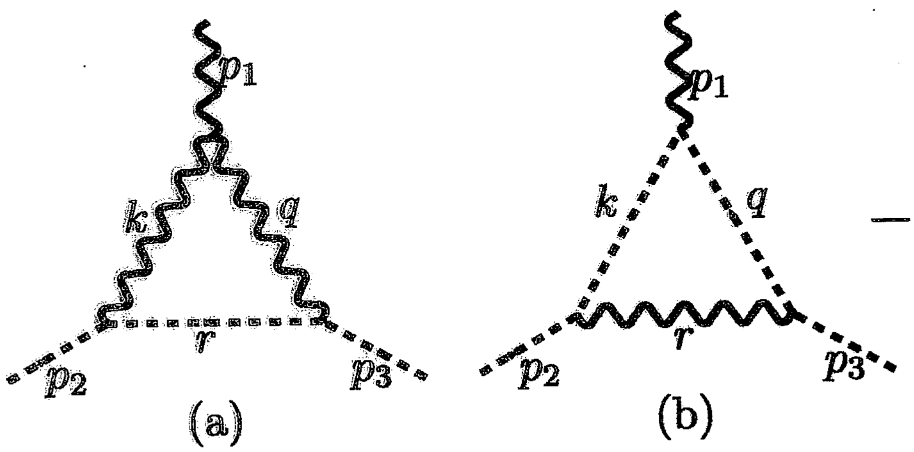
必要なダイアグラム

ゴーストの自己エネルギー



$$-\frac{g^2 c_v \delta^{ab}}{16\pi^2} p^2 \ln M$$

ゲージ・ゴースト・ゴースト頂点



$$-\frac{ig^3 c_v f^{abc}}{32\pi^2} p_{2\mu} \ln M$$

積分の分子が外線の運動量に依存するため
Λ^{-4} からの発散なし

⇓

有効作用として

$$S = S_{\mathrm{YM}} + S_{\mathrm{GF}}$$

高階微分を加える前の作用

くりこみ(2)

くりこみ定数

3個の「くりこみ定数」でくりこまれる

$$A^a_{\mu\,\mathrm{bare}} = z_3^{\frac{1}{2}} A^a_\mu, \qquad c^a_{\mathrm{bare}} = z_c^{\frac{1}{2}} c^a, \qquad \bar{c}^a_{\mathrm{bare}} = z_c^{\frac{1}{2}} \bar{c}^a,$$

$$b^a_{\mathrm{bare}} = z_3^{-\frac{1}{2}} b^a, \qquad g_{\mathrm{bare}} = z_1 z_3^{-\frac{3}{2}} g, \qquad \xi_{0\,\mathrm{bare}} = z_3 \xi_0.$$

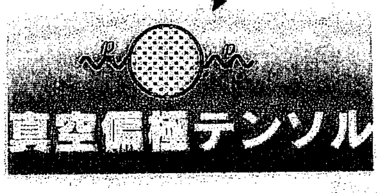
$$\underbrace{\mathscr{L}_{\mathrm{bare}}}_{\text{発散}} = \underbrace{\mathscr{L}}_{\text{有限}} + \underbrace{\mathscr{L}_{\mathrm{count}}}_{\text{発散}}$$

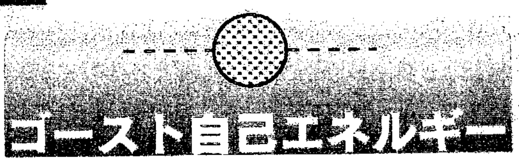
1-loop との対応を見る

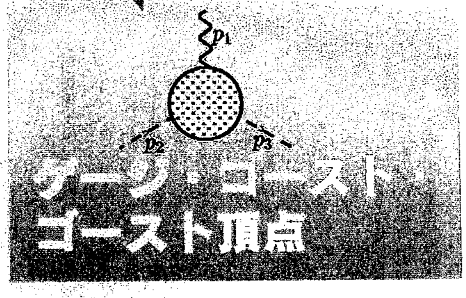
$$z_i = 1 + \hbar z_i^{(1)} + O(\hbar^2)$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{count}} = \frac{1}{4}(z_3 - 1)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + O(A_\mu^3)$$

$$+ (z_c - 1)\bar{c}\partial_\lambda \partial^\lambda c - (z_c z_1 z_3^{-1} - 1) g f^{abc} (\partial_\mu \bar{c}^a) A^b_\mu c^c$$







計算結果と比較して

$$z_3^{(1)}\Big|_{\xi_0=1} = \frac{g^2 c_v}{16\pi^2}\frac{5}{3}\ln M^2$$

$$z_3^{(1)}\Big|_{\xi_0=1} = \frac{g^2 c_v}{16\pi^2}\frac{1}{2}\ln M^2$$

$$z_3^{(1)}\Big|_{\xi_0=1} = \frac{g^2 c_v}{16\pi^2}\frac{2}{3}\ln M^2$$

$$\beta(g,\xi_0)\Big|_{\xi_0=1} = -\frac{g^3}{16\pi^2}\left(\frac{11}{3}\right) c_v + O\left(g^5\right)$$

よく知られた値

$$\gamma(g,\xi_0)\Big|_{\xi_0=1} = -\frac{g^2}{16\pi^2}\left(\frac{5}{3}\right) c_v + O(g^4)$$

正則化法として正しい

もう一つのゲージ固定項

$$S^{H}_{\mathrm{GF}} = \int_x \left[-\frac{\xi_0}{2H^2} b^2 - b(\partial^\mu A_\mu) + \overline{c}(\partial_\mu D^\mu c) \right]$$

Λ^{-4} のオーダーに異変　Λ^{0} のオーダーは変わらず

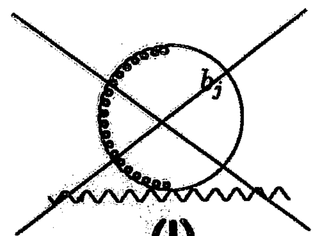
ゴーストからの寄与なし

▶相殺機構が変わる

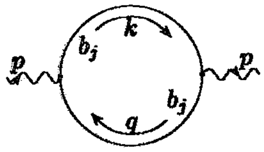
ゲージ場と補助場の Feynman 則に変更

▶出現するダイアグラムに変化

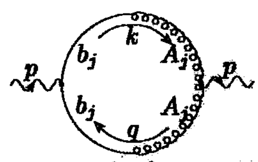
新たに出現するダイアグラム



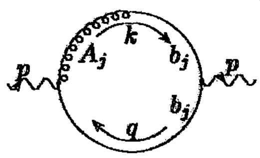
(l)



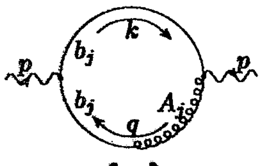
(m)



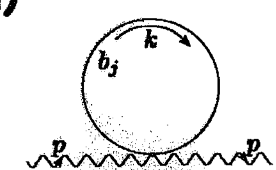
(n)



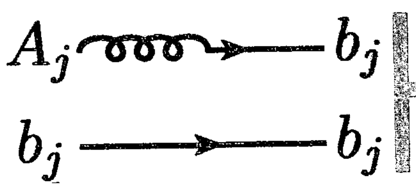
(o)



(p)



(q)



質量項に比例

▶“おつり” が出ない

(massless の寄与なし)

計算結果 (2)

	Λ^0		Λ^{-4}	
	無限和	massless	無限和	massless
[illegible]	-1/10	0	-18/77	0
B:	-1/10	+5/6	+12/77	0
[redacted]				

二次発散が残る！

さっきと同じ

PV for Ghost のアクション

$$\bar{c}_i^a (D_\mu D^\mu c_i)^a - m_i \bar{c}_i^a c_i^a \not\longleftrightarrow \bar{c}_i^a H' (D_\mu D^\mu c_i)^a - m_i \bar{c}_i^a c_i^a$$

再定義で入れ替えられない

ゲージ固定項の高階微分に問題

何に対する高階微分か？

もともと：
ゲージ場のプロパゲータの収束性の向上

➡ゲージ場に対する高階微分であるべし

$$\cancel{\frac{\xi_0}{2H^2} b^2 - b(\partial^\mu A_\mu) + \bar{c}(\partial_\mu D^\mu c)} \qquad \frac{\xi_0}{2} b^2 - bH(\partial^\mu A_\mu) + \bar{c}H(\partial_\mu D^\mu c)$$

まとめ

やったこと

ハイブリッド正則化法による 高階微分＋
4次元YM理論の正則化　　無限個のPV場

結果

正しいβ、γ関数の値が出た

・Feynmanゲージで良く知られた値

・正則化法として使えうる

二次発散について

・ゲージ固定関数に対する高階微分に注意

・Λの各オーダーで同様な相殺機構が働く

これから

他の理論への応用

・三次元Yang-Mills-Chern-Simons理論

・SUSY

実用的な計算方法

他の理論への応用

3次元 Chern-Simons ゲージ理論

[KN & T.Ebihara (1998)]

無限個の PV 場 → パリティ不変な正則化因子

$\epsilon_{\mu\nu\rho}$

Chern-Siomons シフトのユニバーサリティ $k \to k + rc_v$

	$r=0$	$r=1$
HCD+PV	○	○

3次元 SUSY-YMCS

CS シフトが Kao et. al の結果と一致

[Y.Koiwa (1998)]

4次元 QCD [S.Chiantese (2001)]

Exact Renormalization Group Equation

ゲージ場と物質場の両方に無限個 PV

1-Loop β 関数の計算